ARCHIMÈDE

ŒUVRES

DE LA SPHÈRE ET DU CYLINDRE
LA MESURE DU CERCLE
SUR LES CONOÏDES ET LES SPHÉROÏDES



LES BELLES LETTRES

PARIS

COLLECTION DES UNIVERSITÉS DE FRANCE
Publiée sous le patronage de l'ASSOCIATION GUILLAUME BUDÉ

ARCHIMÈDE

TOME PREMIER

DE LA SPHÈRE ET DU CYLINDRE
LA MESURE DU CERCLE
SUR LES CONOÏDES ET LES SPHÉROÏDES

TEXTE ÉTABLI ET TRADUIT

PAR

CHARLES MUGLER

Professeur à la Faculté des Lettres et Sciences humaines de l'Université de Nice



PARIS
SOCIÉTÉ D'ÉDITION « *LES BELLES LETTRES* »
95, BOULEVARD RASPAIL

1970

Conformément aux statuts de l'Association Guillaume Budé, ce volume a été soumis à l'approbation de la commission technique, qui a chargé M. Ed. Delebecque d'en faire la révision et d'en surveiller la correction en collaboration avec M. Ch. Mugler.

INTRODUCTION

I. La vie d'Archimède

Archimède naquit à Syracuse en 287 avant J.-C. ; il était le fils de l'astronome Phidias, dont les travaux sur le rapport des diamètres du soleil et de la lune sont mentionnés dans l'*Arénaire* d'Archimède. Sans être riche, sa famille, liée d'amitié au tyran Hiéron II de Syracuse, avait suffisamment de ressources pour qu'Archimède pût consacrer tout son temps à ses travaux de recherche. Attiré par le rayonnement du grand centre de culture de ce temps, Alexandrie, il fit au moins un voyage en Égypte, et restera en correspondance avec des savants comme Dosithée, Conon de Samos et Érastosthène qui y continuaient la tradition d'Euclide.

Comme son voyage en Égypte, tous les traits de sa vie privée qu'une tradition souvent incertaine nous a conservés nous sont présentés dans un rapport étroit avec ses recherches scientifiques : la détection de la fraude commise par l'orfèvre chargé de confectionner pour le roi Hiéron un diadème en or pur ; la distraction d'Archimède qui lui fait oublier de se rhabiller après un bain pendant lequel il trouve la solution d'un problème qu'il s'était posé, et son cri de joie εὕρηκα, la défense de sa ville natale, contre l'armée et la flotte de Marcellus, par des machines balistiques d'une puissance extraordinaire ; enfin la mort d'Archimède, surpris dans ses méditations, au moment de la prise de Syracuse en 212, par un soldat romain qui tue le

vieux savant parce qu'il ose lui défendre de toucher aux figures tracées par lui dans le fin sable de son abaque.

II. L'ŒUVRE D'ARCHIMÈDE

Les travaux d'ingénieur

Elle se présente sous les deux aspects, en apparence très différents, de la recherche mathématique abstraite et des réalisations techniques. La gloire d'Archimède est fondée en grande partie sur ces dernières, les auteurs de l'antiquité qui parlent du grand Syracusain évoquant bien plus volontiers ses exploits d'ingénieur que ses découvertes géométriques.

Parmi les machines dont on lui attribue l'invention figure entre autres la machine hydraulique connue sous le nom de *vis d'Archimède*, décrite par Philon de Byzance et par Vitruve. Une autre tradition lui prête la construction d'un planétarium reproduisant avec exactitude les apparences des mouvements célestes d'après les représentations astronomiques admises à l'époque. Cicéron fait allusion, à plusieurs endroits de ses écrits philosophiques, à cette machine, qui était probablement une réédition perfectionnée des modèles du ciel construits jadis par les astronomes du temps de Platon et modifiés, au gré des progrès de l'astronomie et de la mécanique, par Eudoxe de Cnide et par Callippe. Les historiens admirent Archimède surtout pour les qualités d'ingénieur militaire dont il fit preuve pour la défense de sa ville natale au moyen des catapultes, des « mains de fer » et des crocs mentionnés par Polybe, par Plutarque et par Tite-Live. La renommée d'Archimède comme constructeur et la croyance en la toute-puissance de son génie pratique ont été telles dans l'antiquité tardive que certains auteurs le créditent même d'inventions faites par d'autres savants. Tertullien lui attribue ainsi la construction d'orgues hydrauliques, alors que cet instrument de musique a été réalisé pour la première fois par le physicien alexandrin Ktésibios. L'invention et la mise en action de

miroirs ardents à l'occasion du siège de Syracuse sont jusqu'à nos jours l'objet de discussions entre historiens et historiens des sciences. Notre source la plus sûre pour ce trait de l'activité d'Archimède est Anthémius de Tralles, ingénieur et architecte du VIe siècle. constructeur de la Hagia Sophia à Constantinople, Dans ses *Problèmes de mécanique*, cet auteur décrit la composition d'un miroir ardent au moyen de 24 miroirs plans disposés suivant les cordes consécutives d'une conique. Mais ce qui était possible, techniquement, du temps d'Anthémius ne l'était pas nécessairement du temps d'Archimède, et le problème reste entier.

Mais Archimède lui-même n'a attaché que peu d'importance à ses réalisations techniques, dont le nombre reste impressionnant, même déduction faite des constructions ou inventions dont l'attribution est douteuse. Il n'a lui-même laissé aucun ouvrage de technologie.

L'expérience du port de Syracuse

Parmi les anecdotes sur l'activité pratique d'Archimède, il y en a une qui fait apparaître avec une netteté particulière l'intérêt très réduit que le grand savant accordait à ses réussites dans le domaine technique et qui montre que même dans les expériences spectaculaires destinées en apparence à frapper l'imagination de la foule, la vraie fin poursuivie par le grand savant était la vérification d'une proposition de mathématiques appliquées ou d'une loi physique.

Un jour, pendant le règne de Hiéron II, Archimède monta dans le port de Syracuse, en présence du roi et de la cour, une expérience physique de grand style. Il fit charger un navire de la marine marchande du roi, mis à sa disposition par ce dernier, de sa cargaison habituelle et y embarqua un équipage important. Ce vaisseau avait été tiré à sec par les efforts réunis d'un grand nombre d'ouvriers. La fin apparente et exotérique de cette expérience était de démontrer qu'il n'est pas nécessaire de faire appel à toute une équipe de haleurs pour déplacer le navire, mais qu'un seul homme suffit

pour accomplir ce travail. Il fit donc attacher le navire à l'extrémité des câbles liés à une des machines inventées par lui à la fin de faire exécuter des travaux considérables à des forces faibles, en faisant agir ces dernières sur un long parcours. Assumant lui-même le rôle du haleur unique, il prit place à quelque distance du navire et commença à activer le câble à l'autre extrémité du dispositif, ce qui eut pour effet, malgré la disproportion entre l'effort musculaire du savant et la masse à laquelle il s'appliquait, de faire avancer, lentement mais d'une manière continue, le navire. Plutarque, l'une de nos sources pour cet épisode, désigne l'appareil dont Archimède se servit à cette occasion par le terme polyspaston[1], moufle à plusieurs poulies, et Proclus[2], notre seconde source, précise que le navire servant à l'expérience était un trois-mâts destiné par Hiéron II au roi Ptolémée d'Égypte, en ajoutant ce détail pittoresque que Hiéron lui-même activait l'appareil tracteur.

Plutarque nous dit que cette expérience eut lieu à la suite d'un entretien entre Archimède et Hiéron II au sujet du théorème de mécanique rationnelle, qualifié d'invention d'Archimède aussi par Pappus[3], d'après lequel il est possible de déplacer un poids donné, quelque grand qu'il soit, au moyen d'une force donnée, quelque petite qu'elle soit. A l'occasion de cet entretien, Archimède aurait prononcé, devant le roi quelque peu sceptique, les paroles célèbres « donne-moi un point d'appui, et je soulèverai la terre ».

Mais si Archimède n'avait voulu que relever un défi du roi à l'égard de la puissance d'un seul homme, cette expérience spectaculaire dans le port de Syracuse ne serait qu'un épisode, insignifiant en comparaison de ses découvertes scientifiques, dans la vie du grand savant. Ce qui fait de cette démonstration *ad oculos*, dont les données matérielles ont, certes, été exagérées

1. *Vie de Marcellus*, 14.
2. *In Eucl.*, éd. Friedlein, p. 63.
3. *Collection géom.* VIII, prop. 10.

par la tradition, comme l'a montré E. J. Dijksterhuis[1], mais qui accuse des traits d'authenticité indéniables, un événement important dans l'histoire des sciences, c'est qu'elle est conçue par Archimède, moins pour convaincre Hiéron II avec sa suite et le peuple de Syracuse, que pour réduire à l'absurde les théories mécaniques d'un penseur du IVe siècle, dont l'autorité commençait à s'imposer dans la recherche des lois de la physique, je veux dire d'Aristote.

A la fin du livre VII de la *Physique*, 250a 1 sq., le Stagirite développe en effet une théorie du mouvement qu'on pourrait appeler la dynamique aristotélicienne du corps solide. Le texte de cette page de la *Physique* nous a été transmis dans un état lamentable ; il contient, en particulier, plusieurs confusions dans la notation mathématique des faits physiques[2]. Si on fait abstraction de ces déformations évidentes, voici les deux lois qu'on peut dégager du raisonnement d'Aristote :

(1) La vitesse V d'un mobile est une fonction linéaire du rapport de la force A à la résistance B,

$$V = \lambda . \frac{A}{B},$$

pour toutes les valeurs de A et de B telles que $\frac{A}{B}$ reste supérieur à une valeur L marquant la limite inférieure de l'efficacité de la force A.

(2) Pour $\frac{A}{B} \leqslant L$, la loi (1) n'est plus valable ; on a alors

$$V = O$$

Il peut en effet arriver, dit Aristote, 250a 10, que la force reste absolument inefficace, et on ne saurait induire de ce qu'une force communique à un mobile telle vitesse, que la moitié de cette force (du moment

1. *Archimedes*, Copenhague, 1956, p. 15 sq.
2. Cf. Ch. Mugler, *Archimède répliquant à Aristote*, Revue des Études Grecques, t. LXIV, 1951, pp. 67-74.

qu'elle peut tomber en dessous du seuil d'efficacité) lui communique une vitesse moitié de la précédente, ni même aucune vitesse du tout.

De ces deux propositions, également inexactes, d'Aristote, la première, la loi de la vitesse proportionnelle au rapport de la force à la résistance, a été désastreuse pour l'histoire des sciences, parce que, aucun penseur grec n'ayant reconnu et corrigé cette erreur fondamentale de la physique péripatéticienne, elle s'est perpétuée, grâce à l'autorité d'Aristote, jusqu'au seuil des temps modernes. Encore Galilée, quand il établira une théorie exacte du mouvement fondée sur le principe d'inertie et sur l'expérience, aura à lutter contre cette autorité. La seconde erreur d'Aristote, en revanche, la prétendue loi de l'inefficacité de la force pour des valeurs inférieures à une certaine limite, a été relevée et réfutée dès l'antiquité, et c'est l'expérience du port de Syracuse que nous venons d'évoquer qui constitue la réplique d'Archimède à Aristote.

Archimède aurait, certes, pu avoir recours à d'autres procédés pour montrer l'absurdité de la proposition d'Aristote et pour mettre en action son principe de la continuité dans l'efficacité d'une force. Mais pour donner à sa démonstration une pertinence particulière à l'égard d'Aristote, pour en faire un argument *ad hominem*, il choisit exactement les éléments matériels qu'Aristote donne en exemple pour sa proposition erronée. Si la force pouvait se diviser, dit Aristote, à la suite de son argumentation, au-delà d'une certaine limite, il arriverait qu'un seul homme continuât à mouvoir un vaisseau déplacé habituellement par une équipe de plusieurs haleurs, éventualité physique qu'Aristote exclut expressément. L'expérience réelle du port de Syracuse est la contrepartie exacte de l'expérience fictive d'Aristote, et Archimède lui-même y assume, avec un succès sans réplique, le rôle du haleur unique auquel Aristote avait dénié toute efficacité motrice.

Par-delà l'impression qu'elle était censée produire

sur le grand public, cette expérience avait donc une autre fin : elle était la vérification, aux yeux d'Archimède lui-même et pour le cercle restreint des initiés, de la proposition de mécanique rationnelle citée plus haut.

L'œuvre théorique

Ce sont les travaux théoriques d'Archimède, moins aptes, par leur nature, que ses exploits d'ingénieur à captiver l'intérêt du grand public et négligés, pour cette raison, par les historiens anciens, qui assurent au savant Syracusain une place parmi les grands créateurs des sciences mathématiques. Admirables à la fois par leur variété et par leur perfection logique, ils ne sont pas moins audacieux que les réalisations les plus étonnantes de son génie technique. Pour apprécier cette œuvre théorique à sa juste valeur, il convient de se souvenir des résultats atteints par la science géométrique au moment de la jeunesse d'Archimède, de tracer en quelque sorte la frontière entre ce qui était connu avant Archimède et le vaste domaine qui était encore à l'état virtuel avant l'intervention d'Archimède.

Bilan des sciences mathématiques en 260 avant J.-C.

Une grande partie du savoir géométrique acquis jusqu'au commencement du IIIe siècle avant J.-C. était codifiée dans les *Éléments* d'Euclide, qui groupaient, en les liant, l'arithmétique et la géométrie pythagoricienne des figures planes et du cercle, la théorie de la similitude renouvelée par Eudoxe de Cnide, la méthode d'exhaustion du même Eudoxe, les découvertes de Théétète relatives aux polyèdres réguliers. Des propositions comme 1, 2, 16, 17, 18 du livre XII des *Éléments*, où il est démontré, par la méthode d'Eudoxe, que les aires de deux cercles sont entre elles comme les carrés construits sur leurs diamètres, et que les volumes de deux sphères sont entre eux comme les cubes construits sur leurs diamètres, et les théorèmes du livre XIII sur la construction et l'existence en nombre limité des polyèdres réguliers pouvaient être considérés vers 260 comme les étapes

les plus avancées de l'investigation mathématique. Mais sauf dans la proposition 10 du XII[e] livre des *Éléments*, d'après laquelle le volume d'un cône est égal au tiers du volume d'un cylindre de même base et de même hauteur, les théorèmes relatifs à l'équivalence des figures planes et à trois dimensions ne comparaient entre elles que des figures limitées par des droites ou par des plans. Les seules figures de révolution examinées avant Archimède étaient le cône, le cylindre et la sphère, traités dans les *Éléments*, et le tore, appliqué par Archytas de Tarente à la solution du problème de la duplication du cube. Une seule espèce de lignes courbes, à part le cercle et la « quadratrice » d'Hippias d'Élis, avait fait l'objet d'enquêtes systématiques, les coniques, qu'Euclide n'avait pas fait entrer dans ses *Éléments*, mais auxquelles il avait réservé, à la suite des travaux de Ménèchme, un traité spécial. Différentes tentatives pour « quarrer » des aires limitées par des lignes courbes, c'est-à-dire pour trouver des carrés qui leur fussent équivalents, avaient été entreprises déjà avant Euclide. Une de ces quadratures, celle des « lunules » liées au triangle rectangle, effectuée par Hippocrate de Chios, avait bien réussi, mais elle n'était d'aucune utilité pour la solution du problème de la quadrature du cercle qui avait préoccupé les géomètres du v[e] siècle. Les recherches d'Anaxagore, d'Antiphon et de Bryson, orientées dans ce sens, étaient restées à l'état d'essais sans résultats précis.

C'est ce bilan, positif et négatif, du savoir géométrique des Grecs autour de 260 qui détermina en grande partie les interventions d'Archimède dans l'histoire des sciences mathématiques. Archimède ne dédaigne pas, certes, d'enrichir à l'occasion certaines théories désormais classiques, comme celle des polygones réguliers, d'élégantes trouvailles ; mais il vise avant tout à doter l'investigation géométrique de méthodes nouvelles et à conquérir par leur application des champs géométriques nouveaux.

Découvertes d'Archimède en mathématiques pures

Se proposant d'étendre la connaissance des relations métriques par la découverte de nouvelles équivalences, et prévoyant l'importance de l'aire du cercle comme terme de comparaison, il se procure cette donnée fondamentale au moyen d'une évaluation remarquable par sa prudence. Renonçant, pour l'instant, à la recherche de la quadrature exacte du cercle, c'est-à-dire de la construction d'un carré d'une surface rigoureusement égale à celle du cercle, il procède à une quadrature conditionnée en considérant le cercle comme équivalant à un triangle ayant pour hauteur le rayon R et pour base le périmètre p du cercle, dont il resserre la valeur entre les limites $3\frac{10}{71} \times 2\,R$ et $3\frac{1}{7} \times 2\,R$. Il est probable que cette évaluation du nombre π a été précédée chez Archimède de plusieurs autres, dont la tradition n'a pas gardé de traces, et qu'elle n'a pas été considérée par lui comme définitive. Il a peut-être espéré pouvoir réaliser un jour la quadrature exacte du cercle.

Telle qu'elle était, la valeur ainsi trouvée pour l'aire du cercle sert à Archimède de base, d'unité de mesure en quelque sorte, dans ses fameuses évaluations d'aires courbes comme les surfaces du cylindre et du cône de révolution et de la sphère. L'instrument dont Archimède se sert pour cette enquête est la méthode d'exhaustion d'Eudoxe perfectionnée par Archimède, qui joint à l'approximation « par défaut », au moyen de polygones inscrits dans une ligne courbe, à laquelle Eudoxe s'était borné, l'approximation « par excès », au moyen de polygones circonscrits à la ligne courbe.

Cette méthode d'exhaustion généralisée par Archimède, que Th. Heath et E. J. Dijksterhuis qualifient de « méthode de compression », lui sert aussi pour la démonstration de propositions ayant pour objet l'équivalence de certaines figures de l'espace. Toutes ces démonstrations portent la marque d'un génie subtil

et pénétrant. Mais Archimède considère la découverte d'équivalences entre des volumes limités par des surfaces courbes différentes, telles que la sphère et le cylindre, comme un exploit mathématique de moindre envergure que l'établissement d'équivalences entre des volumes limités par des surfaces courbes d'une part, et des volumes limités par des plans d'autre part ; cf. un passage de la lettre à Dosithée dans l'Introduction à *La méthode relative aux propositions mécaniques*.

L'ancienne méthode d'Eudoxe devient entre les mains d'Archimède un instrument d'une puissance et d'une souplesse telles qu'elle le conduit aux premières intégrations de l'histoire des mathématiques, dont une à l'occasion de la quadrature de la parabole, qui fait l'objet d'un de ses traités, et une autre pour l'évaluation de l'aire d'une courbe qu'il introduit lui-même en géométrie, de la spirale qui porte son nom.

Découvertes de mathématiques appliquées

Mais l'initiative la plus audacieuse d'Archimède fut l'application, dans ses traités de statique, du raisonnement mathématique à la matière et au mouvement. C'est par la nouvelle science ainsi créée, la mécanique rationnelle, qu'Archimède s'éloigne le plus résolument de l'esprit platonicien qui avait marqué la géométrie encore chez Euclide. Platon n'avait prêté une information mathématique à la matière qu'à l'échelle de l'imperceptible, au niveau des polyèdres molécules et des triangles atomes, et à celui des astres. A l'échelle humaine, dans le cadre de notre vie quotidienne, la matière défiait, selon lui, toute tentative d'exprimer en termes de géométrie les réalités dont elle était le support. Il proscrit de son école toute recherche d'une vérité mathématique par des procédés empiriques. Archimède, lui, ne présente aucune théorie sur la structure de la matière à l'échelle de l'imperceptible ; il interroge, en revanche, la réalité matérielle à l'échelle perceptible par des observations et des expériences pour vérifier ses intuitions, souvent

avant de les démontrer par le raisonnement théorique (cf. l'Introduction de *La quadrature de la parabole*).

Mode de publication

Archimède public ses travaux successivement, n'ayant en vue, dans chacun de ses traités, que l'enquête qui le préoccupe au moment de la rédaction, sans songer à systématiser son œuvre. Le « corpus » d'Archimède ne s'est constitué que longtemps après la mort du savant[1]. Son unique souci ayant été d'aller de l'avant, au-delà des frontières des connaissances mathématiques désormais assurées, sans chercher à intégrer ses découvertes dans un édifice géométrique déjà existant, ou à créer par lui, ses écrits, qui contiennent par suite de ce mode de travail un certain nombre de répétitions, sont comparables aux mémoires que les mathématiciens modernes adressent aux Académies des sciences pour faire connaître à un gremium savant les résultats de leurs recherches au gré de leur découverte. Le gremium compétent pour Archimède était constitué, comme nous l'avons vu à propos de la vie du Syracusain, par des géomètres qui travaillaient et enseignaient à Alexandrie.

Œuvres conservées. Langue et style

Voici la liste des traités d'Archimède conservés, d'après leur ordre chronologique probable, d'après E. J. Dijksterhuis et J. Itard[2].

De l'équilibre des figures planes, Ier livre.
La quadrature de la parabole.
De l'équilibre des figures planes, IIe livre.
De la sphère et du cylindre, livres I et II.
Des spirales.
Sur les conoïdes et les sphéroïdes.
Des corps flottants, livres I et II.
De la mesure du cercle.

1. Cf. Antonio Quaquarelli, *La fortuna di Archimede nei retori e negli autori cristiani antichi*, Messina, 1959, p. 45 sq.
2. *Archimède*, dans *Histoire générale des sciences*, Paris, 1962, t. I.

L'arénaire.
De la méthode.

La langue dans laquelle Archimède a rédigé son œuvre fut son dialecte natal, le dorien de Syracuse. Mais seuls les traités *De l'équilibre des figures planes*, *La quadrature de la parabole*, *Des spirales*, *Sur les conoïdes et les sphéroïdes* et *Des corps flottants* nous sont parvenus dans la langue originale ; les autres traités ont été transmis à la postérité dans une transcription du dorien original en grec commun. A part sa particularité dialectale, qui ne touche que la phonétique et la morphologie, la langue d'Archimède est, dans les grandes lignes, celle d'Euclide et des autres géomètres grecs. Cette communauté de la langue provient d'une part de ce que la terminologie et la syntaxe de la géométrie avaient été élaborées et fixées par des savants anciens dès avant Euclide, d'autre part de ce que le caractère du raisonnement géométrique, toujours impersonnel quelque nouvelle que fût la proposition à démontrer, prêtait peu à des variations de style d'un auteur à l'autre. La démonstration d'Archimède est articulée comme celle d'Euclide sauf que la réduction à l'absurde y est plus fréquente que chez Euclide grâce à la place qu'occupe chez Archimède la méthode de compression.

Œuvres entièrement ou partiellement perdues

Mais la tradition ne nous a conservé qu'une partie de l'œuvre d'Archimède. Parmi ses écrits entièrement perdus, citons un livre sur l'arithmétique, des travaux sur les cinq polyèdres réguliers et les treize polyèdres semi-réguliers découverts par lui, que nous connaissons par le résumé de Pappus d'Alexandrie, un traité sur la statique du levier et sur les centres de gravité. Des parties d'un traité d'optique d'Archimède ont été conservées dans les commentaires à l'*Almageste* de Ptolémée, comme l'a montré A. Rome[1]. D'un traité de géométrie élémen-

1. A. Rome, *Note sur les passages des Catoptriques d'Archimède*

taire attribué à Archimède et ayant pour objet certaines propriétés du cercle, nous possédons la version arabe de quinze théorèmes et la traduction latine de cette version sous le titre *Liber assumptorum.* M. Evangelos Stamatis a récemment reconstitué le texte original de ce fragment en dialecte dorien[1].

L'influence d'Archimède

On est étonné, à lire les traités d'Archimède, de constater que, malgré les impulsions qu'ils semblent promis à donner au développement des sciences mathématiques grâce aux germes du calcul intégral et aux fondements de la statique qu'ils contiennent, notre civilisation a dû attendre le XVIIe et le XVIIIe siècle pour voir apparaître des travaux continuant la pensée d'Archimède. Cité par Ptolémée, Héron, Pappus, Théon d'Alexandrie, Vitruve, commenté par Eutocius, admiré même par des auteurs du camp purement littéraire comme Apulée et Lactance et par des penseurs chrétiens comme Tertullien et saint Augustin[2], Archimède reste sans influence sur le sort des sciences mathématiques dans l'antiquité tardive. Le Moyen Age non plus ne connaît aucun successeur d'Archimède digne de ce nom, malgré la traduction, au XIIIe siècle, d'une grande partie de son œuvre par Guillaume de Moerbeke.

On ne saurait invoquer, pour expliquer cette inefficacité de l'exemple d'Archimède, un désintéressement général, à partir du IIe siècle avant J.-C., pour les sciences mathématiques, qui sont illustrées encore après Archimède par des géomètres de premier rang comme Apollonius de Perge, Ptolémée et Diophante et par plusieurs compilateurs, commentateurs et auteurs de monographies d'un certain talent. On ne saurait,

conservés par Théon d'Alexandrie, Annales de la Soc. scientif. de Bruxelles, série A, LXX, 1932, p. 30-41.

1. Cf. Bulletin de la Société mathématique de Grèce, 1965, p. 265-297.

2. Cf. A. Quaquarelli, *op. laud.*, p. 35 sq.

non plus, expliquer l'éclipse bimillénaire de la pensée d'Archimède par l'insuffisance du langage mathématique des Grecs pour l'expression de raisonnements s'inspirant des démonstrations d'Archimède et présentant le même degré d'abstraction et de complexité ni, comme corollaire, voir la cause de la réapparition d'une mathésis à la manière d'Archimède, au XVIIe siècle, dans la création du nouvel algorithme algébrique. Pascal a opposé au nouveau langage mathématique de Viète et de Descartes une fin de non recevoir, et il n'en a pas moins été un des premiers à se poser, à propos de la cycloïde, des problèmes analogues à ceux d'Archimède dans *La quadrature de la parabole* et dans le traité *Des spirales*, et à les résoudre par des méthodes semblables à celles d'Archimède. L'explication du manque d'audience d'Archimède à la fin de l'Antiquité et au Moyen Age est à chercher dans la nature de son œuvre. Tant par l'interrogation de la réalité physique par l'expérience, sur laquelle repose en grande partie sa statique, que par la variété de ses méthodes infinitésimales dans ses quadratures et ses recherches d'équivalences, Archimède a devancé son époque. Il ne pouvait être compris qu'à partir du moment où l'expérimentation, ayant enfin trouvé la place que les Grecs, à part quelques rares exceptions, dont Archimède, lui avaient refusée dans les sciences physiques, posait aux savants des problèmes du genre de ceux qu'Archimède avait anticipés. Il fut étudié alors avec intérêt — et parfois avec le regret de ne l'avoir pas connu plus tôt — entre autres par Fermat, Pascal, Newton et Leibniz.

L'étude d'Archimède est facilitée, à partir du milieu du XVIe siècle, par des éditions imprimées. L'*editio princeps* paraît à Bâle, en 1544, par les soins de Th. Gechauff dit Venatorius. A la même époque, Commandin publie des traductions latines de plusieurs traités. En 1792, on présente à Oxford une édition des textes grecs connus d'Archimède, avec le commentaire d'Eutocius, accompagnés d'une version latine. La

première édition critique d'Archimède, suivie du commentaire d'Eutocius, est réalisée en 1880 par le savant danois J. L. Heiberg. Elle est fondée sur tous les manuscrits accessibles à l'époque et accompagnée d'une étude de la filiation des manuscrits et d'une version latine.

Dans toutes les éditions grecques d'Archimède qui avaient paru jusqu'à la fin du XIXe siècle manquait le texte grec du traité *Des corps flottants*, qu'on ne connaissait qu'en traduction latine, ainsi que celui du traité *De la méthode*, dont seul le titre avait été cité par quelques auteurs anciens. La découverte de ces textes sur un palimpseste trouvé en 1899 parmi les manuscrits du Monastère du Saint-Sépulcre à Jérusalem décida Heiberg à faire une seconde édition critique de l'œuvre d'Archimède, de 1913 à 1915, et à y intégrer le nouveau texte, qu'il avait réussi à déchiffrer en 1906.

Le XXe siècle, enfin, rend justice au génie d'Archimède par une série de travaux comportant des traductions, des transcriptions en algorithme moderne et des commentaires. A côté des travaux que nous avons déjà mentionnés et des éditions dont il sera question à propos du texte, il convient de citer surtout trois présentations de l'œuvre conservée d'Archimède, comme exemples des différentes manières dont on peut aborder l'étude de la pensée du grand géomètre.

Dans son livre *Les œuvres complètes d'Archimède*, I, II, Paris 1960, Paul ver Eecke rend le texte grec sans abréviation et sans transpositions modernes et permet ainsi de se faire une idée très complète des procédés et de la manière d'Archimède. Ce travail constitue la première traduction française de toute l'œuvre conservée d'Archimède et du commentaire d'Eutocius, celle de F. Peyrard[1] étant nécessairement incomplète.

Sir Th. Heath, dans *The Works of Archimedes*,

1. *Œuvres d'Archimède traduites littéralement, avec un Commentaire*, Paris, 1807.

edited in modern notation with introductory chapters, Cambridge 1897 ; *Supplement* 1912, vise avant tout à dégager le raisonnement géométrique d'Archimède. Il renonce donc à suivre à la lettre les développements des démonstrations, nécessairement longs et laborieux avant l'invention de l'algorithme moderne, et se borne à rendre les démarches successives de la pensée d'Archimède au moyen de la terminologie, de la syntaxe et de l'algorithme des mathématiques modernes.

Le procédé de traduction adopté par E. J. Dijksterhuis, dans son *Archimedes*, déjà cité, Copenhague 1956, tient le milieu entre la méthode de P. ver Eecke et celle de Th. Heath. Il consiste à n'abréger que le détail du raisonnement et à conserver les démarches essentielles des démonstrations. L'auteur réussit ainsi à respecter les contingences historiques dans lesquelles a travaillé Archimède tout en ménageant la patience du lecteur habitué à un langage géométrique plus concis.

Dans la présente édition, nous nous placerons à un point de vue strictement historique, moins soucieux de faire connaître par la voie rapide de l'écriture mathématique moderne les résultats obtenus par Archimède que de présenter la manière dont Archimède les a obtenus. Nous laisserons donc la parole à Archimède dans un texte établi d'après les principaux manuscrits et où nous avons tenu largement compte des mises au point opérées dans les éditions successives grâce au travail patient et à la sagacité de plusieurs générations de savants, géomètres et philologues, et nous essayerons dans notre traduction de rendre le raisonnement, aussi exactement que possible, dans la terminologie d'Archimède, nous bornant à résumer le propos des traités en langage moderne dans les *Notices*. Pour le détail de la terminologie, nous renvoyons le lecteur à notre *Dictionnaire de la terminologie géométrique des Grecs* (Paris, 1959). Les notes du commentaire courant indiquent en principe les propositions du patrimoine géométrique connu et publié avant Archimède, aux-

quelles Archimède se réfère ou sur lesquelles il fonde ses déductions. Ce sont, essentiellement, les *Éléments* d'Euclide et des traités sur les coniques, perdus aujourd'hui, mais dont la substance réapparaît chez Apollonius de Perge.

III. Le texte

Les manuscrits sur lesquels repose notre texte ont une histoire mouvementée, tracée pour la première fois par Heiberg, dans les Prolégomènes du volume III de la seconde édition de l'œuvre d'Archimède et des Commentaires d'Eutocius.

Manuscrits grecs

Certains des traités, qu'Archimède avait envoyés un à un à ses collègues géomètres d'Alexandrie, à des intervalles de temps parfois assez longs, comme le montrent les lettres à Conon, Dosithée et Ératosthène placées à leur tête, apparaissent pour la première fois réunis dans un manuscrit du IXe siècle, le codex A (Heiberg)[1], composé à Constantinople sur l'initiative de Léon le mathématicien, nommé directeur de l'université de Byzance par Bardas en 863. On en retrouve des traces à l'époque des Normands et des Hohenstaufen ; après la bataille de Bénévent, en 1266, il est offert au pape par Charles d'Anjou, peut-être avec un autre manuscrit, le codex 𝔅, d'après la notation de Heiberg, qui contenait quelques traités d'Archimède, à côté d'autres travaux, sur la mécanique et l'optique. En 1491, le codex A est la propriété de l'humaniste italien G. Valla, qui le montre à Janus Lascaris. Valla meurt sans avoir réalisé l'édition qu'il semble avoir projetée ; mais un inventaire de ce temps montre que A contenait les traités *De la sphère et du cylindre*, *La mesure du cercle*, *Sur les conoïdes et*

1. Cf. Heiberg, III, p. LVIII. Il porte le n° 612 dans l'inventaire établi à Pérouse en 1311 (cf. R. Devreesse, *Le fonds grec de la Bibliothèque Vaticane*, Vatican, 1965, p. 3, n. 17).

les sphéroïdes, *Des spirales*, *De l'équilibre des figures planes*, *L'Arénaire*, *La quadrature de la parabole*, d'Archimède, les *Commentaires* d'Eutocius et le traité *Des mesures* de Héron d'Alexandrie. Acquis, après la mort de Valla, au prix de 800 pièces d'or par la famille des princes Pio, le codex A disparaît dans la seconde moitié du XVIe siècle[1] et n'a pas été retrouvé jusqu'à nos jours. Même Heiberg, grand chasseur de manuscrits, n'a pas réussi à en retrouver de traces.

Heureusement pour nous, le codex A a été copié ou traduit plusieurs fois, entièrement ou partiellement, avant sa disparition.

Le codex *Marcianus gr.* 305, classé E par Heiberg, est une copie de A faite, sur l'initiative du cardinal Bessarion, entre 1449 et 1468.

Le codex *Laurentianus* 28, 4, D chez Heiberg, a été établi d'après A sous la direction de l'humaniste florentin Ange Politian en 1491.

Le *Parisinus gr.* 2360, G chez Heiberg, et le *Parisinus gr.* 2361, H chez Heiberg, ont été copiés du temps où le codex A était chez les Pio.

Deux autres manuscrits de la Bibliothèque Nationale, les *Parisini gr.* 2359 et 2362, sigles F et J, sont eux aussi des copies de A datant du XVIe siècle, tout comme trois manuscrits de l'Escurial (R.I. 7, T.I. 5, T.I. 6, X.I. 14) et quelques autres, conservés dans diverses bibliothèques.

Le codex A ne contenant ni le traité *Des corps flottants*, connu par la traduction latine de G. de Moerbeke, dont il sera question plus bas, ni le traité *La méthode*, cité entre autres par Héron d'Alexandrie, la liste des manuscrits grecs d'Archimède était incomplète à la fin du XIXe siècle. Heiberg fit alors entrer dans l'histoire du texte d'Archimède son fameux codex C, un palimpseste du métochion constantinopolitain du Saint-Sépulcre de Jérusalem. En examinant

1. G. Mercati, *Codici latini Pico Grimani Pio...*, Vatican, 1938, p. 206, nº 12.

le manuscrit, en 1906 et en 1908, Heiberg trouva[1] qu'il contenait un texte d'Archimède copié au xe siècle auquel on avait superposé, quelques siècles plus tard, le texte d'un recueil de prières. Le déchiffrement du texte original fit apparaître des fragments des traités *De la sphère et du cylindre*, *Des spirales*, *La mesure du cercle*, *De l'équilibre des figures planes* et de l'opuscule Στομάχιον, mais surtout une partie importante du texte grec, manquant jusqu'à ce moment, du traité *Des corps flottants* et le texte du traité, encore totalement inconnu, *La méthode*.

On pense aujourd'hui[2] que le second manuscrit utilisé par G. de Moerbeke pour sa traduction latine, celui dans lequel il a trouvé le texte du traité *Des corps flottants*, absent dans A, fut le codex ℒ mentionné plus haut. Ce manuscrit, d'après Heiberg, aurait passé en Occident de la même manière que A. Il disparaît après 1311 sans laisser de traces. Mais grâce à l'exactitude littérale de la traduction de Moerbeke et par des comparaisons avec A, Heiberg a réussi à reconstituer les traits essentiels du texte grec de ℒ.

En ce qui concerne les opuscules d'Archimède ou attribués à Archimède, le Πρόβλημα βοεικόν, énigme arithmétique en distiques, est conservé dans le codex *Gudianus gr.* 77, fol. 415v, consulté par Heiberg lui-même, sigle G, et dans le *Parisinus gr.* 2448, xive siècle, sigle P, que Henri Lebègue s'était chargé d'examiner pour Heiberg. Nous réservons l'histoire de la découverte de ce texte pour la *Notice* correspondante du volume II de cette édition. Les fragments des travaux, attribués à Archimède, sur les polyèdres semi-réguliers, sur quelques problèmes mécaniques, sur les catoptriques, sur la construction de planétarium, etc., ont été conservés par des géomètres postérieurs à Archimède, en particulier par Pappus et Héron.

1. Cf. J. L. Heiberg, *Eine neue Archimedes-Handschrift*, Hermes, t. XLII, 1907, p. 235-303.
2. Cf. plus bas, *Manuscrits latins*, et Dijksterhuis, *op. laud.*, p. 38.

Manuscrits latins Parmi les traductions latines d'une grande partie du codex A, la plus ancienne est celle du dominicain Guillaume de Moerbeke, faite en 1269. Le manuscrit de ce travail, le codex *Ottobonianus latinus* 1850, sigle B, retrouvé à Rome en 1884, contient des versions très littérales des traités *Des spirales*, *De l'équilibre des figures planes*, *La quadrature de la parabole*, *La mesure du cercle*, *De la sphère et du cylindre*, *Sur les conoïdes et les sphéroïdes*, avec les *Commentaires* d'Eutocius, sauf celui du traité *La mesure du cercle*, une étude d'Alhazen sur les miroirs ardents, deux traités de Ptolémée et un traité anonyme *De ponderibus*. Mais le manuscrit contient, en plus des six traités d'Archimède cités, la traduction du traité *Des corps flottants*, dont le texte grec ne figure pas dans A. Heiberg en conclut que le traducteur avait accès à un autre manuscrit grec, qui n'est sans doute autre que le codex ℒ, comme nous venons de le rappeler[1].

Le manuscrit d'une autre traduction latine, faite en 1450 par Jacques de Crémone sur l'ordre du pape Nicolas V, n'a pas été conservé. Mais une copie de ce manuscrit, corrigée d'après le codex E, fut apportée en Allemagne autour de 1468 par Jean Regiomontanus et servit plus tard pour l'établissement de l'*editio princeps* de Bâle (1544).

De leur côté, les Arabes avaient traduit certains des traités d'Archimède. On a ainsi découvert récemment[2] deux versions latines d'une traduction arabe de *La mesure du cercle*, l'une pouvant être de la main de Platon de Tivoli (1re moitié du XIIe siècle), l'autre de Gérard de Crémone (1134-1187). Rappelons que l'écrit apocryphe *Liber assumptorum* est accessible, lui aussi, sous la forme de versions latines de manuscrits arabes de la bibliothèque de Florence.

1. Cf. Heiberg, III, p. LIV.
2. Cf. Dijksterhuis, *op. laud.*, p. 39, 40.

Editions

Les manuscrits grecs et latins que nous venons de passer en revue sont de qualités très différentes du point de vue de la lisibilité et de la correction dans la transcription du grec et du latin[1]. Mais on est étonné du petit nombre d'erreurs mathématiques qu'ils contiennent. Il est probable qu'on a confié dans les monastères la copie des traités d'Archimède à des scribes disposant d'une connaissance au moins élémentaire de la géométrie ancienne, à des moines ayant passé avec succès par le *quadrivium*, ou bien que leur travail a été contrôlé par des connaisseurs.

Les erreurs qui restaient, et qui concernent le plus souvent l'accord entre les figures et le texte, ont été progressivement éliminées grâce aux interventions des éditeurs qui se sont succédé, depuis la Renaissance, dans la publication de l'œuvre, entière ou partielle, d'Archimède.

Les premiers éditeurs, il est vrai, ne se souciaient encore que médiocrement de la correction mathématique du texte. Ainsi Luca Gaurico, dans son *Tetragonismus id est circuli quadratura per Campanum, Archimedem Syracusanum atque Boetium mathematicae perspicacissimos adinventa* (Venise, 1503), et Nicolo Tartaglia, dans *Opera Archimedis Syracusani Philosophi et Mathematici ingeniosissimi* (Venise, 1543), se contentent de faire imprimer, le premier le texte de *La mesure du cercle* et de *La quadrature de la parabole* du codex B, l'autre le texte du traité *De l'équilibre des figures planes* et du premier livre du traité *Des corps flottants*, avec la copie exacte du texte édité par Gaurico, en laissant subsister[2] les erreurs de B, malgré la protestation de Tartaglia de présenter une édition « multis erroribus emendata, expurgata, ac in luce posita ».

L'*editio princeps*, mentionnée plus haut, de l'œuvre d'Archimède, publiée par Thomas Gechauff Venatorius

1. Cf. les *Prolégomènes* de Heiberg, 2e éd., III, p. IX-XCVIII.
2. Cf. *ibid.*, p. LXIII et LXIV.

(Bâle, 1544) sous le titre *Archimedis Syracusani Philosophi ac Geometrae Excellentissimi Opera quae quidem extant, omnia... nunc primum et Graece et Latine edita...*, réalise un sérieux progrès en ce sens que Gechauff a consulté pour son texte, établi d'après A, le codex *Norimbergensis*, copie de la version latine de Jacques de Crémone transportée, comme nous l'avons vu, en Allemagne par Regiomontanus.

A partir du milieu du XVI[e] siècle, chaque nouvelle édition d'Archimède, soit en grec soit en traduction latine, apporte des corrections et des précisions au texte. Il en est ainsi de l'édition latine des traités *La mesure du cercle*, *Des spirales*, *La quadrature de la parabole*, *Sur les conoïdes et les sphéroïdes*, et *L'Arénaire*, procurée d'après le codex B par F. Commandino, sous le titre *Archimedis Opera non nulla nuper in latinum conversa* (Venise, 1558), des *Monumenta* de F. Maurolico (Palerme, 1570), contenant une traduction latine de toute l'œuvre connue d'Archimède, de l'édition latine de J. Barrow, *Opera Archimedis*, *Apollonii Pergaei conicorum libri*, *Theodosii sphaerica...* (Londres, 1675), des extraits publiés par J. Wallis, *Archimedis Syracusani Arenarius et Dimensio Circuli...* (Oxford, 1676), mais surtout des éditions de D. Rivault (Paris, 1615) et de J. Torelli (Oxford, 1792), dont la première, *Archimedis Opera quae extant novis demonstrationibus commentariisque illustrata*, présente les énoncés des théorèmes en grec et en latin, et les démonstrations en latin, alors que l'autre, *Archimedis quae supersunt omnia cum Eutocii Ascalonitae commentariis... cum nova versione latina*, donne pour la première fois l'œuvre entière d'Archimède en grec.

Même les traductions en des langues modernes ont contribué à dépister et à éliminer des erreurs dans la tradition du texte, en particulier, comme on le verra dans l'apparat critique, celle de E. Nizze, *Archimedes' von Syrakus vorhandene Werke aus dem Griechischen übersetzt und mit erläuternden und kritischen Anmer-*

kungen begleitet (Stralsund, 1824), précédée de celle de J. C. Sturm, *Des unvergleichlichen Archimedis Kunstbücher, übersetzt und erläutert* (Nuremberg, 1670), de celle de F. Peyrard, *Œuvres d'Archimède traduites littéralement, avec un Commentaire* (Paris, 1807), et de quelques traductions de traités particuliers d'Archimède.

En 1881 parut à Leipzig la magistrale édition de J. L. Heiberg en trois volumes, *Archimedis Opera cum commentariis Eutocii*, fondée à la fois sur les résultats acquis par le travail critique et exégétique de quatre siècles et sur l'expérience personnelle de l'auteur dans la tradition des textes et sa connaissance approfondie de la pensée d'Archimède. Après sa découverte du codex C, Heiberg fit paraître, de 1910 à 1915, sa seconde édition des œuvres d'Archimède, dans laquelle se trouvent réunis pour la première fois tous les traités actuellement connus du grand géomètre.

Les énoncés des propositions 23, 28, 36, 39 et 41 du Ier livre du traité *De la sphère et du cylindre*, qui manquent dans les manuscrits et, partant, dans les éditions, ont été reconstitués récemment par E. Stamatis. On trouvera les textes de Stamatis dans les *Notes complémentaires* à la fin de ce volume.

Les figures accompagnant le texte de cette édition sont celles des manuscrits corrigées par Heiberg, sauf la figure 13, qui présente les mêmes données géométriques que la figure 12, mais en dessin perspectif. Heiberg a condamné et mis entre crochets comme inauthentiques un certain nombre de développements, à cause de leur inutilité ou insignifiance mathématique, et il a renoncé à traduire ces passages. Partageant le jugement de Heiberg, nous maintenons ses athétèses, en traduisant toutefois les textes incriminés.

*
* *

En terminant cette introduction je tiens à exprimer ma très vive gratitude aux collègues et amis qui

m'ont aidé pendant mon travail, en particulier à M. Jean Irigoin, qui a bien voulu examiner pour moi un certain nombre de passages sur le *Parisinus gr.* 2359 (F), peu utilisé par Heiberg, à M. Delebecque, qui a accepté d'être mon reviseur et dont les conseils éclairés m'ont été d'un secours précieux, à M. Evangelos Stamatis, dont les savantes recherches sur Archimède m'ont permis d'améliorer et de compléter le texte en plusieurs endroits.

SIGLA

A	codex Vallae deperditus a quo fluxerunt DEGH.
B	Ottobonianus lat. 1850, autographus G. de Moerbeke, a. 1269.
C	Codex rescriptus Metochii Constantinopolitani S. Sepulchri monasterii Hierosolymitani 355, saec. X.
D	Laurentianus XXVIII 4, saec. XV.
E	Marcianus gr. 305, saec. XV.
G	Parisinus gr. 2360, saec. XVI.
H	Parisinus gr. 2361, a. 1544.

Basil.	Editio princeps, Basileae, 1544.
Rivaltus	Archimedis opera, Parisiis, 1615.
Barrowius	Opera Archimedis, Londini, 1675.
Wallis	Archimedis arenarius et dimensio circuli, Oxonii, 1678.
Torellius	Archimedis opera, Oxonii, 1792.
Nizzius	Nizze, Archimedes' vorhandene Werke, übersetzt und erklärt, Stralsund, 1824.
Heiberg	Archimedis opera omnia, editio altera, Lipsiae, 1910-1915.

DE LA SPHÈRE ET DU CYLINDRE

NOTICE

Dans la lettre à Dosithée placée en tête du premier livre de ce traité, Archimède annonce comme principaux résultats de son enquête les propositions que voici :

(1). L'aire de toute sphère est équivalente au quadruple de l'aire de son grand cercle (proposition I, 33).

(2). L'aire de tout segment de sphère est équivalente à l'aire d'un cercle dont le rayon est égal au segment de droite joignant le pôle du segment à un point quelconque de la circonférence limitant le segment (prop. I, 42, 43).

(3). Tout cylindre droit ayant pour base le grand cercle d'une sphère et pour hauteur le diamètre de la sphère a un volume égal aux trois demis du volume de la sphère et une surface totale équivalente aux trois demis de la surface de la sphère (prop. I, 34 et corollaire).

Qu'Archimède ait attaché une importance particulière à ces propriétés de la sphère, surtout à la dernière, nous en voyons la preuve dans une note de Plutarque (*Vie de Marcellus* XVII, 7) d'après laquelle le grand géomètre voulait que la figure d'une sphère inscrite dans un cylindre fût placée sur son monument funéraire, et c'est effectivement à ce signe que, 137 ans après la mort d'Archimède, Cicéron reconnut le tombeau oublié par les Syracusains (Cicéron, *Tusculanes* V, 23). Nous retrouverons une disposition analogue chez C. F. Gauss, dont le tombeau est orné, d'après sa volonté, de la figure du polygone régulier de 17 côtés, pour lequel il avait démontré la possibilité d'une construction au moyen de la règle et du compas.

Le premier livre est orienté vers la démonstration des propositions citées à travers une suite de théorèmes

par lesquels Archimède s'assure les antécédents de ses constructions logiques. Les théorèmes préalables et les démonstrations principales sont fondés, essentiellement, sur l'application de la méthode de passage à la limite, inaugurée par Eudoxe, mais perfectionnée par Archimède, dont le procédé conserve bien la double réduction à l'absurde d'Eudoxe, mais présente la figure curviligne à évaluer comme la limite commune, d'une part d'une suite de figures inscrites croissant indéfiniment en restant inférieures à une certaine limite, d'autre part d'une suite de figures circonscrites décroissant indéfiniment en restant supérieures à une certaine limite, alors qu'Eudoxe s'était borné à une seule suite.

Le traité *De la sphère et du cylindre* commence par l'énoncé d'un certain nombre de premiers principes sous les titres *Axiomes* (axiomata) et *Admissions* (lambanomena). Les *Axiomes* précisent la situation de certaines lignes courbes planes par rapport à une droite joignant leurs extrémités et de certaines surfaces courbes limitées par une courbe plane fermée, par rapport au plan de cette courbe ; ils définissent, de plus, les deux figures solides du secteur sphérique et du « rhombos » solide, c'est-à-dire de la figure résultant de la réunion, par leurs bases, de deux cônes circulaires droits. Les *Admissions* postulent la propriété « géodésique » de la droite. De toutes les manières de caractériser la ligne droite, ce postulat d'Archimède est la plus abstraite. Dans Euclide, cette ligne était apparue à la fois comme la figure d'équilibre d'un fil tendu, comme le lieu des points restant immobiles lors du mouvement d'un corps solide fixé par deux de ses points, et comme la trajectoire de la lumière, alors que le caractère géodésique s'y présentait comme une proposition démontrable[1]. Une propriété « géodésique » analogue, c'est-à-dire le minimum d'aire de toutes les surfaces

1. Cf. Ch. Mugler, *Sur l'histoire de quelques définitions de la géométrie grecque et les rapports entre la géométrie et l'optique*, L'Antiquité Classique, t. XXVI, 1957, p. 331-345.

limitées par la même ligne située dans un plan, est postulée aussi pour le plan.

Dans la dernière de ses Admissions, Archimède pose comme principe que, deux grandeurs inégales A et B étant données, il existe un nombre entier n tel que le produit n (A-B) dépasse toute grandeur C ayant un rapport avec A et B, où l'expression « avoir un rapport » est entendue dans le sens du principe d'Eudoxe de Cnide formulé dans les définitions 3 et 4 du Ve livre des *Éléments* d'Euclide. Ce postulat d'Archimède a été l'objet d'interprétations différentes. Entre la thèse implicite de certains traducteurs comme F. M. Mersenne et E. Nizze, d'après laquelle Archimède postule ici l'extension du principe d'Eudoxe, de deux grandeurs de même nature A et B, à leur différence A-B, et l'explication proposée par J. Hjelmslev[1], pour qui Archimède aurait visé des grandeurs A et B hétérogènes, A étant par exemple un segment de droite et B un arc de cercle, E. J. Dijksterhuis[2] a tranché le problème en faveur de la première. Les différences A-B envisagées par Archimède ne sont rien d'autre que les segments différentiels, les « Δx », avec lesquels opéraient les géomètres dans les procédés de découpage par lesquels ils cherchaient à obtenir des résultats provisoires dans l'évaluation de lignes, d'aires et de volumes. Autrement dit, dans la différence A-B le terme A signifie la grandeur à évaluer, le terme B signifie ce qui reste de A après en avoir « découpé » un segment de ligne « différentiel », une portion d'aire différentielle, une tranche de volume différentielle. La forme particulière de ce postulat

1. *Über Archimedes' Grössenlehre,* Copenhague 1950. La discussion philologique du texte d'Archimède, assez obscur, doit tenir compte non seulement de la fin de ce postulat, analysé par Dijksterhuis, mais aussi du commencement du morceau : les ἄνισοι γραμμαί, ἄνισοι ἐπιφάνειαι, ἄνισα στερεά sont des grandeurs inégales de même nature, des segments de droite de longueur inégale ou des arcs de cercle inégaux entre eux, des figures planes inégales entre elles ou des portions de surface sphérique d'aires inégales, etc.

2. *Op. laud.* p. 146-149.

d'Archimède et sa place à la tête de ce traité s'explique donc par l'intention de l'auteur de souligner l'opposition entre la méthode rigoureuse pratiquée ici, dans le traité *De la sphère et du cylindre*, où les éléments différentiels des décompositions précédant les passages à la limite conservent leur appartenance au continu particulier de la grandeur décomposée, où les segments différentiels des lignes restent des lignes, les portions différentielles des surfaces des surfaces, etc., et les procédés, dépourvus de rigueur apodictique, mais efficaces dans l'investigation mathématique préalable, dans lesquels les volumes sont considérés comme des sommes d'aires planes, les aires comme des sommes de lignes, les lignes comme des sommes de points. Pour Dijksterhuis, la mise au point d'Archimède vise avant tout les recherches personnelles du savant, opérées au moyen d'éléments ultimes ainsi envisagés. Mais elle est une critique aussi à l'adresse des géomètres antérieurs à Archimède qui avaient pratiqué cette méthode, de Démocrite en particulier. Nous savons depuis la découverte du traité *De la méthode* à quel point le Syracusain était familiarisé avec les travaux mathématiques du philosophe atomiste qui, au témoignage d'un des fragments conservés, se posait la question si on peut considérer le volume d'un cône comme la somme des plaques obtenues par des sections parallèles à la base, ces plaques se dérobant, dans l'esprit de Démocrite, à toute section ultérieure, à la manière des atomes physiques. Il est probable que les volumes de la pyramide et du cône, dont Archimède attribue la première évaluation à Démocrite (cf. la lettre à Ératosthène placée en tête du traité *De la méthode*), ont été trouvés par Démocrite au moyen de décompositions de ce genre. Mais Archimède distingue sévèrement entre la première évaluation et la démonstration rigoureuse et ne considère les propositions sur la pyramide et le cône comme fondées que depuis les travaux d'Eudoxe. Le postulat 5 du traité *De la sphère et du cylindre* est une mise en garde contre la validité logique de l'atomisme mathématique.

DE LA SPHÈRE ET DU CYLINDRE

Livre I

Archimède à Dosithée, joie !

Je t'ai envoyé précédemment, des propositions examinées par moi, la suivante, dont j'avais rédigé l'énoncé et la démonstration : tout segment limité par une droite et par une parabole[1] est équivalent aux quatre tiers du triangle ayant même base et même hauteur que le segment[2]. D'autres théorèmes importants m'étant venus à l'esprit dans la suite, j'en ai élaboré les démonstrations. Les voici : en premier lieu, la surface de toute sphère est équivalente au quadruple de son grand cercle[3] ; en second lieu, la surface de tout segment de sphère est équivalente au cercle, dont le rayon est égal au segment de droite mené du sommet du segment (sc. de la sphère) à (sc. un point de) la circonférence du cercle qui est la base du segment[4] ; de plus, pour toute sphère, le cylindre ayant une base égale au grand cercle de la sphère et une hauteur égale au diamètre de la sphère est lui-même équivalent aux trois demis de la sphère, et sa surface est équivalente aux trois demis de la surface de la sphère[5]. Ces propriétés préexistaient, liées à la nature des figures indiquées, mais elles étaient ignorées de ceux qui se sont occupés de géométrie avant nous, personne d'entre eux ne s'étant aperçu que les mesures de ces figures sont comparables ; je n'hésite donc pas à ranger ces proposi-

1. La parabole est désignée par Archimède par « section d'un cône rectangle » ; cf. l'explication de ce nom à la page 148.
2. Cette propriété est démontrée dans le traité *La quadrature de la parabole,* prop. 17 et 24.
3. Cf. *De la sphère et du cylindre* I, 30.
4. Cf. *ibid.* I, 39 et 40.
5. Cf. *ibid,* I, 34 ; coroll.

ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΑΣ ΚΑΙ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ

Α

Ἀρχιμήδης Δοσιθέῳ χαίρειν

Πρότερον μὲν ἀπέσταλκά σοι τῶν ὑφ' ἡμῶν τεθεωρημένων γράψας μετὰ ἀποδείξεως, ὅτι πᾶν τμῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπό τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς ἐπίτριτόν ἐστι τριγώνου τοῦ βάσιν τὴν αὐτὴν ἔχοντος τῷ τμήματι καὶ ὕψος ἴσον· ὕστερον δὲ ἡμῖν ὑποπεσόντων θεωρημάτων ἀξίων λόγου πεπραγματεύμεθα περὶ τὰς ἀποδείξεις αὐτῶν. Ἔστιν δὲ τάδε· πρῶτον μέν, ὅτι πάσης σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐστὶν τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν αὐτῇ· ἔπειτα δέ, ὅτι παντὸς τμήματος σφαίρας τῇ ἐπιφανείᾳ ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ εὐθείᾳ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἀγομένῃ ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος· πρὸς δὲ τούτοις, ὅτι πάσης σφαίρας ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας αὐτός τε ἡμιόλιός ἐστιν τῆς σφαίρας, καὶ ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. Ταῦτα δὲ τὰ συμπτώματα τῇ φύσει προυπῆρχεν περὶ τὰ εἰρημένα σχήματα, ἠγνοεῖτο δὲ ὑπὸ τῶν πρὸ ἡμῶν περὶ γεωμετρίαν ἀνεστραμμένων οὐδενὸς αὐτῶν ἐπινενοηκότος ὅτι τούτων τῶν σχημάτων ἐστὶν συμμετρία·

5 τριγώνου τοῦ βάσιν τὴν αὐτὴν C : trigoni habentis basem eandem B ταύτην τὴν βάσιν D τριγώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν τὴν αὐτὴν G || ἔχοντος CD : om. G || 7 αὐτῶν BC : αὐτά D om. G || 9 τῶν ἐν αὐτῇ BCG : om. D || 11 κύκλος BCG : κώνῳ D || 20 οὐδενὸς αὐτῶν ἐπινενοηκότος BC : ενοηκότος D νενοηκότος G.

tions parmi celles qui ont fait l'objet des recherches des autres géomètres et parmi celles, concernant les figures solides, qui ont été étudiées par Eudoxe et qui paraissent beaucoup plus importantes, à savoir le théorème que toute pyramide est la troisième partie du prisme ayant même base et même hauteur que la pyramide[1], et que tout cône est équivalent au tiers du cylindre ayant même base et même hauteur que le cône. Ces propriétés préexistaient bien, comme étant liées à la nature de ces figures ; mais bien qu'il y eût avant Eudoxe de nombreux géomètres de valeur, il arriva qu'elles fussent ignorées de tous et que personne ne s'en aperçût. Mais il sera possible à ceux qui en seront capables d'examiner mes propositions. Il eût, certes, fallu qu'elles fussent publiées encore du vivant de Conon ; car c'est surtout lui, à mon avis, qui eût été en mesure de les comprendre et de porter sur elles un jugement adéquat. Mais estimant indiqué de les communiquer à ceux qui ont l'expérience des mathématiques je t'envoie les démonstrations que j'en ai rédigées ; il sera loisible à ceux qui s'occupent des mathématiques de les examiner. Sois en bonne santé !

Voici donc d'abord le texte des définitions[2] et des postulats servant à la démonstration des propositions.

DÉFINITIONS

1. Il y a dans le plan des lignes courbes limitées, qui ou bien sont entièrement situées d'un même côté des droites joignant leurs extrémités ou bien n'ont aucune partie de l'autre côté.

2. J'appelle concave dans le même sens une ligne telle que, si on y prend deux points quelconques, les

1. Cf. Euclide XII, prop. 3 sq.

2. Le terme des manuscrits est ἀξιώματα, axiomes, mais les six paragraphes qui suivent contiennent les définitions des principales notions auxquelles Archimède fera appel dans les démonstrations de ce traité.

διόπερ οὐκ ἂν ὀκνήσαιμι ἀντιπαραβαλεῖν αὐτὰ πρός τε τὰ τοῖς ἄλλοις γεωμέτραις τεθεωρημένα καὶ πρὸς τὰ δόξαντα πολὺ ὑπερέχειν τῶν ὑπὸ Εὐδόξου περὶ τὰ στερεὰ θεωρηθέντων, ὅτι πᾶσα πυραμὶς τρίτον ἐστὶ μέρος πρίσματος τοῦ βάσιν ἔχοντος τὴν αὐτὴν τῇ πυραμίδι καὶ ὕψος ἴσον, καὶ ὅτι πᾶς κῶνος τρίτον μέρος ἐστὶν τοῦ κυλίνδρου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὴν αὐτὴν τῷ κώνῳ καὶ ὕψος ἴσον· καὶ γὰρ τούτων προυπαρχόντων φυσικῶς περὶ ταῦτα τὰ σχήματα, πολλῶν πρὸ Εὐδόξου γεγενημένων ἀξίων λόγου γεωμετρῶν συνέβαινεν ὑπὸ πάντων ἀγνοεῖσθαι μηδ' ὑφ' ἑνὸς κατανοηθῆναι. Ἐξέσται δὲ περὶ τούτων ἐπισκέψασθαι τοῖς δυνησομένοις. Ὤφειλε μὲν οὖν Κόνωνος ἔτι ζῶντος ἐκδίδοσθαι ταῦτα· τῆνον γὰρ ὑπολαμβάνομέν που μάλιστα ἂν δύνασθαι κατανοῆσαι ταῦτα καὶ τὴν ἁρμόζουσαν ὑπὲρ αὐτῶν ἀπόφασιν ποιήσασθαι· δοκιμάζοντες δὲ καλῶς ἔχειν μεταδιδόναι τοῖς οἰκείοις τῶν μαθημάτων ἀποστέλλομέν σοι τὰς ἀποδείξεις ἀναγράψαντες, ὑπὲρ ὧν ἐξέσται τοῖς περὶ τὰ μαθήματα ἀναστρεφομένοις ἐπισκέψασθαι. Ἐρρωμένως.

Γράφονται πρῶτον τά τε ἀξιώματα καὶ τὰ λαμβανόμενα εἰς τὰς ἀποδείξεις αὐτῶν.

ΑΞΙΩΜΑΤΑ

α'. Εἰσί τινες ἐν ἐπιπέδῳ καμπύλαι γραμμαὶ πεπερασμέναι, αἳ τῶν τὰ πέρατα ἐπιζευγνυουσῶν αὐτῶν εὐθειῶν ἤτοι ὅλαι ἐπὶ τὰ αὐτά εἰσιν ἢ οὐδὲν ἔχουσιν ἐπὶ τὰ ἕτερα.

β'. Ἐπὶ τὰ αὐτὰ δὴ κοίλην καλῶ τὴν τοιαύτην γραμμήν, ἐν ᾗ ἐὰν δύο σημείων λαμβανομένων ὁποιωνοῦν αἱ μεταξὺ

8 τούτων BCG : που τῶν D || 15 ἀπόφασιν BCD : ἀπόφανσιν G || 18 περὶ CEGH : etiam B τε D || 20 τά τε ἀξιώματα BCGH : τώ τε ἀξίωμα D τό τε ἀξίωμα E.

segments de droite compris entre ces points tombent, ou bien tous du même côté de la ligne, ou bien certains du même côté et certains sur la ligne, mais qu'aucun ne tombe de l'autre côté.

3. Il y a, de même, des surfaces limitées, non situées, elles-mêmes, dans un plan, mais ayant leurs limites dans un plan, qui ou bien sont entièrement situées du même côté du plan, dans lequel elles ont leurs limites, ou bien n'ont aucune partie de l'autre côté.

4. J'appelle concaves dans le même sens des surfaces telles que, si on y prend deux points, les segments de droite compris entre ces points tombent, ou bien tous du même côté de la surface, ou bien certains du même côté et certains sur la surface, mais qu'aucun ne tombe de l'autre côté.

5. J'appelle secteur solide, lorsqu'un cône ayant son sommet au centre d'une sphère coupe cette sphère, la figure comprise entre la surface du cône et la partie de la surface de la sphère qui est située à l'intérieur du cône.

6. J'appelle rhombe solide la figure composée de deux cônes ayant la même base et dont les sommets sont situés de part et d'autre du plan de la base de manière que leurs axes sont situés en ligne droite.

I. Postulats

J'admets ce qui suit :

1° De toutes les lignes ayant les mêmes extrémités la plus courte est la droite[1].

2° Quant aux autres lignes, elles sont inégales lorsque, situées dans un plan et ayant les mêmes extrémités,

1. Proclus cherche à établir un lien entre cette définition et celle d'Euclide, Elem. I, def. 4 ; cf. Proclus in Eucl. p. 110.

τῶν σημείων εὐθεῖαι ἤτοι πᾶσαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ πίπτουσιν τῆς γραμμῆς, ἢ τινὲς μὲν ἐπὶ τὰ αὐτά, τινὲς δὲ κατ' αὐτῆς, ἐπὶ τὰ ἕτερα δὲ μηδεμία.

γ'. Ὁμοίως δὲ καὶ ἐπιφάνειαί τινές εἰσιν πεπερασμέναι, αὐταὶ μὲν οὐκ ἐν ἐπιπέδῳ, τὰ δὲ πέρατα ἔχουσαι ἐν ἐπιπέδῳ, αἳ τοῦ ἐπιπέδου, ἐν ᾧ τὰ πέρατα ἔχουσιν, ἤτοι ὅλαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἔσονται ἢ οὐδὲν ἔχουσιν ἐπὶ τὰ ἕτερα.

δ'. Ἐπὶ τὰ αὐτὰ δὴ κοίλας καλῶ τὰς τοιαύτας ἐπιφανείας, ἐν αἷς ἂν δύο σημείων λαμβανομένων αἱ μεταξὺ τῶν σημείων εὐθεῖαι ἤτοι πᾶσαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ πίπτουσιν τῆς ἐπιφανείας, ἢ τινὲς μὲν ἐπὶ τὰ αὐτά, τινὲς δὲ κατ' αὐτῆς, ἐπὶ τὰ ἕτερα δὲ μηδεμία.

ε'. Τομέα δὲ στερεὸν καλῶ, ἐπειδὰν σφαῖραν κῶνος τέμνῃ κορυφὴν ἔχων πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς σφαίρας, τὸ ἐμπεριεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου καὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ἐντὸς τοῦ κώνου.

ϛ'. Ῥόμβον δὲ καλῶ στερεόν, ἐπειδὰν δύο κῶνοι τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντες τὰς κορυφὰς ἔχωσιν ἐφ' ἑκάτερα τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως, ὅπως οἱ ἄξονες αὐτῶν ἐπ' εὐθείας ὦσι κείμενοι, τὸ ἐξ ἀμφοῖν τοῖν κώνοιν συγκείμενον στερεὸν σχῆμα.

ΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΑ

Λαμβάνω δὲ ταῦτα·

α'. Τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν γραμμῶν ἐλαχίστην εἶναι τὴν εὐθεῖαν.

β'. Τῶν δὲ ἄλλων γραμμῶν, ἐὰν ἐν ἐπιπέδῳ οὖσαι τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχωσιν, ἀνίσους εἶναι τὰς τοιαύτας,

6 αἳ Heiberg : καὶ BCDEGH ‖ 7 ἔχουσιν D : habent B ἔχουσαι CEGH ‖ 14 τῷ κέντρῳ C : τὸ κέντρον DEGH. ‖ 24 τῶν C : τῷ τῶν DEGH ‖ 26 ἐὰν ἐν ἐπιπέδῳ οὖσαι τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχωσιν, ἀνίσους BDEGH : om. C.

elles tournent l'une et l'autre leur concavité du même côté et que l'une d'entre elles est ou bien entièrement comprise entre l'autre et la droite ayant les mêmes extrémités qu'elle, ou bien en partie comprise, d'autres parties lui étant communes avec l'autre ligne. La ligne comprise est la plus courte.

3° De la même manière, de toutes les surfaces ayant les mêmes extrémités, si ces extrémités sont situées dans un plan, la plus courte est le plan.

4° Quant aux autres surfaces ayant les mêmes extrémités, si ces extrémités sont situées dans un plan, deux d'entre elles sont inégales d'aire lorsqu'elles tournent l'une et l'autre leur concavité du même côté et que l'une est ou bien entièrement comprise entre l'autre et le plan ayant mêmes extrémités qu'elle, ou bien en partie comprise, d'autres parties lui étant communes avec l'autre surface. La surface comprise a l'aire la plus petite.

5° De plus, parmi les lignes inégales, les surfaces inégales, les corps solides inégaux, le plus grand dépasse le plus petit d'une grandeur telle que, ajoutée à elle-même (sc. un nombre suffisant de fois), elle peut dépasser toute grandeur donnée ayant un rapport avec les grandeurs comparées entre elles[1].

Ces principes posés, si un polygone est inscrit dans un cercle, il est évident que le périmètre du polygone inscrit est plus court que la circonférence du cercle, car chacun des côtés du polygone est plus court que l'arc du cercle découpé par lui.

1. Cf. Eucl. V, def. 4.

ἐπειδὰν ὦσιν ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι, καὶ ἤτοι ὅλη περιλαμβάνηται ἡ ἑτέρα αὐτῶν ὑπὸ τῆς ἑτέρας καὶ τῆς εὐθείας τῆς τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης αὐτῇ, ἢ τινὰ μὲν περιλαμβάνηται, τινὰ δὲ κοινὰ ἔχῃ, καὶ ἐλάσσονα εἶναι τὴν περιλαμβανομένην.

γ'. Ὁμοίως δὲ καὶ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν, ἐὰν ἐν ἐπιπέδῳ τὰ πέρατα ἔχωσιν, ἐλάσσονα εἶναι τὴν ἐπίπεδον.

δ'. Τῶν δὲ ἄλλων ἐπιφανειῶν καὶ τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν, ἐὰν ἐν ἐπιπέδῳ τὰ πέρατα ᾖ, ἀνίσους εἶναι τὰς τοιαύτας, ἐπειδὰν ὦσιν ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι, καὶ ἤτοι ὅλη περιλαμβάνηται ὑπὸ τῆς ἑτέρας ἡ ἑτέρα ἐπιφάνεια καὶ τῆς ἐπιπέδου τῆς τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης αὐτῇ, ἢ τινὰ μὲν περιλαμβάνηται, τινὰ δὲ κοινὰ ἔχῃ, καὶ ἐλάσσονα εἶναι τὴν περιλαμβανομένην.

ε'. Ἔτι δὲ τῶν ἀνίσων γραμμῶν καὶ τῶν ἀνίσων ἐπιφανειῶν καὶ τῶν ἀνίσων στερεῶν τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος ὑπερέχειν τοιούτῳ, ὃ συντιθέμενον αὐτὸ ἑαυτῷ δυνατόν ἐστιν ὑπερέχειν παντὸς τοῦ προτεθέντος τῶν πρὸς ἄλληλα λεγομένων.

Τούτων δὲ ὑποκειμένων, ἐὰν εἰς κύκλον πολύγωνον ἐγγραφῇ, φανερὸν ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ ἐγγραφέντος πολυγώνου ἐλάσσων ἐστὶν τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας· ἑκάστη γὰρ τῶν τοῦ πολυγώνου πλευρῶν ἐλάσσων ἐστὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας τῆς ὑπὸ τῆς αὐτῆς ἀποτεμνομένης.

9 *καὶ* CDEGH : om. B ‖ 10 *ἀνίσους* C : *ἀνίσας* DEGH ‖ 13 *ἡ* add. Heiberg ‖ 18 *ἑαυτῷ* BDEGH : *αὐτῷ* C ‖ 25 *τῆς αὐτῆς* CDEGH : ipso B.

1.

Si on circonscrit un polygone à un cercle, le périmètre du polygone circonscrit est plus grand que le pourtour du cercle.

Circonscrivons à un cercle le polygone marqué sur la figure. Je dis que le périmètre du polygone est plus grand que le pourtour du cercle[1].

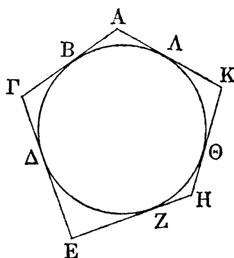


Fig. 1.

Puisque, en effet, la somme des segments de droite $BA+A\Lambda$ est plus grande que l'arc de cercle $B\Lambda$, du fait que la ligne brisée $BA\Lambda$ a mêmes extrémités que cet arc et comprend ce dernier, que de même $\Delta\Gamma+\Gamma B>\overset{\frown}{\Delta B}$, $\Lambda K+K\Theta>\overset{\frown}{\Lambda\Theta}$, $ZH+H\Theta>\overset{\frown}{Z\Theta}$ et, finalement, $\Delta E+EZ>\overset{\frown}{\Delta Z}$, tout le périmètre du polygone est supérieur à la périphérie du cercle.

2.

Deux grandeurs inégales étant données, il est possible de trouver deux segments de droite inégaux de manière que le plus grand segment ait au plus petit un rapport

1. Cette proposition est citée par Pappus, Coll. I, p. 312, éd. F. Hultsch.

α′.

Ἐὰν περὶ κύκλον πολύγωνον περιγραφῇ, ἡ τοῦ περιγραφέντος πολυγώνου περίμετρος μείζων ἐστὶν τῆς περιμέτρου τοῦ κύκλου.

Περὶ γὰρ κύκλον πολύγωνον περιγεγράφθω τὸ ὑποκείμενον. Λέγω ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου μείζων ἐστὶν τῆς περιμέτρου τοῦ κύκλου.

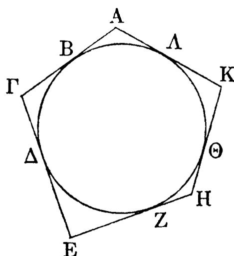


Fig. 1.

Ἐπεὶ γὰρ συναμφότερος ἡ ΒΑΛ μείζων ἐστὶ τῆς ΒΛ περιφερείας διὰ τὸ τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαν περιλαμβάνειν τὴν περιφέρειαν, ὁμοίως δὲ καὶ συναμφότερος μὲν ἡ ΔΓ, ΓΒ τῆς ΔΒ, συναμφότερος δὲ ἡ ΛΚ, ΚΘ τῆς ΛΘ, συναμφότερος δὲ ἡ ΖΗΘ τῆς ΖΘ, ἔτι δὲ συναμφότερος ἡ ΔΕ, ΕΖ τῆς ΔΖ, ὅλη ἄρα ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου μείζων ἐστὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου.

β′.

Δύο μεγεθῶν ἀνίσων δοθέντων δυνατόν ἐστιν εὑρεῖν δύο εὐθείας ἀνίσους, ὥστε τὴν μείζονα εὐθεῖαν πρὸς τὴν

inférieur à celui qu'a la plus grande des deux grandeurs à la plus petite.

Soit deux grandeurs inégales AB et Δ, et soit AB la plus grande. Je dis qu'il est possible de trouver deux segments de droite inégaux satisfaisant aux conditions demandées.

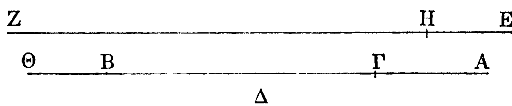


Fig. 2.

Donnons-nous, d'après la proposition 2 du premier livre des *Éléments* d'Euclide[1], une grandeur BΓ égale à Δ et un segment de droite ZH. La grandeur ΓA ajoutée à elle-même dépassera[2] donc la grandeur Δ. Qu'elle soit donc multipliée, et que HE soit contenu autant de fois dans ZH que AΓ est contenu dans AΘ ; ΘA est donc à AΓ comme[3] ZH est à HE, et, inversement[4], EH est à HZ comme AΓ est à AΘ. Et comme AΘ est supérieur à Δ, c'est-à-dire à ΓB, le rapport de ΓA à AΘ est inférieur au rapport de ΓA à ΓB. Mais ΓA est à AΘ comme EH à HZ ; le rapport de EH à HZ est donc inférieur au rapport de ΓA à ΓB ; par composition, le rapport de EZ à ZH est donc inférieur[5] au rapport de AB à BΓ. Or BΓ est égal à Δ ; le rapport de EZ à ZH est donc inférieur au rapport de AB à Δ.

Nous avons donc trouvé deux segments de droite

1. Dans son commentaire au premier livre des *Éléments* d'Euclide, Proclus relève cette mention d'Euclide faite par Archimède.

2. D'après le postulat 5 d'Archimède.

3. Cf. Euclide V, 15.

4. Cf. Euclide V, 7, corollaire.

5. Cf. Euclide V, 18 ; la proposition sera démontrée aussi par Pappus, II, p. 686.

ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἐλάσσονα ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον.

Ἔστω δύο μεγέθη ἄνισα τὰ ΑΒ, Δ, καὶ ἔστω μεῖζον τὸ ΑΒ. Λέγω ὅτι δυνατόν ἐστι δύο εὐθείας ἀνίσους εὑρεῖν τὸ εἰρημένον ἐπίταγμα ποιούσας.

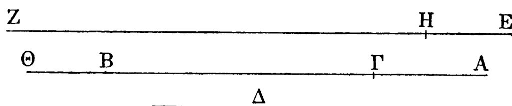


Fig. 2.

Κείσθω διὰ τὸ β′ τοῦ α′ τῶν Εὐκλείδου τῷ Δ ἴσον τὸ ΒΓ, καὶ κείσθω τις εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ΖΗ · τὸ δὴ ΓΑ ἑαυτῷ ἐπισυντιθέμενον ὑπερέξει τοῦ Δ. Πεπολλαπλασιάσθω οὖν, καὶ ἔστω τὸ ΑΘ, καὶ ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ ΑΘ τοῦ ΑΓ, τοσαυταπλάσιος ἔστω ἡ ΖΗ τῆς ΗΕ · ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ΘΑ πρὸς ΑΓ, οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς ΗΕ · καὶ ἀνάπαλίν ἐστιν, ὡς ἡ ΕΗ πρὸς ΗΖ, οὕτως τὸ ΑΓ πρὸς ΑΘ. Καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστιν τὸ ΑΘ τοῦ Δ, τουτέστι τοῦ ΓΒ, τὸ ἄρα ΓΑ πρὸς τὸ ΑΘ λόγον ἐλάσσονα ἔχει ἤπερ τὸ ΓΑ πρὸς ΓΒ. Ἀλλ' ὡς τὸ ΓΑ πρὸς ΑΘ, οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς ΗΖ · ἡ ΕΗ ἄρα πρὸς ΗΖ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΓΑ πρὸς ΓΒ · καὶ συνθέντι ἡ ΕΖ [ἄρα] πρὸς ΖΗ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΑΒ πρὸς ΒΓ [διὰ λῆμμα]. Ἴσον δὲ τὸ ΒΓ τῷ Δ · ἡ ΕΖ ἄρα πρὸς ΖΗ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΑΒ πρὸς τὸ Δ.

Εὑρημέναι εἰσὶν ἄρα δύο εὐθεῖαι ἄνισοι ποιοῦσαι τὸ

1 ἢ τὸ μεῖζον BDEGH : ἤτοι μείζων C || 3 ἔστω BC : ὥστε DEGH || μεῖζον DEGH : μείζων C || 4 τὸ C : τὰ DEGH || 6 τὸ DEGH : το(ῦ) C || 7 ZH mss. CDEH : ZE ms. G || 10 HE ms. B : ZE mss. CDEGH || 11 ἡ G : τὸ CDEGH || HE mss. BC : ZE mss. DEGH || 12 EH mss. BDEGH : HE ms. C || 14-16 ἀλλ' — ΓΒ ms. C : om. BDEGH.

inégaux donnant la solution du problème indiqué qui demandait que le plus grand de ces segments eût au plus petit un rapport inférieur à celui de la plus grande des deux grandeurs données à la plus petite.

3.

Étant donnés deux grandeurs inégales et un cercle, il est possible d'inscrire dans le cercle un polygone et de lui en circonscrire un autre de manière que le côté du polygone circonscrit ait au côté du polygone inscrit un rapport inférieur à celui de la plus grande des deux grandeurs à la plus petite.

Soient A et B les deux grandeurs données, le cercle donné étant celui de la figure. Je dis donc qu'il est possible de trouver ce qui est demandé.

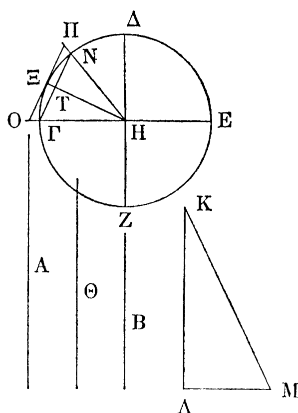


Fig. 3.

Qu'on trouve, en effet, les deux segments de droite Θ et ΚΛ, Θ étant le plus grand, tels que le rapport de Θ à ΚΛ soit inférieur à celui de la plus grande des deux

εἰρημένον ἐπίταγμα [τουτέστιν τὴν μείζονα πρὸς τὴν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἐλάσσονα ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον].

γ'.

Δύο μεγεθῶν ἀνίσων δοθέντων καὶ κύκλου δυνατόν ἐστιν εἰς τὸν κύκλον πολύγωνον ἐγγράψαι καὶ ἄλλο περιγράψαι, ὅπως ἡ τοῦ περιγραφομένου πολυγώνου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ ἐγγραφομένου πολυγώνου πλευρὰν ἐλάσσονα λόγον ἔχῃ ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλαττον.

Ἔστω τὰ δοθέντα δύο μεγέθη τὰ Α, Β, ὁ δὲ δοθεὶς κύκλος ὁ ὑποκείμενος. Λέγω οὖν ὅτι δυνατόν ἐστι ποιεῖν τὸ ἐπίταγμα.

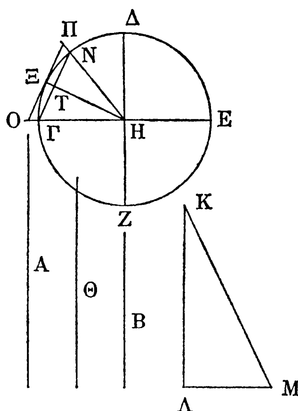


Fig. 3.

Εὑρήσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι αἱ Θ, ΚΛ, ὧν μείζων ἔστω ἡ Θ, ὥστε τὴν Θ πρὸς τὴν ΚΛ ἐλάσσονα λόγον

1 εἰρημένον C : ἴσον BDEGH ‖ 14 ὥστε τὴν Θ add. Basil.

grandeurs à la plus petite[1], élevons au point Λ la perpendiculaire ΛM à ΛK, menons de K le segment de droite KM égal à Θ, ce qui est possible, et traçons dans le cercle les deux diamètres ΓE et ΛZ perpendiculaires l'un à l'autre. En bissectant l'angle ΔHΓ, en bissectant la moitié de cet angle et en continuant ces opérations, nous finirons par trouver un angle inférieur au double de l'angle ΛKM. Qu'il nous reste ainsi l'angle NHΓ ; joignons NΓ ; NΓ est donc le côté d'un polygone régulier[2], du moment que l'angle NHΓ mesure l'angle ΔHΓ, qui est droit, et l'arc NΓ mesure par conséquent l'arc ΓΔ qui est le quart de la circonférence ; il mesure donc aussi la circonférence. NΓ est donc le côté d'un polygone régulier de toute évidence. Bissectons l'angle ΓHN par la droite HΞ, menons en Ξ la tangente OΞΠ au cercle et menons les droites HNΠ et HΓO ; ainsi le segment de droite ΠO est à son tour le côté d'un polygone régulier, circonscrit au cercle, dont il est évident qu'il est, de plus, semblable au polygone inscrit de côté NΓ. Or l'angle NHΓ étant inférieur au double de l'angle ΛKM et égal au double de l'angle THΓ, il s'ensuit que THΓ $<$ ΛKM. Les angles de sommets Λ et T étant droits, le rapport de MK à ΛK est supérieur au rapport de ΓH à HT. Or ΓH est égal à HΞ ; il s'ensuit que le rapport de ΞH à HT, c'est-à-dire[3] de ΠO à NΓ, est inférieur au rapport de MK à KΛ ; de plus, le rapport de MK à KΛ est inférieur[4] au rapport de la grandeur A à la grandeur B. ΠO est le côté du polygone

1. Cette construction fait l'objet de la proposition 2.

2. Le texte dit « d'un polygone équilatéral » ; d'après Eutocius, Archimède avait écrit « d'un polygone équilatéral d'un nombre pair de côtés ».

3. Dans le triangle ΞOH, on a en effet $\frac{H\Xi}{HT} = \frac{O\Xi}{\Gamma T} = \frac{2O\Xi}{2\Gamma T} = \frac{\Pi O}{N\Gamma}$. D'après Heiberg, Archimède aurait placé les mots τουτέστιν ἡ ΠO πρὸς NΓ de l. 3 entre HT et ἐλάσσονα λόγον.

4. On a en effet $\frac{\Theta}{K\Lambda} < \frac{A}{B}$ par hypothèse, et $\Theta = KM$ par construction.

ἔχειν ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλαττον, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Λ τῇ ΛΚ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΛΜ, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ τῇ Θ ἴση κατήχθω ἡ ΚΜ [δυνατὸν γὰρ τοῦτο], καὶ ἤχθωσαν τοῦ κύκλου δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΓΕ, ΔΖ. Τέμνοντες οὖν τὴν ὑπὸ τῶν ΔΗΓ γωνίαν δίχα καὶ τὴν ἡμίσειαν αὐτῆς δίχα καὶ αἰεὶ τοῦτο ποιοῦντες λείψομέν τινα γωνίαν ἐλάσσονα ἢ διπλασίαν τῆς ὑπὸ ΛΚΜ. Λελείφθω καὶ ἔστω ἡ ὑπὸ ΝΗΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΝΓ· ἡ ἄρα ΝΓ πολυγώνου ἐστὶ πλευρὰ ἰσοπλεύρου [ἐπείπερ ἡ ὑπὸ ΝΗΓ γωνία μετρεῖ τὴν ὑπὸ ΔΗΓ ὀρθὴν οὖσαν, καὶ ἡ ΝΓ ἄρα περιφέρεια μετρεῖ τὴν ΓΔ τέταρτον οὖσαν κύκλου· ὥστε καὶ τὸν κύκλον μετρεῖ. Πολυγώνου ἄρα ἐστὶ πλευρὰ ἰσοπλεύρου· φανερὸν γάρ ἐστι τοῦτο]. Καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ ΓΗΝ γωνία δίχα τῇ ΗΞ εὐθείᾳ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ξ ἐφαπτέσθω τοῦ κύκλου ἡ ΟΞΠ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ΗΝΠ, ΗΓΟ· ὥστε καὶ ἡ ΠΟ πολυγώνου ἐστὶ πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸν κύκλον καὶ ἰσοπλεύρου [φανερὸν ὅτι καὶ ὁμοίου τῷ ἐγγραφομένῳ, οὗ πλευρὰ ἡ ΝΓ]. Ἐπεὶ δὲ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλασία ἡ ὑπὸ ΝΗΓ τῆς ὑπὸ ΛΚΜ, διπλασία δὲ τῆς ὑπὸ ΤΗΓ, ἐλάσσων ἄρα ἡ ὑπὸ ΤΗΓ τῆς ὑπὸ ΛΚΜ. Καί εἰσιν ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς Λ, Τ· ἡ ἄρα ΜΚ πρὸς ΛΚ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΗ πρὸς ΗΤ. Ἴση δὲ ἡ ΓΗ τῇ ΗΞ· ὥστε ἡ ΗΞ πρὸς ΗΤ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, τουτέστιν ἡ ΠΟ πρὸς ΝΓ, ἤπερ ἡ ΜΚ πρὸς ΚΛ· ἔτι δὲ ἡ ΜΚ πρὸς ΚΛ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Α πρὸς τὸ Β. Καί ἐστιν ἡ μὲν ΠΟ πλευρὰ τοῦ

4 ΓΕ ms. B : ΓΒ mss. DEGH ‖ 14 ΗΞ mss. BG : ΝΞ mss. DEH ‖ 19 ΝΓ mss. BG : ΗΝΓ mss. DEH.

circonscrit, ΓN le côté du polygone inscrit, ce qui fait la solution du problème posé.

4.

Étant donnés, de nouveau, deux grandeurs inégales et un secteur de cercle, il est possible de circonscrire au secteur un polygone et de lui en inscrire un autre de façon que le rapport qu'a le côté du polygone circonscrit au côté du polygone inscrit soit inférieur au rapport de la plus grande des deux grandeurs à la plus petite.

Soient, de nouveau, deux grandeurs inégales E et Z, la plus grande étant E, et un cercle ABΓ de centre Δ ; construisons du côté de Δ le secteur AΔB ; il faut circonscrire et inscrire au secteur ABΔ un polygone ayant ses côtés égaux sauf BΔ et AΔ de manière que ce qui est demandé soit réalisé.

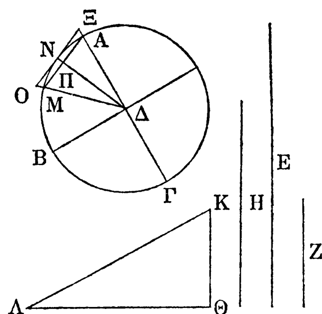


Fig. 4.

Qu'on trouve, en effet, deux segments de droite inégaux H, ΘK, le plus grand étant H, de manière que le rapport de H à ΘK soit inférieur au rapport de la plus grande des deux grandeurs à la plus petite, ce qui est possible. Élevons, comme ci-dessus, en Θ la perpendiculaire à KΘ et joignons K à un point Λ de cette perpendiculaire de manière que KΛ = H, ce

περιγραφομένου πολυγώνου, ἡ δὲ ΓΝ τοῦ ἐγγραφομένου· ὅπερ προέκειτο εὑρεῖν.

δ′.

Πάλιν δύο μεγεθῶν ἀνίσων ὄντων καὶ τομέως δυνατόν ἐστι περὶ τὸν τομέα πολύγωνον περιγράψαι καὶ ἄλλο ἐγγράψαι, ὥστε τὴν τοῦ περιγεγραμμένου πλευρὰν πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου πλευρὰν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον.

Ἔστω γὰρ πάλιν δύο μεγέθη ἄνισα τὰ Ε, Ζ, ὧν μεῖζον ἔστω τὸ Ε, κύκλος δέ τις ὁ ΑΒΓ κέντρον ἔχων τὸ Δ, καὶ πρὸς τῷ Δ τομεὺς συνεστάτω ὁ ΑΔΒ· δεῖ δὴ περιγράψαι καὶ ἐγγράψαι πολύγωνον περὶ τὸν ΑΒΔ τομέα ἴσας ἔχον τὰς πλευρὰς χωρὶς τῶν ΒΔΑ, ὅπως γένηται τὸ ἐπίταγμα.

Fig. 4.

Εὑρήσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι αἱ Η, ΘΚ ἄνισοι καὶ μείζων ἡ Η, ὥστε τὴν Η πρὸς τὴν ΘΚ ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον [δυνατὸν γὰρ τοῦτο], καὶ ἀπὸ τοῦ Θ ὁμοίως ἀχθείσης πρὸς ὀρθὰς τῇ ΚΘ προσβεβλήσθω τῇ Η ἴση ἡ ΚΛ [δυνατ . γάρ, ἐπεὶ

qui est possible du fait que $H > \Theta K$. En bissectant l'angle AΔB, en bissectant la moitié de AΔB et en continuant ces opérations, nous finirons par trouver un angle inférieur au double de l'angle ΛKΘ. Soit AΔM cet angle ; le segment de droite AM devient ainsi le côté d'un polygone inscrit dans le cercle. Et si nous bissectons l'angle AΔM par ΔN et que en N nous menions la tangente au cercle, soit NΞO, le segment ΞO sera le côté du polygone circonscrit au même cercle et semblable au polygone inscrit ; et comme dans ce qui a été dit plus haut, le rapport de ΞO à AM est inférieur au rapport de la grandeur E à la grandeur Z.

5.

Étant donnés un cercle et deux grandeurs inégales, circonscrire au cercle un polygone et lui en inscrire un autre, de manière que le rapport du polygone circonscrit au polygone inscrit soit inférieur au rapport de la plus grande des grandeurs à la plus petite.

Soient donnés le cercle A et les deux grandeurs inégales E et Z, E étant la plus grande ; il faut inscrire au cercle un polygone et lui en circonscrire un autre de manière à réaliser ce qui est demandé.

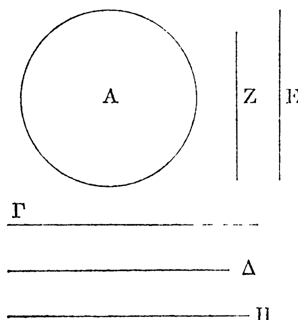


Fig 5.

μείζων ἐστὶν ἡ Η τῆς ΘΚ]. Τεμνομένης δὴ τῆς ὑπὸ τῶν ΑΔΒ γωνίας δίχα καὶ τῆς ἡμισείας δίχα καὶ ἀεὶ τούτου γινομένου λειφθήσεταί τις γωνία ἐλάσσων οὖσα ἢ διπλασία τῆς ὑπὸ ΛΚΘ. Λελείφθω οὖν ἡ ὑπὸ ΑΔΜ· ἡ ΑΜ οὖν γίνεται πολυγώνου πλευρὰ ἐγγραφομένου εἰς τὸν κύκλον. Καὶ ἐὰν τέμωμεν τὴν ὑπὸ ΑΔΜ γωνίαν δίχα τῇ ΔΝ καὶ ἀπὸ τοῦ Ν ἀγάγωμεν ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου τὴν ΝΞΟ, αὕτη πλευρὰ ἔσται τοῦ πολυγώνου τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸν αὐτὸν κύκλον ὁμοίου τῷ εἰρημένῳ· καὶ ὁμοίως τοῖς προειρημένοις ἡ ΞΟ πρὸς τὴν ΑΜ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Ε μέγεθος πρὸς τὸ Ζ.

ε′.

Κύκλου δοθέντος καὶ δύο μεγεθῶν ἀνίσων περιγράψαι περὶ τὸν κύκλον πολύγωνον καὶ ἄλλο ἐγγράψαι ὥστε τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον.

Ἐκκείσθω κύκλος ὁ Α καὶ δύο μεγέθη ἄνισα τὰ Ε, Ζ, καὶ μεῖζον τὸ Ε· δεῖ οὖν πολύγωνον ἐγγράψαι εἰς τὸν κύκλον καὶ ἄλλο περιγράψαι, ἵνα γένηται τὸ ἐπιταχθέν.

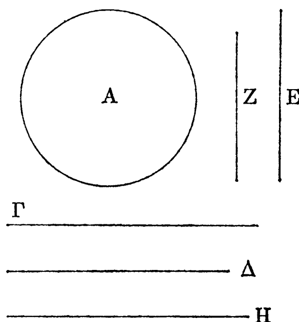


Fig. 5.

1 ἐστὶν H : ἐστὶ DEG || 7 ΝΞΟ mss. DEGH : x n o ms. B.

Je prends deux segments de droite inégaux Γ et Δ, le plus grand étant Γ, de manière que le rapport de Γ à Δ soit inférieur au rapport de la grandeur E à la grandeur Z ; la moyenne proportionnelle entre Γ et Δ étant prise, soit H, on a aussi $\Gamma > H$. Circonscrivons donc au cercle un polygone et inscrivons-y un autre polygone, de manière que le rapport qu'a le côté du polygone circonscrit au côté du polygone inscrit soit inférieur au rapport de Γ à H, opération que nous avons appris à faire ; le carré du premier rapport est alors lui aussi inférieur au carré du second rapport. Or le rapport des carrés des côtés de deux polygones est égal à celui des aires de ces polygones[1], puisqu'ils sont semblables ; et le carré du rapport des segments Γ et H est égal au rapport[2] de Γ à Δ ; le rapport du polygone circonscrit au polygone inscrit est donc inférieur au rapport de Γ à Δ ; à plus forte raison le rapport du polygone circonscrit au polygone inscrit est inférieur[3] au rapport de E à Z.

6.

Nous démontrerons de la même manière que, deux grandeurs inégales et un secteur de cercle étant donnés, il est possible de circonscrire au secteur un polygone et d'y inscrire un autre, semblable au premier, de manière que le rapport du polygone circonscrit au polygone inscrit soit inférieur au rapport de la plus grande des deux grandeurs à la plus petite.

Il est évident aussi que, étant donnés un cercle ou un secteur de cercle et une aire, il est possible, en inscrivant dans le cercle ou dans le secteur des polygones

1. D'après Eucl. VI, 20.

2. De $\frac{\Gamma}{H} = \frac{H}{\Delta}$ on déduit $\frac{\Gamma^2}{H^2} = \frac{H^2}{\Delta^2}$; or $H^2 = \Gamma \cdot \Delta$; donc $\frac{\Gamma^2}{H^2} = \frac{\Gamma \cdot \Delta}{\Delta^2} = \frac{\Gamma}{\Delta}$; cf. Eucl. V, def. 9.

3. Puisque $\frac{\Gamma}{\Delta} < \frac{E}{Z}$.

Λαμβάνω γὰρ δύο εὐθείας ἀνίσους τὰς Γ, Δ, ὧν μείζων ἔστω ἡ Γ, ὥστε τὴν Γ πρὸς τὴν Δ ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἢ τὴν Ε πρὸς τὴν Ζ· καὶ τῶν Γ, Δ μέσης ἀνάλογον ληφθείσης τῆς Η μείζων ἄρα καὶ ἡ Γ τῆς Η. Περιγεγράφθω δὴ περὶ κύκλον πολύγωνον καὶ ἄλλο ἐγγεγράφθω, ὥστε τὴν τοῦ περιγραφέντος πολυγώνου πλευρὰν πρὸς τὴν τοῦ ἐγγραφέντος ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἢ τὴν Γ πρὸς τὴν Η [καθὼς ἐμάθομεν]· διὰ τοῦτο δὴ καὶ ὁ διπλάσιος λόγος τοῦ διπλασίου ἐλάσσων ἐστί. Καὶ τοῦ μὲν τῆς πλευρᾶς πρὸς τὴν πλευρὰν διπλάσιός ἐστι ὁ τοῦ πολυγώνου πρὸς τὸ πολύγωνον [ὅμοια γάρ], τῆς δὲ Γ πρὸς τὴν Η ὁ τῆς Γ πρὸς τὴν Δ· καὶ τὸ περιγραφὲν ἄρα πολύγωνον πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Γ πρὸς τὴν Δ· πολλῷ ἄρα τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ.

ϛ′.

Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι δύο μεγεθῶν ἀνίσων δοθέντων καὶ τομέως δυνατόν ἐστιν περὶ τὸν τομέα πολύγωνον περιγράψαι καὶ ἄλλο ἐγγράψαι ὅμοιον αὐτῷ, ἵνα τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχῃ ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον.

Φανερὸν δὲ καὶ τοῦτο ὅτι, ἐὰν δοθῇ κύκλος ἢ τομεὺς καὶ χωρίον τι, δυνατόν ἐστιν ἐγγράφοντα εἰς τὸν κύκλον

équilatéraux et en continuant ces opérations dans les segments qui restent, de laisser comme reste des segments du cercle ou du secteur qui seront inférieurs à l'aire proposée ; ces propriétés sont en effet transmises dans les *Éléments*[1].

Or il faut montrer que, un cercle ou un secteur de cercle et une aire étant donnés, il est possible de circonscrire un polygone au cercle ou au secteur de manière que les segments restants de la circonscription, cette fois, soient inférieurs à l'aire donnée ; il suffira de faire la démonstration pour le cercle et d'appliquer un raisonnement semblable au secteur.

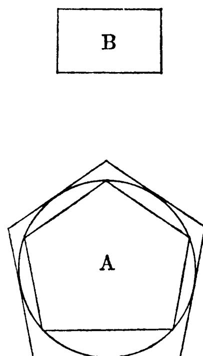


Fig. 6.

Soient donnés le cercle A et une aire B. Il est possible ainsi de circonscrire au cercle un polygone de manière que les segments laissés comme reste entre le cercle et le polygone soient inférieurs à l'aire B ; étant données, en effet, deux grandeurs inégales, la plus grande étant la somme de l'aire et du cercle, la plus petite étant le cercle, circonscrivons au cercle un polygone et inscrivons-y un autre de manière que le rapport du polygone circonscrit au polygone inscrit soit inférieur au rapport de la plus grande grandeur mentionnée à la

1. Elem. XII, 2 ; cf. Elem. X, 1.

ἢ τὸν τομέα πολύγωνα ἰσόπλευρα καὶ ἔτι ἀεὶ εἰς τὰ περιλειπόμενα τμήματα λείπειν τινὰ τμήματα τοῦ κύκλου ἢ τομέως, ἅπερ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ προκειμένου χωρίου· ταῦτα γὰρ ἐν τῇ Στοιχειώσει παραδέδοται.

Δεικτέον δὲ ὅτι καὶ κύκλου δοθέντος ἢ τομέως καὶ χωρίου δυνατόν ἐστι περιγράψαι πολύγωνον περὶ τὸν κύκλον ἢ τὸν τομέα, ὥστε τὰ περιλειπόμενα τῆς περιγραφῆς τμήματα ἐλάσσονα εἶναι τοῦ δοθέντος χωρίου· ἔσται γὰρ ἐπὶ κύκλου δείξαντα μεταγαγεῖν τὸν ὅμοιον λόγον καὶ ἐπὶ τοῦ τομέως.

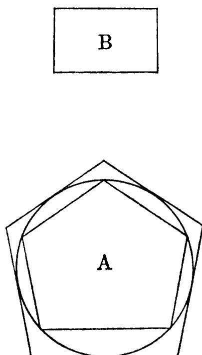


Fig. 6.

Δεδόσθω κύκλος ὁ A καὶ χωρίον τι τὸ B. Δυνατὸν δὴ περιγράψαι περὶ τὸν κύκλον πολύγωνον, ὥστε τὰ ἀπολειφθέντα τμήματα μεταξὺ τοῦ κύκλου καὶ τοῦ πολυγώνου ἐλάσσοναι εἶναι τοῦ B χωρίου· καὶ γὰρ ὄντων δύο μεγεθῶν ἀνίσων, μείζονος μὲν συναμφοτέρου τοῦ τε χωρίου καὶ τοῦ κύκλου, ἐλάσσονος δὲ τοῦ κύκλου, περιγεγράφθω περὶ τὸν κύκλον πολύγωνον καὶ ἄλλο ἐγγεγράφθω, ὥστε τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν

9 ἔσται Heiberg : ἔστω BDEGH.

plus petite[1]. C'est alors ce polygone circonscrit qui sera tel que les segments laissés en reste soient inférieurs à l'aire donnée B.

Car si le rapport du polygone circonscrit au polygone inscrit est inférieur au rapport qu'a la somme du cercle et de l'aire B au cercle, et que le cercle est plus grand que le polygone inscrit, le rapport du polygone circonscrit au cercle est à plus forte raison inférieur au rapport de la somme du cercle et de l'aire B au cercle, et ainsi par soustraction les segments de reste dans le polygone circonscrit ont au cercle un rapport inférieur au rapport de l'aire B au cercle ; il s'ensuit que les segments de reste dans le polygone circonscrit sont inférieurs[2] à l'aire B. Autre démonstration : du moment que le rapport du polygone circonscrit au cercle est inférieur au rapport de la somme du cercle et de l'aire B au cercle, le polygone circonscrit sera inférieur à cette somme[3] ; par conséquent la somme des segments de reste sera à son tour inférieure à l'aire B.

Même raisonnement sur le secteur de cercle.

7.

Si on inscrit dans un cône isoscèle une pyramide ayant une base équilatérale, sa surface sans la base est équivalente à un triangle ayant une base égale au périmètre de la base de la pyramide et pour hauteur la perpendiculaire abaissée du sommet sur un des côtés de la base.

Soit un cône isoscèle ayant pour base le cercle ΑΒΓ ; inscrivons-y une pyramide ayant une base équilatérale, soit ΑΒΓ ; je dis que sa surface sans la base est équivalente au triangle indiqué.

1. Ce problème est traité dans la proposition 5.
2. Cf. Eucl. V, 10.
3. Cf. les notes complémentaires à la fin de ce volume.

ἢ τὸ εἰρημένον μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον. Τοῦτο δὴ τὸ περιγραφόμενον πολύγωνόν ἐστιν, οὗ τὰ περιλείμματα ἔσται ἐλάσσονα τοῦ προτεθέντος χωρίου τοῦ Β.

Εἰ γὰρ τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ τὸ συναμφότερον ὅ τε κύκλος καὶ τὸ Β χωρίον πρὸς αὐτὸν τὸν κύκλον, τοῦ δὲ ἐγγραφομένου μείζων ὁ κύκλος, πολλῷ μᾶλλον τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸν κύκλον ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ τὸ συναμφότερον ὅ τε κύκλος καὶ τὸ Β χωρίον πρὸς αὐτὸν τὸν κύκλον· καὶ διελόντι ἄρα τα ἀπολείμματα τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πρὸς τὸν κύκλον ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Β χωρίον πρὸς τὸν κύκλον· ἐλάσσονα ἄρα τὰ ἀπολείμματα τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου τοῦ Β χωρίου. Ἢ οὕτως· ἐπεὶ τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸν κύκλον ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ τὸ συναμφότερον ὅ τε κύκλος καὶ τὸ Β χωρίον πρὸς τὸν κύκλον, διὰ τοῦτο δὴ ἔλασσον ἔσται τὸ περιγραφὲν συναμφοτέρου· ὥστε καὶ ὅλα τὰ περιλείμματα ἐλάσσονα ἔσται τοῦ χωρίου τοῦ Β.

Ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ τοῦ τομέως.

ζ′.

Ἐὰν ἐν ἰσοσκελεῖ κώνῳ πυραμὶς ἐγγραφῇ ἰσόπλευρον ἔχουσα βάσιν, ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς χωρὶς τῆς βάσεως ἴση ἐστὶ τριγώνῳ βάσιν μὲν ἔχοντι ἴσην τῇ περιμέτρῳ τῆς βάσεως, ὕψος δὲ τὴν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ μίαν πλευρὰν τῆς βάσεως κάθετον ἀγομένην.

Ἔστω κῶνος ἰσοσκελής, οὗ βάσις ὁ ΑΒΓ κύκλος, καὶ εἰς αὐτὸν ἐγγεγράφθω πυραμὶς ἰσόπλευρον ἔχουσα βάσιν τὸ ΑΒΓ· λέγω ὅτι ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς χωρὶς τῆς βάσεως ἴση ἐστὶ τῷ εἰρημένῳ τριγώνῳ.

2 περιλείμματα EH : περιλίμματα DG ‖ 10 ἀπολείμματα E : ἀπολίμματα DGH ‖ 17 περιλείμματα F : περιλίμματα DEGH ‖ 19 ἐπὶ add. Heiberg ‖ 23 τὸ Β : τῷ DEGH.

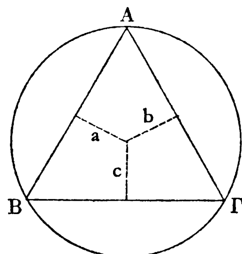


Fig. 7.

Du moment, en effet, que le cône est isoscèle et la base de la pyramide équilatérale, les hauteurs des triangles formant les faces de la pyramide sont égales entre elles. Les bases de ces triangles sont AB, BΓ, ΓA, la hauteur étant le segment indiqué ; la somme de ces triangles est donc équivalente à un triangle ayant une base égale à la somme de AB, BΓ, ΓA et comme hauteur le segment indiqué[1], et cette somme constitue la surface de la pyramide sans le triangle ABΓ.

Autre démonstration, plus rigoureuse.

Soit un cône isoscèle ayant pour base le cercle ABΓ et pour sommet le point Δ ; inscrivons dans le cône une pyramide ayant pour base le triangle équilatéral ABΓ et traçons les lignes ΔA, ΔΓ, ΔB ; je dis que les triangles AΔB, AΔΓ, BΔΓ ont une somme équivalente à un triangle, dont la base est égale au périmètre du triangle ABΓ et la hauteur, abaissée du sommet sur la base, égale à la perpendiculaire abaissée du point Δ au segment BΓ.

Abaissons en effet les perpendiculaires ΔK, ΔΛ, ΔM ; ces perpendiculaires sont donc égales entre elles. Donnons-nous un triangle EZH ayant sa base EZ égale au périmètre du triangle ABΓ et sa hau-

1. Cf. Eucl. VI, 1.

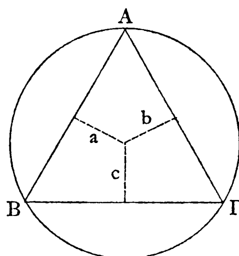


Fig. 7.

Ἐπεὶ γὰρ ἰσοσκελὴς ὁ κῶνος, καὶ ἰσόπλευρος ἡ βάσις τῆς πυραμίδος, τὰ ὕψη τῶν περιεχόντων τριγώνων τὴν πυραμίδα ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις. Καὶ βάσιν μὲν ἔχει τὰ τρίγωνα τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, ὕψος δὲ τὸ εἰρημένον · ὥστε τὰ τρίγωνα ἴσα ἐστὶ τριγώνῳ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἴσην ταῖς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, ὕψος δὲ τὴν εἰρημένην εὐθεῖαν [τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τοῦ ΑΒΓ τριγώνου].

[Σαφέστερον ἄλλως ἡ δεῖξις.

Ἔστω κῶνος ἰσοσκελής, οὗ βάσις μὲν ὁ ΑΒΓ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν κῶνον πυραμὶς βάσιν [μὲν] ἔχουσα ἰσόπλευρον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΑ, ΔΓ, ΔΒ · λέγω ὅτι τὰ ΑΔΒ, ΑΔΓ, ΒΔΓ τρίγωνα ἴσα ἐστὶ τριγώνῳ, οὗ ἡ μὲν βάσις ἴση ἐστὶ τῇ περιμέτρῳ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, ἡ δὲ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἴση τῇ καθέτῳ τῇ ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὴν ΒΓ ἀγομένῃ.

Ἤχθωσαν γὰρ κάθετοι αἱ ΔΚ, ΔΛ, ΔΜ · αὗται ἄρα ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Καὶ κείσθω τρίγωνον τὸ ΕΖΗ ἔχον τὴν μὲν ΕΖ βάσιν τῇ περιμέτρῳ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἴσην, τὴν δὲ

9 ἔστω BG : ὥστε DEH || 11 μὲν del. Heiberg || 13 ΑΔΓ ms. B : ΒΔΓ mss. DEGH om. C || 16 ἀγομένῃ Heiberg : ἀγομένην CDEGH.

teur HΘ égale à ΔΛ. Du moment donc que le produit de BΓ et ΔΛ est le double[1] de l'aire du triangle

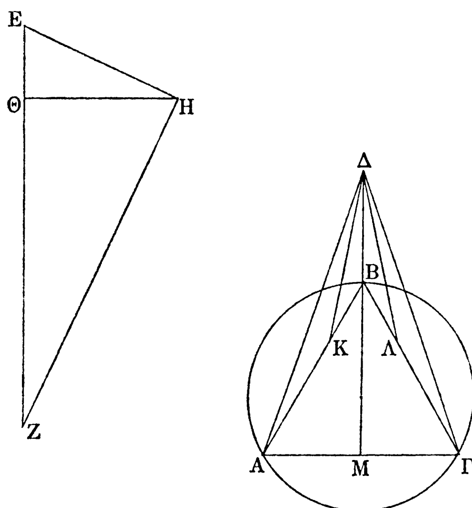


Fig. 8.

ΔBΓ, que le produit de AB et ΔK est le double du triangle ABΔ, que le produit de AΓ et ΔM est le double du triangle AΔΓ, le produit du périmètre du triangle ABΓ, c'est-à-dire du segment EZ, par ΔΛ, c'est-à-dire par HΘ, est le double de la somme des triangles AΔB, BΔΓ, AΔΓ. Mais le produit de EZ par HΘ est aussi égal au double du triangle EZH ; il s'ensuit que le triangle EZH est égal à la somme des triangles AΔB, BΔΓ, AΔΓ.

8.

Si une pyramide est circonscrite à un cône isoscèle, la surface de la pyramide sans la base est équivalente à un triangle ayant une base égale au périmètre de la

1. D'après Eucl. I, 41.

ΗΘ κάθετον τῇ ΔΛ ἴσην. Ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΔΛ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΔΒΓ τριγώνου, ἔστιν δὲ καὶ τὸ μὲν

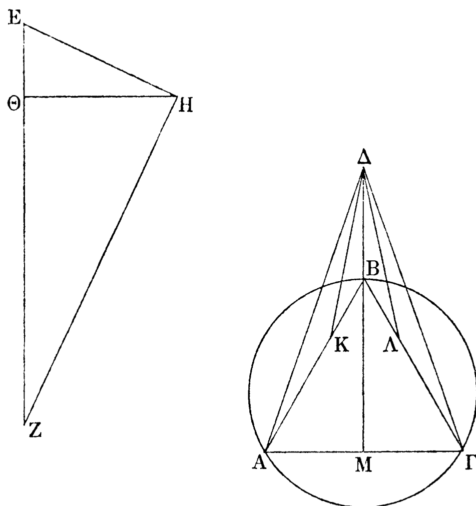


Fig. 8.

ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΔΚ διπλάσιον τοῦ ΑΒΔ τριγώνου, τὸ δὲ ὑπὸ ΑΓ, ΔΜ διπλάσιον τοῦ ΑΔΓ τριγώνου, τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς περιμέτρου τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, τουτέστι τῆς ΕΖ, καὶ τῆς ΔΛ, τουτέστι τῆς ΗΘ, διπλάσιόν ἐστι τῶν ΑΔΒ, ΒΔΓ, ΑΔΓ τριγώνων. Ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ ΕΖ, ΗΘ διπλάσιον τοῦ ΕΖΗ τριγώνου· ἴσον ἄρα τὸ ΕΖΗ τρίγωνον τοῖς ΑΔΒ, ΒΔΓ, ΑΔΓ τριγώνοις].

η'.

Ἐὰν περὶ κῶνον ἰσοσκελῆ πυραμὶς περιγραφῇ, ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τῆς βάσεως ἴση ἐστὶν

5 ΑΒΓ ms. B : ΑΔΓ mss. CDEGH.

base de la pyramide et comme hauteur la génératrice du cône.

Soit un cône ayant pour base le cercle ΑΒΓ ; circonscrivons à ce cône une pyramide de manière que la base de cette pyramide, c'est-à-dire le polygone ΔΕΖ, soit circonscrit au cercle ΑΒΓ ; je dis que la surface de la pyramide sans la base est équivalente au triangle indiqué.

Du moment, en effet, que l'axe du cône est perpendiculaire à la base, c'est-à-dire au cercle ΑΒΓ, et que les droites joignant le centre du cercle aux points de contact sont perpendiculaires aux tangentes[1], les droites joignant le sommet du cône aux points de contact seront à leur tour perpendiculaires[2] aux segments de droite ΔΕ, ΖΕ, ΖΔ. Les perpendiculaires indiquées, ΗΑ, ΗΒ, ΗΓ sont donc égales entre elles,

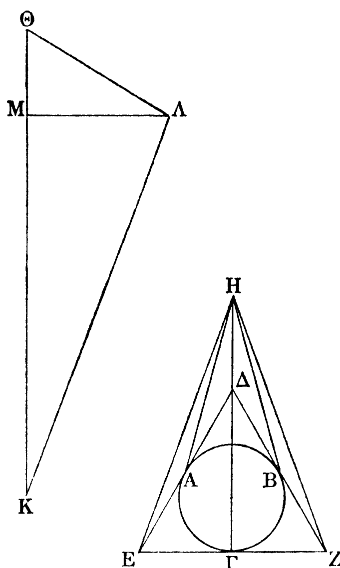


Fig. 9.

1. D'après Eucl. III, 18.
2. Cf. les notes complémentaires à la fin de ce volume.

τριγώνῳ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἴσην τῇ περιμέτρῳ τῆς βάσεως, ὕψος δὲ τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου.

Ἔστω κῶνος, οὗ βάσις ὁ ΑΒΓ κύκλος, καὶ πυραμὶς περιγεγράφθω, ὥστε τὴν βάσιν αὐτῆς, τουτέστι τὸ ΔΕΖ πολύγωνον, περιγεγραμμένον περὶ τὸν ΑΒΓ κύκλον εἶναι· λέγω ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τῆς βάσεως ἴση ἐστὶ τῷ εἰρημένῳ τριγώνῳ.

Ἐπεὶ γὰρ [ὁ ἄξων τοῦ κώνου ὀρθός ἐστι πρὸς τὴν βάσιν, τουτέστι πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον, καὶ] αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐπὶ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι κάθετοί εἰσιν ἐπὶ τὰς ἐφαπτομένας, ἔσονται ἄρα καὶ αἱ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου ἐπὶ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύμεναι κάθετοι ἐπὶ τὰς ΔΕ, ΖΕ, ΖΔ. Αἱ ΗΑ, ΗΒ, ΗΓ ἄρα αἱ εἰρη-

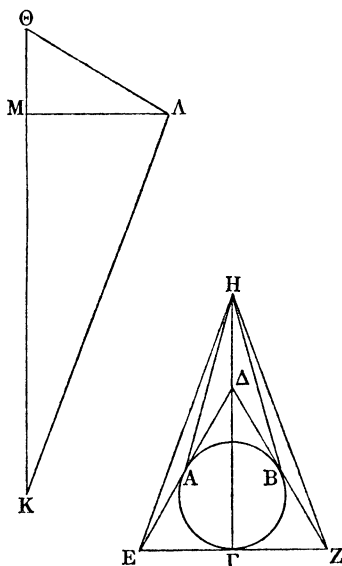


Fig. 9.

8 τοῦ C : αὐτοῦ BDEGH.

comme étant des génératrices du cône. Donnons-nous dès lors le triangle ΘΚΛ ayant son côté ΘΚ égal au périmètre du triangle ΔΕΖ et le côté ΛΜ égal à ΗΑ. Puisque donc le produit de ΔΕ par ΑΗ est égal au double[1] du triangle ΕΔΗ, le produit de ΔΖ par ΗΒ égal au double du triangle ΔΖΗ, et le produit de ΕΖ par ΓΗ égal au double du triangle ΕΗΖ, le produit de ΘΚ par ΑΗ, c'est-à-dire par ΜΛ, est égal au double de la somme des triangles ΕΔΗ, ΖΔΗ, ΕΗΖ. Or le produit de ΘΚ par ΛΜ est aussi égal au double du triangle ΛΚΘ ; la surface de la pyramide sans la base est, par conséquent, équivalente à un triangle ayant pour base un segment égal au périmètre du polygone ΔΕΖ et pour hauteur la génératrice du cône.

9.

Si un segment de droite est intercepté par le cercle de base d'un cône isoscèle et que des extrémités de ce segment on mène des droites au sommet du cône, le triangle compris entre le segment de droite intercepté et les droites menées au sommet est inférieur à la portion de surface du cône comprise entre les droites menées au sommet.

Soit le cercle ΑΒΓ la base d'un cône isoscèle et Δ le sommet ; menons à travers le cercle la droite ΑΓ et joignons le sommet aux points Α, Γ par les droites ΑΔ, ΔΓ ; je dis que le triangle ΑΔΓ est inférieur à la surface conique comprise entre ΑΔ et ΔΓ[2].

1. D'après Eucl. I, 41.
2. Plus exactement : comprise entre ΑΔ, ΔΓ et l'arc de cercle ΑΓ. Il est probable, comme l'a montré Heiberg, que le texte original d'Archimède contenait ce supplément de précision.

μέναι κάθετοι ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις· πλευραὶ γάρ εἰσιν τοῦ κώνου. Κείσθω δὴ τὸ τρίγωνον τὸ ΘΚΛ ἴσην ἔχον τὴν μὲν ΘΚ τῇ περιμέτρῳ τοῦ ΔΕΖ τριγώνου, τὴν δὲ ΛΜ κάθετον ἴσην τῇ ΗΑ. Ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ὑπὸ ΔΕ, ΑΗ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΕΔΗ τριγώνου, τὸ δὲ ὑπὸ ΔΖ, ΗΒ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΔΖΗ τριγώνου, τὸ δὲ ὑπὸ ΕΖ, ΓΗ διπλάσιόν ἐστιν τοῦ ΕΗΖ τριγώνου, ἔστιν ἄρα τὸ ὑπὸ τῆς ΘΚ καὶ τῆς ΑΗ› τουτέστι τῆς ΜΛ, διπλάσιον τῶν ΕΔΗ, ΖΔΗ, ΕΗΖ τριγώνων. Ἔστιν δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΘΚ, ΛΜ διπλάσιον τοῦ ΛΚΘ τριγώνου· διὰ τοῦτο δὴ ἴση ἐστὶν ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τῆς βάσεως τριγώνῳ βάσιν μὲν ἔχοντι ἴσην τῇ περιμέτρῳ τοῦ ΔΕΖ, ὕψος δὲ τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου.

θ′.

Ἐὰν κώνου τινὸς ἰσοπλεύρου εἰς τὸν κύκλον, ὅς ἐστι βάσις τοῦ κώνου, εὐθεῖα γραμμὴ ἐμπέσῃ, ἀπὸ δὲ τῶν περάτων αὐτῆς εὐθεῖαι γραμμαὶ ἀχθῶσιν ἐπὶ τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου, τὸ περιληφθὲν τρίγωνον ὑπό τε τῆς ἐμπεσούσης καὶ τῶν ἐπιζευχθεισῶν ἐπὶ τὴν κορυφὴν ἔλασσον ἔσται τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου τῆς μεταξὺ τῶν ἐπὶ τὴν κορυφὴν ἐπιζευχθεισῶν.

Ἔστω κώνου ἰσοσκελοῦς βάσις ὁ ΑΒΓ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Δ, καὶ διήχθω τις εἰς αὐτὸν εὐθεῖα ἡ ΑΓ, καὶ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὰ Α, Γ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΔΓ· λέγω ὅτι τὸ ΑΔΓ τρίγωνον ἔλασσόν ἐστιν τῆς ἐπιφανείας τῆς κωνικῆς τῆς μεταξὺ τῶν ΑΔΓ.

4 ΑΗ ms. C : h a ms. B ΑΝ mss. DEGH ‖ 5 ΕΔΗ ms. B : ΕΔΝ mss. DEGH ‖ 7 ΕΗΖ ms. B : ΕΝΖ mss. DEGH ‖ 8-9 τριγώνων DEGH : τρίγωνον C ‖ 18 ἐμπεσούσης BC : ἐκπεσούσης DEGH ‖ 20 τῆς DEGH : τὴν C.

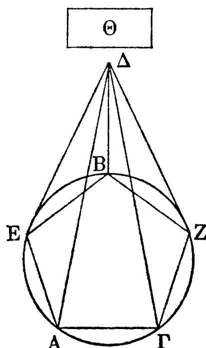


Fig. 10.

Que l'arc ABΓ soit divisé en deux parties égales par le point B ; menons les droites AB, ΓB, ΔB ; les triangles ABΔ et BΓΔ auront ainsi une somme supérieure[1] au triangle AΔΓ. Soit Θ l'aire dont la somme des triangles indiqués dépasse le triangle AΔΓ. L'aire Θ est donc ou bien inférieure aux segments AB et BΓ ou non.

Supposons d'abord qu'elle ne soit pas inférieure. Nous avons, dès lors, deux surfaces, à savoir la surface conique entre AΔ et ΔB jointe au segment AEB, et le triangle AΔB, admettant comme limite commune le périmètre du triangle AΔB ; celle qui comprend l'autre sera donc plus grande que celle qui est comprise ; par conséquent la somme de la surface conique entre AΔ et ΔB et du segment AEB est supérieure au triangle ABΔ. Pour les mêmes raisons la somme de la surface entre BΔ et ΔΓ et du segment ΓZB est supérieure au triangle BΔΓ ; il s'ensuit que la somme de la surface conique et de l'aire Θ est supérieure à la somme des triangles indiqués[2]. Or la somme des triangles indiqués est équivalente à la somme du triangle AΔΓ et de l'aire Θ. En retranchant de part et d'autre l'aire Θ,

1-2. Cf. les notes complémentaires à la fin de ce volume.

Fig. 10.

Τετμήσθω ἡ ΑΒΓ περιφέρεια δίχα κατὰ τὸ Β, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΓΒ, ΔΒ· ἔσται δὴ τὰ ΑΒΔ, ΒΓΔ τρίγωνα μείζονα τοῦ ΑΔΓ τριγώνου. Ὧι δὴ ὑπερέχει τὰ εἰρημένα τρίγωνα τοῦ ΑΔΓ τριγώνου, ἔστω τὸ Θ. Τὸ δὴ Θ ἤτοι τῶν ΑΒ, ΒΓ τμημάτων ἔλασσόν ἐστι ἢ οὔ.

Ἔστω μὴ ἔλασσον πρότερον. Ἐπεὶ οὖν δύο εἰσὶν ἐπιφάνειαι ἥ τε κωνικὴ ἡ μεταξὺ τῶν ΑΔΒ μετὰ τοῦ ΑΕΒ τμήματος καὶ ἡ τοῦ ΑΔΒ τριγώνου τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσαι τὴν περίμετρον τοῦ τριγώνου τοῦ ΑΔΒ, μείζων ἔσται ἡ περιλαμβάνουσα τῆς περιλαμβανομένης· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια ἡ μεταξὺ τῶν ΑΔΒ μετὰ τοῦ ΑΕΒ τμήματος τοῦ ΑΒΔ τριγώνου. Ὁμοίως δὲ καὶ ἡ μεταξὺ τῶν ΒΔΓ μετὰ τοῦ ΓΖΒ τμήματος μείζων ἐστὶν τοῦ ΒΔΓ τριγώνου· ὅλη ἄρα ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια μετὰ τοῦ Θ χωρίου μείζων ἐστὶ τῶν εἰρημένων τριγώνων. Τὰ δὲ εἰρημένα τρίγωνα ἴσα ἐστὶν τῷ τε ΑΔΓ τριγώνῳ καὶ τῷ Θ χωρίῳ. Κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ Θ χωρίον· λοιπὴ ἄρα ἡ

12 δὲ C : δὴ BDEGH ‖ 13 τῶν ΒΔΓ Torellius : τοῦ ΔΒΓ τριγώνου BCDEGH ‖ 14 τριγώνου BDEGH : om. C.

on trouve que la surface conique comprise entre AΔ et ΔΓ est supérieure au triangle AΔΓ.

Que Θ soit donc inférieur à la somme des segments AB et BΓ. En divisant en deux parties égales les arcs de cercle AB et BΓ et en deux parties égales les moitiés de ces arcs, nous trouverons comme restes des segments dont la somme est inférieure à l'aire Θ. Que ces segments de reste soient les segments admettant comme cordes AE, EB, BZ et ZΓ ; menons ΔE et ΔZ. Pour les mêmes raisons que plus haut, la surface composée de l'aire du cône comprise entre les droites AΔ et ΔE et du segment de corde AE est supérieure au triangle AΔE, et la surface composée de l'aire du cône entre EΔ et ΔB et du segment de corde EB est supérieure au triangle EΔB ; il s'ensuit que la surface composée de l'aire du cône entre AΔ et ΔB et des segments de cordes AE et EB est supérieure à la somme des triangles AΔE et EBΔ. Mais puisque la somme des triangles AEΔ et ΔEB est supérieure au triangle ABΔ, comme nous l'avons montré, à plus forte raison la surface composée de l'aire du cône entre AΔ et ΔB et des segments de cordes AE et EB est supérieure au triangle AΔB. Pour les mêmes raisons, la surface composée de l'aire conique entre BΔ et ΔΓ et des segments de cordes BZ et ZΓ est supérieure au triangle BΔΓ ; par conséquent toute la surface composée de l'aire conique entre AΔ et ΔΓ et des segments indiqués est supérieure à la somme des triangles ABΔ et ΔBΓ. Or la somme de ces triangles est égale à la somme du triangle AΔΓ et de l'aire Θ ; parmi ces aires, les segments indiqués ont une somme inférieure à Θ ; par conséquent la surface comprise entre AΔ et ΔΓ, qui reste après soustraction, est supérieure au triangle AΔΓ.

10.

Si on mène des tangentes au cercle de base d'un cône[1], dans le plan de ce cercle et de manière qu'elles

1. Il s'agit, bien entendu, d'un cône isoscèle, cf. la ligne 20,

κωνικὴ ἐπιφάνεια ἡ μεταξὺ τῶν ΑΔΓ μείζων ἐστὶν τοῦ ΑΔΓ τριγώνου.

Ἔστω δὴ τὸ Θ ἔλασσον τῶν ΑΒ, ΒΓ τμημάτων. Τέμνοντες δὴ τὰς ΑΒ, ΒΓ περιφερείας δίχα καὶ τὰς ἡμισείας αὐτῶν δίχα λείψομεν τμήματα ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Θ χωρίου. Λελείφθω τὰ ἐπὶ τῶν ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ εὐθειῶν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΕ, ΔΖ. Πάλιν τοίνυν κατὰ τὰ αὐτὰ ἡ μὲν ἐπιφάνεια τοῦ κώνου ἡ μεταξὺ τῶν ΑΔΕ μετὰ τοῦ ἐπὶ τῆς ΑΕ τμήματος μείζων ἐστὶν τοῦ ΑΔΕ τριγώνου, ἡ δὲ μεταξὺ τῶν ΕΔΒ μετὰ τοῦ ἐπὶ τῆς ΕΒ τμήματος μείζων ἐστὶν τοῦ ΕΔΒ τριγώνου· ἡ ἄρα ἐπιφάνεια ἡ μεταξὺ τῶν ΑΔΒ μετὰ τῶν ἐπὶ τῶν ΑΕ, ΕΒ τμημάτων μείζων ἐστὶν τῶν ΑΔΕ, ΕΒΔ τριγώνων. Ἐπεὶ δὲ τὰ ΑΕΔ, ΔΕΒ τρίγωνα μείζονά ἐστιν τοῦ ΑΒΔ τριγώνου, καθὼς δέδεικται, πολλῷ ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου ἡ μεταξὺ τῶν ΑΔΒ μετὰ τῶν ἐπὶ τῶν ΑΕ, ΕΒ τμημάτων μείζων ἐστὶ τοῦ ΑΔΒ τριγώνου. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ἐπιφάνεια ἡ μεταξὺ τῶν ΒΔΓ μετὰ τῶν ἐπὶ τῶν ΒΖ, ΖΓ τμημάτων μείζων ἐστὶν τοῦ ΒΔΓ τριγώνου· ὅλη ἄρα ἡ ἐπιφάνεια ἡ μεταξὺ τῶν ΑΔΓ μετὰ τῶν εἰρημένων τμημάτων μείζων ἐστὶ τῶν ΑΒΔ, ΔΒΓ τριγώνων. Ταῦτα δέ ἐστιν ἴσα τῷ ΑΔΓ τριγώνῳ καὶ τῷ Θ χωρίῳ· ὧν τὰ εἰρημένα τμήματα ἐλάσσονα τοῦ Θ χωρίου· λοιπὴ ἄρα ἡ ἐπιφάνεια ἡ μεταξὺ τῶν ΑΔΓ μείζων ἐστὶν τοῦ ΑΔΓ τριγώνου.

ι'.

Ἐὰν ἐπιψαύουσαι ἀχθῶσιν τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ κώνου, ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι τῷ κύκλῳ καὶ

1 ΑΔΓ ms. B : ΑΔΒ mss. DEGH ‖ 10 τῶν Torellius : τοῦ BCDEGH ‖ 12 ἐπὶ τῶν C : om. BDEGH ‖ 17 ΒΔΓ Torellius : ΔΒΓ mss. BDEGH ΑΒΓ ms. C ‖ 18 τμημάτων C : om. BDEGH ‖ 24 ΑΔΓ ms. B : ΑΔΕ mss. CDEGH.

se coupent les unes les autres, et qu'on joint les points de contact et les points d'intersection au sommet du cône par des droites, la somme des triangles compris entre les tangentes et les droites menées vers le sommet du cône est supérieure à la surface du cône découpée par ces droites.

Soit un cône admettant comme base le cercle ΑΒΓ et comme sommet le point Ε ; menons au cercle ΑΒΓ, dans le plan de ce cercle, les tangentes ΑΔ, ΓΔ et joignons le point Ε, sommet du cône, aux points Α, Δ, Γ par les droites ΕΑ, ΕΔ, ΕΓ ; je dis que la somme des triangles ΑΔΕ et ΔΕΓ est supérieure à la surface conique comprise entre les droites ΑΕ et ΓΕ et l'arc de cercle ΑΒΓ.

Menons en effet au cercle la tangente ΗΒΖ, parallèle à ΑΓ, l'arc de cercle ΑΒΓ étant divisé en deux parties égales par le point Β, et joignons les points Η et Ζ à Ε par les droites ΗΕ et ΖΕ. La somme de ΗΔ et ΔΖ étant supérieure[1] à ΗΖ, ajoutons de part et d'autre les segments de droite ΗΑ et ΖΓ ; la somme de ΑΔ et ΔΓ est par conséquent supérieure à la somme de ΑΗ, ΗΖ et ΖΓ. Puisque d'autre part ΑΕ, ΕΒ et ΕΓ sont des génératrices du cône, ces segments de droite sont égaux, du moment que le cône est isoscèle ; mais ils sont aussi perpendiculaires, comme on l'a montré dans le corollaire ; mais les produits des hauteurs par les bases sont doubles des aires des triangles ; par conséquent la somme des triangles ΑΕΔ et ΔΕΓ est supérieure[2] à la somme des triangles ΑΗΕ, ΗΕΖ, ΖΕΓ ; les segments ΑΗ, ΗΖ et ΖΓ sont en effet inférieurs à ΓΔ et à ΔΑ, alors que les hauteurs de ces triangles sont égales, et il est évident que la droite joignant le sommet du cône droit au point de contact de la base est perpendiculaire à la tangente. Soit Θ l'aire dont la somme des triangles ΑΕΔ et ΔΓΕ dépasse la somme des triangles ΑΕΗ, ΗΕΖ et ΖΕΓ. L'aire Θ

p. 27. Il est probable, comme le fait observer Heiberg, qu'Archimède avait précisé cette propriété dès l'énoncé de la proposition.

1. D'après Euclide I, 20.

2. Cf. Eucl. VI, 1.

συμπίπτουσαι ἀλλήλαις, ἀπὸ δὲ τῶν ἀφῶν καὶ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου εὐθεῖαι ἀχθῶσιν, τὰ περιεχόμενα τρίγωνα ὑπὸ τῶν ἐπιψαυουσῶν καὶ τῶν ἐπὶ τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν μείζονά ἐστιν τῆς τοῦ κώνου ἐπιφανείας τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῶν.

Ἔστω κῶνος οὗ βάσις μὲν ὁ ΑΒΓ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Ε σημεῖον, καὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐφαπτόμεναι ἤχθωσαν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι αἱ ΑΔ, ΓΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε σημείου, ὅ ἐστιν κορυφὴ τοῦ κώνου, ἐπὶ τὰ Α, Δ, Γ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΑ, ΕΔ, ΕΓ· λέγω ὅτι τὰ ΑΔΕ, ΔΕΓ τρίγωνα μείζονά ἐστι τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν ΑΕ, ΓΕ εὐθειῶν καὶ τῆς ΑΒΓ περιφερείας.

Ἤχθω γὰρ ἡ ΗΒΖ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου καὶ παράλληλος οὖσα τῇ ΑΓ δίχα τμηθείσης τῆς ΑΒΓ περιφερείας κατὰ τὸ Β, καὶ ἀπὸ τῶν Η, Ζ ἐπὶ τὸ Ε ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΕ, ΖΕ. Καὶ ἐπεὶ μείζους εἰσὶν αἱ ΗΔ, ΔΖ τῆς ΗΖ, κοιναὶ προσκείσθωσαν αἱ ΗΑ, ΖΓ· ὅλαι ἄρα αἱ ΑΔ, ΔΓ μείζους εἰσὶν τῶν ΑΗ, ΗΖ, ΖΓ. Καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΕΓ πλευραί εἰσιν τοῦ κώνου, ἴσαι εἰσὶν διὰ τὸ ἰσοσκελῆ εἶναι τὸν κῶνον· ὁμοίως δὲ καὶ κάθετοί εἰσιν [ὡς ἐδείχθη ἐν τῷ λήμματι, τὰ δὲ ὑπὸ τῶν καθέτων καὶ τῶν βάσεων διπλασίονά ἐστιν τῶν τριγώνων]· μείζονα ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΕΔ, ΔΕΓ τρίγωνα τῶν ΑΗΕ, ΗΕΖ, ΖΕΓ τριγώνων [εἰσὶν γὰρ αἱ μὲν ΑΗ, ΗΖ, ΖΓ ἐλάσσους τῶν ΓΔ, ΔΑ, τὰ δὲ ὕψη αὐτῶν ἴσα] [φανερὸν γὰρ ὅτι ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ ὀρθοῦ κώνου ἐπὶ τὴν ἐφαπὴν τῆς βάσεως ἐπιζευγνυμένη κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην]. Ὧι δὴ μείζονά ἐστιν τὰ ΑΕΔ, ΔΓΕ τρίγωνα τῶν ΑΕΗ, ΗΕΖ, ΖΕΓ τριγώνων, ἔστω τὸ Θ

13 ΑΒΓ mss. BDEGH : ΑΓ ms. C ‖ 15 περιφερείας BDEGH : περιφανείας C ‖ 22-24 διπλασίονά — τρίγωνα C : om. BDEGH ‖ 29 ἔστω BDEGH : τῶν C. ‖ 29 - p.28, 1 τὸ Θ χωρίον. Τὸ δὴ Θ χωρίον Basil. : lac. CDEGH.

est donc inférieure ou non inférieure à la somme des aires de reste ΑΗΒΚ et ΒΖΓΛ.

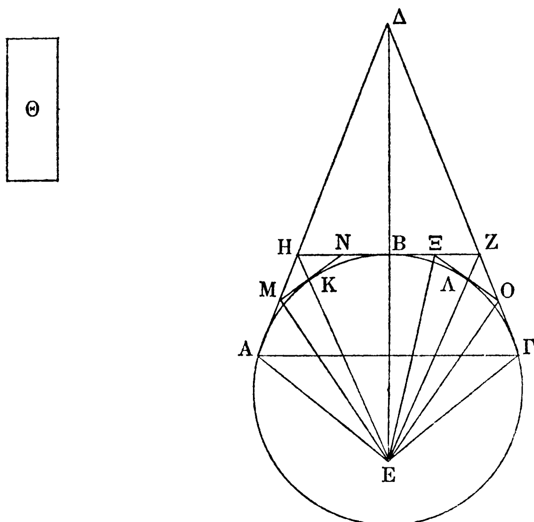


Fig. 11.

Qu'elle ne soit d'abord pas inférieure à cette somme. Nous avons dès lors deux surfaces composées, d'une part celle de la pyramide admettant comme base le trapèze ΗΑΓΖ et comme sommet le point Ε, d'autre part l'aire composée de la surface conique comprise entre ΑΕ et ΕΓ et du segment de cercle ΑΒΓ ; la limite commune de ces deux surfaces est le périmètre du triangle ΑΕΓ ; il est donc évident que la surface de la pyramide sans le triangle ΑΕΓ est supérieure[1] à la somme de la surface conique et du segment ΑΒΓ. Retranchons de part et d'autre le segment ΑΒΓ ; la somme des triangles ΑΗΕ, ΗΕΖ, ΖΕΓ, augmentée des restes ΑΗΒΚ et ΒΖΓΛ est ainsi supérieure à la

1. D'après le postulat 4.

χωρίον. Τὸ δὴ Θ χωρίον ἤτοι ἔλαττόν ἐστιν τῶν ΑΗΒΚ, ΒΖΓΛ ἀποτμημάτων ἢ οὐκ ἔλαττον.

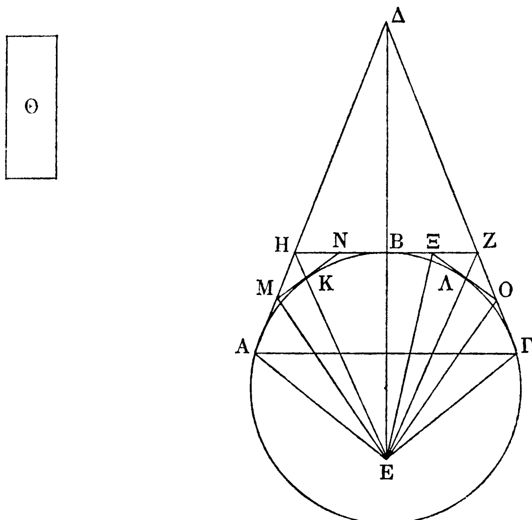


Fig. 11.

Ἔστω πρότερον μὴ ἔλαττον. Ἐπεὶ οὖν εἰσιν ἐπιφάνειαι σύνθετοι, ἥ τε τῆς πυραμίδος τῆς ἐπὶ βάσεως τοῦ ΗΑΓΖ τραπεζίου κορυφὴν ἔχουσα τὸ Ε καὶ ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια ἡ μεταξὺ τῶν ΑΕΓ μετὰ τοῦ ΑΒΓ τμήματος, καὶ πέρας ἔχουσι τὴν αὐτὴν περίμετρον τοῦ ΑΕΓ τριγώνου, δῆλον ὡς ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τοῦ ΑΕΓ τριγώνου μείζων ἐστὶν τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας μετὰ τοῦ τμήματος τοῦ ΑΒΓ. Κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΑΒΓ τμῆμα· λοιπὰ ἄρα τὰ τρίγωνα τὰ ΑΗΕ, ΗΕΖ, ΖΕΓ μετὰ τῶν ΑΗΒΚ, ΒΖΓΛ

1-3 τῶν — οὖν add. Basil. ‖ 4 ΗΑΓΖ mss. BDEGH : ΗΑΓ ms. C ‖ 5 τὸ C : τοῦ DEGH.

surface conique comprise entre ΑΕ et ΕΓ. Or l'aire Θ n'est pas inférieure aux restes ΑΗΒΚ et ΒΖΓΛ ; à plus forte raison donc la somme des triangles ΑΗΕ, ΗΕΖ, ΖΕΓ et de l'aire Θ est supérieure à la surface conique comprise entre ΑΕ et ΕΓ. Mais la somme des triangles ΑΗΕ, ΗΕΖ, ΖΕΓ et de l'aire Θ est égale à la somme des triangles ΑΕΔ et ΔΕΓ ; il s'ensuit que la somme des triangles ΑΕΔ et ΔΕΓ sera supérieure à la surface conique indiquée.

Que l'aire Θ soit donc inférieure à la somme des aires de reste. Circonscrivons dès lors des polygones au segment[1] de cercle, comme plus haut[2], en divisant chaque fois les arcs qui restent en deux parties égales et en menant des tangentes. Nous finirons ainsi par trouver des aires de reste dont la somme sera inférieure à l'aire Θ. Soient ΑΜΚ, ΚΝΒ, ΒΞΛ et ΛΟΓ ces restes, d'une somme inférieure à l'aire Θ. Joignons les points à Ε. Il est de nouveau évident que la somme des triangles ΑΗΕ, ΗΕΖ, ΖΕΓ est supérieure à la somme des triangles ΑΕΜ, ΜΕΝ, ΝΕΞ, ΞΕΟ, ΟΕΓ, puisque la somme des bases est supérieure à la somme des bases et que les hauteurs sont égales. De plus, d'après le même raisonnement que plus haut[3], la pyramide ayant pour base le polygone ΑΜΝΞΟΓ et pour sommet le point Ε, sans le triangle ΑΕΓ, a une surface supérieure[4] à la surface conique entre ΑΕ et ΕΓ augmentée de l'aire du segment ΑΒΓ. Retranchons de part et d'autre le segment ΑΒΓ ; les triangles ΑΕΜ, ΜΕΝ, ΝΕΞ, ΞΕΟ, ΟΕΓ, augmentés des aires de reste ΑΜΚ, ΚΝΒ, ΒΞΛ, ΛΟΓ, auront donc une somme supérieure à la surface conique entre ΑΕ et ΕΓ. Mais l'aire Θ est plus grande que la somme des restes indiqués, et on a montré que la somme des triangles ΑΕΗ, ΗΕΖ, ΖΕΓ est supérieure à la somme des triangles ΑΕΜ, ΜΕΝ, ΝΕΞ,

1. La démonstration exige le singulier τὸ τμῆμα, qui figure d'ailleurs dans le commentaire d'Eutocius à ce passage ; cf. Heiberg, *Archim.* I, p. 39.
2. P. 27, l. 14.
3. P. 28, l. 7.
4. D'après le postulat 4.

περιλειμμάτων μείζονά ἐστιν τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν ΑΕ, ΕΓ. Τῶν δὲ ΑΗΒΚ, ΒΖΓΛ περιλειμμάτων οὐκ ἔλασσόν ἐστιν τὸ Θ χωρίον· πολλῷ ἄρα τὰ ΑΗΕ, ΗΕΖ, ΖΕΓ τρίγωνα μετὰ τοῦ Θ μείζονα ἔσται τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν ΑΕΓ. Ἀλλὰ τὰ ΑΗΕ, ΗΕΖ, ΖΕΓ τρίγωνα μετὰ τοῦ Θ ἐστὶν τὰ ΑΕΔ, ΔΕΓ τρίγωνα· τὰ ἄρα ΑΕΔ, ΔΕΓ τρίγωνα μείζονα ἔσται τῆς εἰρημένης κωνικῆς ἐπιφανείας.

Ἔστω δὴ τὸ Θ ἔλασσον τῶν περιλειμμάτων. Ἀεὶ δὴ περιγράφοντες πολύγωνα περὶ τὰ τμήματα ὁμοίως δίχα τεμνομένων τῶν περιλειπομένων περιφερειῶν καὶ ἀγομένων ἐφαπτομένων λείψομέν τινα ἀπολείμματα, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ Θ χωρίου. Λελείφθω καὶ ἔστω τὰ ΑΜΚ, ΚΝΒ, ΒΞΛ, ΛΟΓ ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Θ χωρίου, καὶ ἐπεζεύχθω ἐπὶ τὸ Ε. Πάλιν δὴ φανερὸν ὅτι τὰ ΑΗΕ, ΗΕΖ, ΖΕΓ τρίγωνα τῶν ΑΕΜ, ΜΕΝ, ΝΕΞ, ΞΕΟ, ΟΕΓ τριγώνων ἔσται μείζονα [αἵ τε γὰρ βάσεις τῶν βάσεών εἰσι μείζους καὶ τὸ ὕψος ἴσον]. Ἔτι δὲ πάλιν ὁμοίως μείζονα ἔχει ἐπιφάνειαν ἡ πυραμὶς ἡ βάσιν μὲν ἔχουσα τὸ ΑΜΝΞΟΓ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Ε, χωρὶς τοῦ ΑΕΓ τριγώνου, τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν ΑΕΓ μετὰ τοῦ ΑΒΓ τμήματος. Κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΑΒΓ τμῆμα· λοιπὰ ἄρα τὰ ΑΕΜ, ΜΕΝ, ΝΕΞ, ΞΕΟ, ΟΕΓ τρίγωνα μετὰ τῶν ΑΜΚ, ΚΝΒ, ΒΞΛ, ΛΟΓ περιλειμμάτων μείζονα ἔσται τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν ΑΕΓ. Ἀλλὰ τῶν μὲν εἰρημένων περιλειμμάτων μεῖζόν ἐστιν τὸ Θ χωρίον, τῶν δὲ ΑΕΜ, ΜΕΝ, ΝΕΞ, ΞΕΟ, ΟΕΓ τριγώνων μείζονα ἐδείχθη τὰ ΑΕΗ,

2 περιλειμμάτων C : περιλημμάτων vel περιλιμμάτων BDEGH || 9 περιλειμμάτων C : περιλημμάτων BDEGH || 12 ἀπολείμματα C : ἀπολίμματα DEGH || 17 καὶ τὸ ὕψος C : om. BDEGH || 18 ἴσον CDEGH : om. B || 24 περιλειμμάτων G : περιλημμάτων BDEGH || 26 περιλειμμάτων G : περιλιμμάτων DH περιλημμάτων EB.

ΞΕΟ, ΟΕΓ ; à plus forte raison, donc, la somme des triangles ΑΕΗ, ΗΕΖ, ΖΕΓ, augmentée de l'aire Θ, c'est-à-dire la somme des triangles ΑΔΕ et ΔΕΓ, est supérieure à la surface conique comprise entre les droites ΑΕ et ΕΓ.

11.

Deux droites étant tracées dans la surface d'un cylindre droit, la portion de surface du cylindre située entre les droites est supérieure au parallélogramme compris entre les droites situées dans la surface du cylindre et les droites joignant les extrémités de ces droites.

Soit un cylindre droit ayant pour base le cercle ΑΒ ; soit ΓΔ le cercle opposé à ΑΒ ; menons les droites ΑΓ et ΒΔ ; je dis que la surface cylindrique découpée par ΑΓ et ΒΔ est supérieure au parallélogramme ΑΓΒΔ.

Fig. 12.

Divisons en effet chacun des arcs ΑΒ et ΓΔ en deux parties égales par les points Ε et Ζ, et menons les droites ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ et ΖΔ. Puisque la somme des segments

ΗΕΖ, ΖΕΓ τρίγωνα· πολλῷ ἄρα τὰ ΑΕΗ, ΗΕΖ, ΖΕΓ τρίγωνα μετὰ τοῦ Θ χωρίου, τουτέστι τὰ ΑΔΕ, ΔΕΓ τρίγωνα, μείζονά ἐστιν τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν ΑΕΓ εὐθειῶν.

ια'.

Ἐὰν ἐν ἐπιφανείᾳ ὀρθοῦ κυλίνδρου δύο εὐθεῖαι ὦσιν, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ἡ μεταξὺ τῶν εὐθειῶν μείζων ἐστὶν τοῦ παραλληλογράμμου τοῦ περιεχομένου ὑπό τε τῶν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου εὐθειῶν καὶ τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰ πέρατα αὐτῶν.

Ἔστω κύλινδρος ὀρθός, οὗ βάσις μὲν ὁ ΑΒ κύκλος, ἀπεναντίον δὲ ὁ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΒΔ· λέγω ὅτι ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΔ εὐθειῶν μείζων ἐστὶν τοῦ ΑΓΒΔ παραλληλογράμμου.

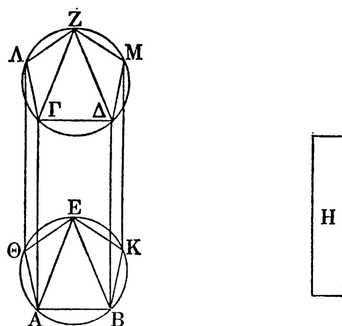


Fig. 12.

Τετμήσθω γὰρ ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΓΔ δίχα κατὰ τὰ Ε, Ζ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ. Καὶ ἐπεὶ

1 ΑΕΗ mss. BG : ΔΕΗ mss. DEH ‖ 2 ΔΕΓ ms. B : ΔΕΣ mss. DEGH.

de droite AE et EB est supérieure[1] à AB et que les parallélogrammes construits sur ces trois segments ont même hauteur, la somme des parallélogrammes de bases AE et EB et d'une hauteur égale à celle du cylindre est supérieure[2] au parallélogramme ABΔΓ. De combien? Soit H l'aire dont elle le dépasse. L'aire H est donc inférieure à la somme des segments plans AE, EB, ΓZ, ZΔ ou elle n'est pas inférieure.

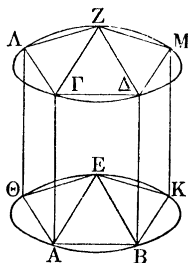


Fig. 13.

Supposons-la d'abord non inférieure. Du moment que la surface composée de l'aire découpée dans le cylindre par les droites AΓ et BΔ et des segments AEB, ΓZΔ est limitée par le parallélogramme AΓBΔ qui limite aussi la surface composée des parallélogremmes ayant pour bases AE et EB et pour hauteurs la hauteur du cylindre et des triangles AEB et ΓZΔ, du moment, de plus, que l'une de ces surfaces composées entoure l'autre et que les deux tournent leur concavité du même côté, la surface composée de l'aire cylindrique découpée par les droites AΓ et BΔ et des segments plans AEB et ΓZΔ est supérieure[3] à la surface composée des parallélogrammes ayant pour bases AE et EB

1. D'après Eucl. I, 20.
2. D'après Eucl. VI, 1.
3. D'après le postulat 4.

αἱ ΑΕ, ΕΒ τῆς ΑΒ [διαμέτρου] μείζους εἰσίν, καί ἐστιν ἰσουψῆ τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπ' αὐτῶν, μείζονα οὖν ἐστιν τὰ παραλληλόγραμμα, ὧν [αἱ] βάσεις μὲν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, τοῦ ΑΒΔΓ παραλληλογράμμου. Τίνι ἄρα μείζονά ἐστιν; Ἔστω τῷ Η χωρίῳ. Τὸ δὴ Η χωρίον ἤτοι ἔλασσον τῶν ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ ἐπιπέδων ἐστὶ τμημάτων ἢ οὐκ ἔλασσον.

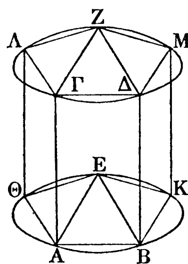


Fig. 13.

Ἔστω πρότερον μὴ ἔλασσον. Καὶ ἐπεὶ ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΔ εὐθειῶν καὶ τὰ ΑΕΒ, ΓΖΔ [τρίγωνα] πέρας ἔχει τὸ τοῦ ΑΓΒΔ παραλληλογράμμου ἐπίπεδον, ἀλλὰ καὶ ἡ συγκειμένη ἐπιφάνεια ἐκ τῶν παραλληλογράμμων, ὧν βάσεις μὲν ΑΕ, ΕΒ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, καὶ τὰ ΑΕΒ, ΓΖΔ [ἐπίπεδα] πέρας ἔχει τὸ τοῦ ΑΔΒΓ παραλληλογράμμου ἐπίπεδον, καὶ ἡ ἑτέρα τὴν ἑτέραν περιλαμβάνει, καὶ ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαί εἰσιν, μείζων οὖν ἐστιν ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΔ εὐθειῶν καὶ τὰ ΑΕΒ, ΓΖΔ ἐπίπεδα τμήματα τῆς συγκειμένης ἐπιφανείας ἐκ τῶν παραλληλογράμμων, ὧν [αἱ] βάσεις μὲν αἱ ΑΕ, ΕΒ,

3 αἱ del. Heiberg ‖ 8 ἡ add. Heiberg ‖ 15 ἡ add. Heiberg ‖ 16 κοῖλαί G : κοῖλα DEH ‖ 19 αἱ del. Heiberg.

et pour hauteur la hauteur du cylindre et des triangles AEB et ΓΖΔ. Retranchons de part et d'autre les triangles AEB, ΓΖΔ ; il reste que la somme de la surface cylindrique découpée par les droites ΑΓ, ΒΔ et des segments plans AE, EB, ΓΖ, ΖΔ est supérieure à l'aire composée des parallélogrammes ayant pour bases AE et EB et pour hauteur la hauteur du cylindre. Or les parallélogrammes ayant pour bases AE et EB et pour hauteur la hauteur du cylindre ont une somme égale[1] à la somme du parallélogramme ΑΓΒΔ et de l'aire H ; ce qui reste, à savoir la surface cylindrique découpée par les droites ΑΓ et ΒΔ, est donc supérieur[1] au parallélogramme ΑΓΒΔ.

Que l'aire H soit donc inférieure à la somme des segments plans AE, EB, ΓΖ, ΖΔ. Divisons chacun des arcs de cercle AE, EB, ΓΖ, ΖΔ en deux parties égales par les points Θ, K, Λ, M et menons les droites ΑΘ, ΘΕ, EK, KB, ΓΛ, ΛΖ, ZM, ΜΔ. De la somme des segments plans AE, EB, ΓΖ, ΖΔ est donc retranchée une aire supérieure ou égale à sa moitié, à savoir la somme des triangles ΑΘΕ, EKB, ΓΛΖ, ΖΜΔ. Cette opération étant répétée, il restera des segments de cercle d'une somme inférieure à l'aire H. Soient ΑΘ, ΘΕ, EK, KB, ΓΛ, ΛΖ, ZM, ΜΔ ces segments de reste. Nous montrerons donc, de la même manière que plus haut[2], que la somme des parallélogrammes ayant pour bases ΑΘ, ΘΕ, EK, KB et pour hauteur la hauteur du cylindre est supérieure à la somme des parallélogrammes ayant pour bases AE et EB et pour hauteur la hauteur du cylindre. Puisque, de plus, la surface composée de l'aire cylindrique découpée par les droites ΑΓ et ΒΔ et des segments plans AEB et ΓΖΔ est limitée par le parallélogramme ΑΓΒΔ qui limite aussi la surface composée des parallélogrammes ayant pour bases ΑΘ,

1. Par hypothèse.
2. Cf. p. 30, l. 16.

ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, καὶ τῶν ΑΕΒ, ΓΖΔ τριγώνων. Κοινὰ ἀφῃρήσθω τὰ ΑΕΒ, ΓΖΔ τρίγωνα· λοιπὴ οὖν ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΔ εὐθειῶν καὶ τὰ ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ ἐπίπεδα τμήματα μείζονά ἐστι τῆς συγκειμένης ἐπιφανείας ἐκ τῶν παραλληλογράμμων, ὧν βάσεις μὲν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ. Τὰ δὲ παραλληλόγραμμα, ὧν βάσεις μὲν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, ἴσα ἐστὶν τῷ ΑΓΒΔ παραλληλογράμμῳ καὶ τῷ Η χωρίῳ· λοιπὴ ἄρα ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΔ εὐθειῶν μείζων ἐστὶ τοῦ ΑΓΒΔ παραλληλογράμμου.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ἔλασσον τὸ Η χωρίον τῶν ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ ἐπιπέδων τμημάτων. Καὶ τετμήσθω ἑκάστη τῶν ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ περιφερειῶν δίχα κατὰ τὰ Θ, Κ, Λ, Μ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ΓΛ, ΛΖ, ΖΜ, ΜΔ [τῶν δὲ ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ ἄρα ἐπιπέδων τμημάτων ἀφαιρεῖται οὐκ ἔλασσον ἢ τὸ ἥμισυ τὰ ΑΘΕ, ΕΚΒ, ΓΛΖ, ΖΜΔ τρίγωνα]. Τούτου οὖν ἑξῆς γινομένου καταλειφθήσεταί τινα τμήματα, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ Η χωρίου. Καταλελείφθω καὶ ἔστω τὰ ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ΓΛ, ΛΖ, ΖΜ, ΜΔ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι τὰ παραλληλόγραμμα, ὧν βάσεις μὲν αἱ ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, μείζονα ἔσται τῶν παραλληλογράμμων, ὧν βάσεις μὲν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΔ εὐθειῶν καὶ τὰ ΑΕΒ, ΓΖΔ ἐπίπεδα τμήματα πέρας ἔχει τὸ τοῦ ΑΓΒΔ παραλληλογράμμου ἐπίπεδον, ἀλλὰ καὶ ἡ συγκειμένη ἐπιφάνεια ἐκ τῶν παραλληλογράμμων, ὧν

2 ΑΕΒ mss. BG : ΕΒ mss. DEH ‖ 4 εὐθειῶν G : εὐθεῖα DEH ‖ 6 τῷ G : om. DEH ‖ 8 τῷ pr. G : om. DEH ‖ 21 τὰ παραλληλόγραμμα B : τῶν παραλληλογράμμων DEGH ‖ 23 τῶν παραλληλογράμμων B : τὰ παραλληλόγραμμα BDEGH ‖ 24 τῷ G : om. DEH.

ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ et pour hauteurs la hauteur du cylindre et des figures rectilignes ΑΘΕΚΒ et ΓΛΖΜΔ[1], retranchons de part et d'autre les figures rectilignes ΑΘΕΚΒ et ΓΛΖΜΔ ; il s'ensuit que la surface cylindrique découpée par les droites ΑΓ et ΒΔ, augmentée des segments plans ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ΓΛ, ΛΖ, ΖΜ, ΜΔ, est supérieure à la surface composée des parallélogrammes ayant pour bases ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ et pour hauteurs la hauteur du cylindre. Or les parallélogrammes ayant pour bases ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ et pour hauteur la hauteur du cylindre ont une somme supérieure à celle des parallélogrammes ayant pour bases ΑΕ et ΕΒ et pour hauteurs la hauteur du cylindre ; il s'ensuit que la surface cylindrique découpée par les droites ΑΓ et ΒΔ, augmentée des segments plans ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ΓΛ, ΛΖ, ΖΜ, ΜΔ est supérieure à la somme des parallélogrammes ayant pour bases ΑΕ et ΕΒ et pour hauteurs la hauteur du cylindre. Or la somme des parallélogrammes ayant pour bases ΑΕ et ΕΒ et pour hauteurs la hauteur du cylindre est égale[2] à la somme du parallélogramme ΑΓΔΒ et de l'aire Η ; la surface cylindrique découpée par les droites ΑΓ et ΒΔ, augmentée des segments plans ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ΓΛ, ΖΜ, ΜΔ est par conséquent supérieure à la somme du parallélogramme ΑΓΒΔ et de l'aire Η. Après soustraction[3] des segments ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ΓΛ, ΛΖ, ΖΜ, ΜΔ, dont la somme est inférieure à l'aire Η, il reste que la surface cylindrique découpée par les droites ΑΓ et ΒΔ est supérieure au parallélogramme ΑΓΒΔ.

12.

Étant données deux droites situées dans la surface d'un cylindre droit, si on mène aux extrémités de ces

1. Il faut compléter le raisonnement, entre ΓΛΖΜΔ, et « retranchons », d'après les considérations de la p. 31, l. 14-p. 32 l. 1 ; cf. les notes complémentaires
2. Par hypothèse.
3. Le texte grec a ici une construction participiale insolite.

βάσεις μὲν αἱ ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, καὶ τῶν ΑΘΕΚΒ, ΓΛΖΜΔ εὐθυγράμμων, κοινὰ ἀφῃρήσθω τὰ ΑΘΕΚΒ, ΓΛΖΜΔ εὐθύγραμμα· λοιπὴ ἄρα ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΔ εὐθειῶν καὶ τὰ ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ΓΛ, ΛΖ, ΖΜ, ΜΔ ἐπίπεδα τμήματα μείζονά ἐστιν τῆς συγκειμένης ἐπιφανείας ἐκ τῶν παραλληλογράμμων, ὧν βάσεις μὲν αἱ ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ. Τὰ δὲ παραλληλόγραμμα, ὧν βάσεις μὲν αἱ ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, μείζονά ἐστιν τῶν παραλληλογράμμων, ὧν βάσεις μὲν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ· καὶ ἡ ἀποτεμνομένη ἄρα κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΔ εὐθειῶν καὶ τὰ ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ΓΛ, ΛΖ, ΖΜ, ΜΔ ἐπίπεδα τμήματα μείζονά ἐστιν τῶν παραλληλογράμμων, ὧν βάσεις μὲν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ. Τὰ δὲ παραλληλόγραμμα, ὧν βάσεις μὲν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, ἴσα ἐστὶν τῷ ΑΓΔΒ παραλληλογράμμῳ καὶ τῷ Η χωρίῳ· καὶ ἡ ἀποτεμνομένη ἄρα κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΔ εὐθειῶν καὶ τὰ ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ΓΛ, ΛΖ, ΖΜ, ΜΔ ἐπίπεδα τμήματα μείζονά ἐστιν τοῦ ΑΓΒΔ παραλληλογράμμου καὶ τοῦ Η χωρίου. Ἀφαιρεθέντα δὲ τὰ ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ΓΛ, ΛΖ, ΖΜ, ΜΔ τμήματα τοῦ Η χωρίου ἐλάσσονα λοιπὴ ἄρα ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΔ εὐθειῶν μείζων ἐστὶν τοῦ ΑΓΒΔ παραλληλογράμμου.

ιβ'.

Ἐὰν ἐν ἐπιφανείᾳ κυλίνδρου τινὸς ὀρθοῦ δύο εὐθεῖαι ὦσιν, ἀπὸ δὲ τῶν περάτων τῶν εὐθειῶν ἀχθῶσίν τινες

2 κοινὰ BGH : κονὰ D μόνα E ‖ 8 τῷ G : om. DE ‖ 17-18 παραλληλογράμμῳ CG : παραλληλόγραμμα DEH ‖ 23 λοιπὴ BCG : λοιπὸν DEH.

droites aux cercles de base du cylindre des tangentes situées dans leur plan et concourantes, la somme des parallélogrammes compris entre les tangentes et les génératrices du cylindre est supérieure à l'aire du cylindre entre les droites tracées dans la surface du cylindre.

Soit le cercle ΑΒΓ, base d'un cylindre droit ; soient dans la surface du cylindre deux droites, extrémités Α et Γ ; menons en Α et en Γ, dans le plan du cercle, des tangentes au cercle, et soit Η leur point de rencontre ; imaginons aussi dans l'autre base du cylindre des tangentes au cercle menées aux extrémités des droites tracées dans la surface du cylindre ; il faut montrer que la somme des parallélogrammes compris entre les tangentes et les génératrices du cylindre est supérieure à l'aire du cylindre limitée (sc. d'un côté) par l'arc de cercle ΑΒΓ.

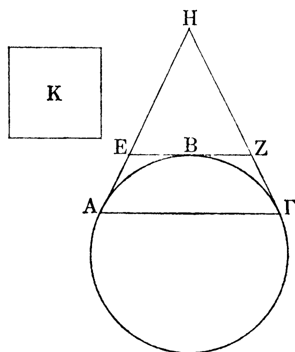


Fig. 14.

Menons en effet la tangente ΕΖ ; des points Ε et Ζ menons parallèlement à l'axe du cylindre des droites

ἐπιψαύουσαι τῶν κύκλων, οἵ εἰσιν βάσεις τοῦ κυλίνδρου, ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτῶν οὖσαι καὶ συμπέσωσιν, τὰ παραλληλόγραμμα τὰ περιεχόμενα ὑπό τε τῶν ἐπιψαυουσῶν καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ κυλίνδρου μείζονα ἔσται τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου τῆς μεταξὺ τῶν εὐθειῶν τῶν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου.

Ἔστω κυλίνδρου τινὸς ὀρθοῦ βάσις ὁ ΑΒΓ κύκλος, καὶ ἔστωσαν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ αὐτοῦ δύο εὐθεῖαι, ὧν πέρατα τὰ Α, Γ, ἀπὸ δὲ τῶν Α, Γ ἤχθωσαν ἐπιψαύουσαι τοῦ κύκλου ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Η, νοείσθωσαν δὲ καὶ ἐν τῇ ἑτέρᾳ βάσει τοῦ κυλίνδρου ἀπὸ τῶν περάτων τῶν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ εὐθεῖαι ἠγμέναι ἐπιψαύουσαι τοῦ κύκλου· δεικτέον ὅτι τὰ παραλληλόγραμμα τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν ἐπιψαυουσῶν καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ κυλίνδρου μείζονά ἐστι τῆς κατὰ τὴν ΑΒΓ περιφέρειαν ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου.

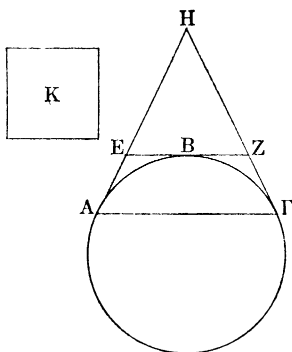


Fig. 14.

Ἤχθω γὰρ ἡ ΕΖ ἐπιψαύουσα, καὶ ἀπὸ τῶν Ε, Ζ σημείων ἤχθωσάν τινες εὐθεῖαι παρὰ τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου

12 τῶν alt. add. Torellius.

jusqu'à l'autre base ; la somme des parallélogrammes compris entre AH et HΓ d'une part et les génératrices du cylindre d'autre part est supérieure à la somme des parallélogrammes compris d'une part entre AE, EZ et ZΓ et la génératrice du cylindre d'autre part[1] ; puisque, en effet, la somme de EH et HZ est supérieure à EZ, si on ajoute de part et d'autre la somme de AE et ZΓ, il en résulte que la somme de HA et HΓ est supérieure à la somme de AE, EZ et ZΓ. Que l'aire K soit équivalente à l'excès de la première somme sur la seconde. Or la moitié de l'aire K est supérieure ou non à la somme des figures comprises entre d'une part les segments de droite AE, EZ et ZΓ et d'autre part les arcs de cercle AΔ, ΔB, BΘ, ΘΓ. Qu'elle soit d'abord supérieure. La surface composée des parallélogrammes sur AE, EZ, ZΓ, du trapèze AEZΓ et du trapèze correspondant dans l'autre base du cylindre a pour limite le périmètre du parallélogramme construit sur AΓ. Mais ce même périmètre est aussi la limite de la surface composée de l'aire du cylindre sur l'arc de cercle ABΓ, du segment ABΓ et du segment correspondant dans la base opposée ; les surfaces indiquées se trouvent donc avoir la même limite, située dans un plan, et les deux tournent leur concavité du même côté ; de plus, l'une des deux entoure certaines parties de l'autre, d'autres parties leur étant communes ; il s'ensuit que celle qui est entourée est inférieure à l'autre[2]. En retranchant donc de part et d'autre le segment ABΓ et le segment opposé, il résulte que la surface du cylindre sur l'arc de cercle ABΓ est inférieure à la surface composée des parallélogrammes sur AE, EZ, ZΓ, des figures AEB, BZΓ et des figures opposées à ces dernières. Or la somme des surfaces des parallélo-

1. On a en effet, d'après Euclide I, 20,

$$EH+HZ>EZ.$$

En ajoutant des deux côtés de cette inégalité la somme AE+ZΓ, on trouve :

$$AH+H\Gamma>AE+EZ+Z\Gamma.$$

2. D'après le postulat 4.

ἕως [τῆς ἐπιφανείας] τῆς ἑτέρας βάσεως · τὰ δὴ παραλληλόγραμμα τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΓ καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ κυλίνδρου μείζονά ἐστιν τῶν παραλληλογράμμων τῶν περιεχομένων ὑπό τε τῶν ΑΕ, ΕΖ, ΖΓ καὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ κυλίνδρου [ἐπεὶ γὰρ αἱ ΕΗ, ΗΖ τῆς ΕΖ μείζους εἰσίν, κοιναὶ προσκείσθωσαν αἱ ΑΕ, ΖΓ]. Ὧι δὴ μείζονά ἐστιν, ἔστω τὸ Κ χωρίον. Τοῦ δὴ Κ χωρίου τὸ ἥμισυ ἤτοι μεῖζόν ἐστι τῶν σχημάτων τῶν περιεχομένων ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΖ, ΖΓ εὐθειῶν καὶ τῶν ΑΔ, ΔΒ, ΒΘ, ΘΓ περιφερειῶν ἢ οὔ. Ἔστω πρότερον μεῖζον. Τῆς δὴ ἐπιφανείας τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῶν παραλληλογράμμων τῶν κατὰ τὰς ΑΕ, ΕΖ, ΖΓ καὶ τοῦ ΑΕΖΓ τραπεζίου καὶ τοῦ κατεναντίον αὐτοῦ ἐν τῇ ἑτέρα βάσει τοῦ κυλίνδρου πέρας ἐστὶν ἡ περίμετρος τοῦ παραλληλογράμμου τοῦ κατὰ τὴν ΑΓ. Ἔστιν δὲ καὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς συγκειμένης ἐκ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου τῆς κατὰ τὴν ΑΒΓ περιφέρειαν καὶ τῶν τμημάτων τοῦ τε ΑΒΓ καὶ τοῦ ἀπεναντίον αὐτοῦ πέρας ἡ αὐτὴ περίμετρος · αἱ οὖν εἰρημέναι ἐπιφάνειαι τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσαι τυγχάνουσιν, ὅπερ ἐστὶν ἐν ἐπιπέδῳ, καί εἰσιν ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι, καί τινα μὲν περιλαμβάνει ἡ ἑτέρα αὐτῶν, τινὰ δὲ κοινὰ ἔχουσιν · ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ περιλαμβανομένη. Ἀφαιρεθέντων οὖν κοινῶν τοῦ τε ΑΒΓ τμήματος καὶ τοῦ ἀπεναντίον αὐτοῦ ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ἡ κατὰ τὴν ΑΒΓ περιφέρειαν τῆς συγκειμένης ἐπιφανείας ἔκ τε τῶν παραλληλογράμμων τῶν κατὰ τὰς ΑΕ, ΕΖ, ΖΓ καὶ τῶν σχημάτων τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ καὶ τῶν ἀπεναντίον αὐτῶν. Αἱ δὲ τῶν εἰρημένων παραλληλογράμμων ἐπιφάνειαι μετὰ τῶν εἰρη-

6 κοιναὶ BCGD : κοναὶ EH ‖ 10 δὴ Heiberg : δὲ BCDEGH ‖ 11 παραλληλογράμμων BDEGH : γραμμῶν C ‖ 24-25 τὴν ΑΒΓ περιφέρειαν Basil. : τῆς ΑΒΓ περιφερείας CDEGH ‖ 26 τῶν pr. DEGH : om. C ‖ 27 ΑΕΒ, ΒΖΓ Basil. : ΑΕ ΕΒ ΒΖΖΓ mss. BDEGH.

grammes indiqués et des figures indiquées est inférieure[1] à la surface composée des parallélogrammes sur ΑΗ et ΗΓ ; car la somme des parallélogrammes et de l'aire K, qui est supérieure à la somme des figures indiquées, était égale à la somme des parallélogrammes sur ΑΗ et ΗΓ ; il est donc évident que la somme des parallélogrammes compris entre ΑΗ, ΓΗ et les génératrices du cylindre est supérieure à l'aire du cylindre sur l'arc ΑΒΓ.

Mais si la moitié de l'aire K n'est pas supérieure à la somme des figures indiquées, on mènera des tangentes au segment, de manière que la somme des figures qui restent devienne inférieure[2] à la moitié de l'aire K, et la suite de la démonstration se fera comme plus haut[3].

Corollaire.

Ces propriétés étant démontrées il est évident, [subséquemment à ce qui a été dit plus haut], que, si l'on inscrit dans un cône isoscèle une pyramide, l'aire de la pyramide sans la base est inférieure à l'aire du cône [du fait que chacun des triangles limitant la pyramide a une aire inférieure à celle de la surface conique comprise entre les côtés du triangle, d'où il suit que la surface totale de la pyramide sans la base a une aire inférieure à celle de la surface du cône sans la base[4]], et que, si on circonscrit à un cône isoscèle une pyramide, la surface de la pyramide sauf la base a une aire supérieure à celle de la surface du cône sans la base [en vertu de la proposition qui suit la proposition ci-dessus[5]].

1. Du fait que, par hypothèse,
parallélogramme $ΑΗ + $p. $ΗΓ = $ p. $ΑΕ + $p. $ΕΖ + $p. $ΖΓ + $ aire K,
et que de l'inégalité $\frac{K}{2} > ΑΕΒΔ + ΒΖΓΘ$ on conclut que l'aire K est supérieure à la somme des deux segments ΑΕΒΔ, ΒΖΓΘ et des deux segments opposés dans l'autre base du cylindre.
2. Cf. prop. 6.
3. Cf. prop. 11.
4. Prop. 9.
5. Prop. 10.

μένων σχημάτων ἐλάττους εἰσὶν τῆς ἐπιφανείας τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῶν παραλληλογράμμων τῶν κατὰ τὰς ΑΗ, ΗΓ [μετὰ γὰρ τοῦ Κ μείζονος ὄντος τῶν σχημάτων ἴσαι ἦσαν αὐτοῖς]· δῆλον οὖν ὅτι τὰ παραλληλόγραμμα τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΓΗ καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ κυλίνδρου μείζονά ἐστι τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου τῆς κατὰ τὴν ΑΒΓ περιφέρειαν.

Εἰ δὲ μή ἐστιν μεῖζον τὸ ἥμισυ τοῦ Κ χωρίου τῶν εἰρημένων σχημάτων, ἀχθήσονται εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι τοῦ τμήματος, ὥστε γενέσθαι τὰ περιλειπόμενα σχήματα ἐλάσσονα τοῦ ἡμίσους τοῦ Κ, καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τοῖς ἔμπροσθεν δειχθήσεται.

⟨ΠΟΡΙΣΜΑ.⟩

Τούτων δὴ δεδειγμένων φανερὸν [ἐπὶ μὲν τῶν προειρημένων] ὅτι, ἐὰν εἰς κῶνον ἰσοσκελῆ πυραμὶς ἐγγραφῇ, ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τῆς βάσεως ἐλάσσων ἐστὶ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας [ἕκαστον γὰρ τῶν περιεχόντων τὴν πυραμίδα τριγώνων ἔλασσόν ἐστιν τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν τοῦ τριγώνου πλευρῶν· ὥστε καὶ ὅλη ⟨ἡ⟩ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τῆς βάσεως ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου χωρὶς τῆς βάσεως], καὶ ὅτι, ἐὰν περὶ κῶνον ἰσοσκελῆ πυραμὶς περιγραφῇ, ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τῆς βάσεως μείζων ἐστὶν τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου χωρὶς τῆς βάσεως [κατὰ τὸ συνεχὲς ἐκείνῳ].

10 τμήματος Nizzius : σχήματος BCDEGH ‖ 13 ΠΟΡΙΣΜΑ add. Stamatis ‖ 14 ἐπὶ μὲν BCDEGH : ἐστιν ἐκ prop. Heiberg ‖ 18 ἔλασσόν C : ἐλάσσων DEGH ‖ 20 ἡ add. Heiberg.

Corollaire.

Mais ce qui a été démontré rend évidentes deux autres propriétés. Si, d'une part, on inscrit dans un cylindre droit un prisme, l'aire du prisme, composée d'aires de parallélogrammes, est inférieure à l'aire du cylindre sans la base [du fait que chaque parallélogramme du prisme a une aire inférieure à celle de la surface du cylindre interceptée par lui] ; si, d'autre part, à un cylindre droit on circonscrit un prisme, la surface du prisme, composée de parallélogrammes, a une aire plus grande que celle de la surface du cylindre sans la base.

13[1].

Dans tout cylindre droit la surface sans la base est égale à l'aire d'un cercle dont le rayon est la moyenne proportionnelle[2] entre la génératrice du cylindre et le diamètre de sa base.

Soit A le cercle de base d'un cylindre droit, ΓΔ un segment de droite égal au diamètre du cercle A, EZ un segment de droite égal à la génératrice du cylindre ; soit H la moyenne proportionnelle[2] entre ΔΓ et EZ. Construisons un cercle B dont le rayon est égal à H. Il faut montrer que l'aire du cercle B est égale à la surface du cylindre sans la base.

1. Cette proposition est citée, sous le même numéro, par Pappus, *Coll.* I, p. 394, 11.

2. D'après Heiberg, *Quaestiones Archimedeae*, Copenhague, 1879, p. 70, Archimède avait écrit ici μέση ἀνάλογόν ἐστι.

⟨ΠΟΡΙΣΜΑ.⟩

Φανερὸν δὲ ἐκ τῶν ἀποδεδειγμένων ὅτι τε, ἐὰν εἰς κύλινδρον ὀρθὸν πρίσμα ἐγγραφῇ, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος ἡ ἐκ τῶν παραλληλογράμμων συγκειμένη ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου χωρὶς τῆς βάσεως [ἔλασσον γὰρ ἕκαστον παραλληλόγραμμον τοῦ πρίσματός ἐστι τῆς καθ' αὑτὸ τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείας], καὶ ὅτι, ἐὰν περὶ κύλινδρον ὀρθὸν πρίσμα περιγραφῇ, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος ἡ ἐκ τῶν παραλληλογράμμων συγκειμένη μείζων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου χωρὶς τῆς βάσεως.

ιγ'.

Παντὸς κυλίνδρου ὀρθοῦ ἡ ἐπιφάνεια χωρὶς τῆς βάσεως ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέσον λόγον ἔχει τῆς πλευρᾶς τοῦ κυλίνδρου καὶ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου.

Ἔστω κυλίνδρου τινὸς ὀρθοῦ βάσις ὁ Α κύκλος, καὶ ἔστω τῇ μὲν διαμέτρῳ τοῦ Α κύκλου ἴση ἡ ΓΔ, τῇ δὲ πλευρᾷ τοῦ κυλίνδρου ἡ ΕΖ, ἐχέτω δὲ μέσον λόγον τῶν ΔΓ, ΕΖ ἡ Η, καὶ κείσθω κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ Η, ὁ Β· δεικτέον ὅτι ὁ Β κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου χωρὶς τῆς βάσεως.

1 ΠΟΡΙΣΜΑ add. Stamatis ‖ 8 καὶ om. DEH ‖ 19 ἐχέτω BCGH : ἔχετο D εἴχετο E.

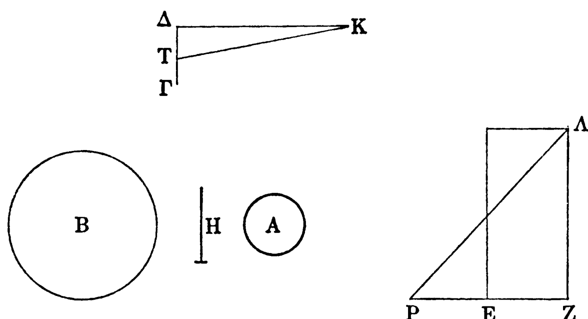


Fig. 15.

Si, en effet, elle n'est pas égale, elle est plus grande ou plus petite. Qu'elle soit d'abord, si possible, plus petite. Or deux grandeurs inégales étant données, à savoir la surface du cylindre et l'aire du cercle, il est possible d'inscrire au cercle B un polygone équilatéral et de lui en circonscrire un autre, de manière que le rapport du polygone circonscrit au polygone inscrit soit inférieur au rapport de la surface du cylindre à l'aire du cercle[1]. Imaginons donc un polygone circonscrit et un autre inscrit et circonscrivons au cercle A une figure rectiligne semblable au polygone circonscrit au cercle B, et construisons sur cette figure rectiligne un prisme, qui sera ainsi circonscrit au cylindre. Soit, de plus, le segment de droite ΚΔ égal au périmètre de la figure rectiligne circonscrite au cercle A, le segment de droite ΛΖ égal à ΚΔ, et le segment de droite ΓΤ, moitié de ΓΔ. Le triangle ΚΔΤ sera alors équivalent à la figure rectiligne circonscrite au cercle A, [puisqu'il a une base égale au périmètre (sc. de cette figure) et une hauteur égale au rayon du cercle A], et le parallélogramme ΕΛ sera équivalent à la surface du prisme circonscrit au cylindre, [puisqu'il est compris entre

1. Cf. prop. 5.

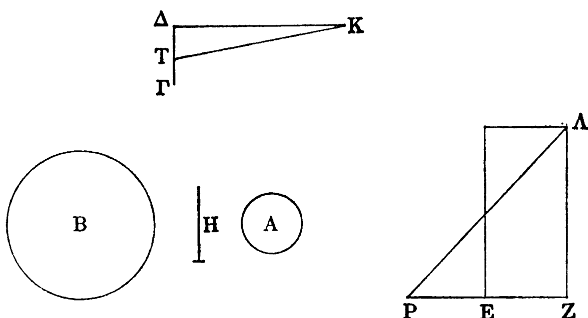


Fig. 15.

Εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσος, ἤτοι μείζων ἐστὶ ἢ ἐλάσσων. Ἔστω πρότερον, εἰ δυνατόν, ἐλάσσων. Δύο δὴ μεγεθῶν ὄντων ἀνίσων τῆς τε ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ Β κύκλου δυνατόν ἐστιν εἰς τὸν Β κύκλον ἰσόπλευρον πολύγωνον ἐγγράψαι καὶ ἄλλο περιγράψαι, ὥστε τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου πρὸς τὸν Β κύκλον. Νοείσθω δὴ περιγεγραμμένον καὶ ἐγγεγραμμένον, καὶ περὶ τὸν Α κύκλον περιγεγράφθω εὐθύγραμμον ὅμοιον τῷ περὶ τὸν Β περιγεγραμμένῳ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τοῦ εὐθυγράμμου πρίσμα· ἔσται δὴ περὶ τὸν κύλινδρον περιγεγραμμένον. Ἔστω δὲ καὶ τῇ περιμέτρῳ τοῦ εὐθυγράμμου τοῦ περὶ τὸν Α κύκλον ἴση ἡ ΚΔ καὶ τῇ ΚΔ ἴση ἡ ΔΖ, τῆς δὲ ΓΔ ἡμίσεια ἔστω ἡ ΓΤ· ἔσται δὴ τὸ ΚΔΤ τρίγωνον ἴσον τῷ περιγεγραμμένῳ εὐθυγράμμῳ περὶ τὸν Α κύκλον [ἐπειδὴ βάσιν μὲν ἔχει τῇ περιμέτρῳ ἴσην, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Α κύκλου], τὸ δὲ ΕΛ παραλληλόγραμμον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ πρίσματος τοῦ περὶ τὸν κύλινδρον περιγεγραμμένου [ἐπειδὴ περιέχεται

12 δὲ Heiberg : δὴ BCDEGH ‖ 15 τῷ C : τὸ DEGH.

des côtés dont l'un est égal à la génératrice du cylindre, l'autre au périmètre de la base du prisme]. Construisons donc EP égal EZ ; le triangle ZPΛ est par conséquent équivalent au parallélogramme EΛ, et donc aussi à la surface du prisme. Puisque les figures rectilignes circonscrites aux cercles A et B sont semblables, elles auront le même rapport que les carrés des rayons de ces cercles. Le triangle KTΔ sera donc à la figure rectiligne circonscrite au cercle B comme le carré sur TΔ est au carré sur H [du fait que les segments TΔ et H sont égaux aux rayons]. Mais le rapport des carrés sur TΔ et H est égal au rapport des longueurs des segments TΔ et PZ [du moment que H est moyenne proportionnelle entre TΔ et PZ, comme étant moyenne proportionnelle aussi entre ΓΔ et EZ ; mais comment cela? Puisque ΔT est égal à TΓ et PE égal à EZ, ΓΔ est double de TΔ, et PZ double de PE. Le segment ΔΓ est donc à ΔT comme PZ est à ZE. Le rectangle de côtés ΓΔ et EZ est donc équivalent au rectangle de côtés TΔ, PZ. Mais le rectangle de côtés ΓΔ, EZ est équivalent au carré sur H ; le rectangle de côtés TΔ, PZ est donc à son tour équivalent au carré sur H. Le segment TΔ est, par conséquent, à H comme H est à PZ ; le carré sur TΔ est donc au carré sur H comme TΔ est à PZ[1], du moment que si trois segments de droite sont proportionnels, le premier est au troisième comme une figure construite sur le premier est à la figure semblable et semblablement construite sur le second]. Mais le triangle KTΔ a au triangle PΛZ le même rapport que le segment TΔ a au segment PZ, [puisque KΔ est égal à ΛZ]. Le triangle KTΔ a donc à la figure rectiligne circonscrite au cercle B le même rapport qu'ont entre eux les triangles TKΔ et PZΛ. Le triangle ZΛP est donc équivalent[2] à la figure rectiligne circonscrite

1. Cf. les notes complémentaires.
2. Cf. Eucl. V, 9.

ὑπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ κυλίνδρου καὶ τῆς ἴσης τῇ περιμέτρῳ τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος]. Κείσθω δὴ τῇ ΕΖ ἴση ἡ ΕΡ· ἴσον ἄρα ἐστὶν τὸ ΖΡΛ τρίγωνον τῷ ΕΛ παραλληλογράμμῳ, ὥστε καὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ πρίσματος. Καὶ ἐπεὶ ὅμοιά ἐστιν τὰ εὐθύγραμμα τὰ περὶ τοὺς Α, Β κύκλους περιγεγραμμένα, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον [τὰ εὐθύγραμμα], ὅνπερ αἱ ἐκ τῶν κέντρων δυνάμει· ἕξει ἄρα τὸ ΚΤΔ τρίγωνον πρὸς τὸ περὶ τὸν Β κύκλον εὐθύγραμμον λόγον, ὃν ἡ ΤΔ πρὸς Η δυνάμει [αἱ γὰρ ΤΔ, Η ἴσαι εἰσὶν ταῖς ἐκ τῶν κέντρων]. Ἀλλ' ὃν ἔχει λόγον ἡ ΤΔ πρὸς Η δυνάμει, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ἡ ΤΔ πρὸς ΡΖ μήκει [ἡ γὰρ Η τῶν ΤΔ, ΡΖ μέση ἐστὶ ἀνάλογον διὰ τὸ καὶ τῶν ΓΔ, ΕΖ· πῶς δὲ τοῦτο ; ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΔΤ τῇ ΤΓ, ἡ δὲ ΡΕ τῇ ΕΖ, διπλασία ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ τῆς ΤΔ, καὶ ἡ ΡΖ τῆς ΡΕ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΓ πρὸς ΔΤ, οὕτως ἡ ΡΖ πρὸς ΖΕ. Τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΕΖ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῶν ΤΔ, ΡΖ. Τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΕΖ ἴσον ἐστὶν τὸ ἀπὸ Η· καὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΤΔ, ΡΖ ἄρα ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Η· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΤΔ πρὸς Η, οὕτως ἡ Η πρὸς ΡΖ. Ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΤΔ πρὸς ΡΖ, τὸ ἀπὸ τῆς ΤΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Η· ἐὰν γὰρ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας εἶδος τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένον]· ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ ΤΔ πρὸς ΡΖ μήκει, τοῦτον ἔχει τὸ ΚΤΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΡΛΖ [ἐπειδήπερ ἴσαι εἰσὶν αἱ ΚΔ, ΛΖ]· τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει τὸ ΚΤΔ τρίγωνον πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τὸ περὶ τὸν Β κύκλον περιγεγραμμένον, ὅνπερ τὸ ΤΚΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΡΖΛ τρίγωνον. Ἴσον ἄρα ἐστὶν τὸ ΖΛΡ τρίγωνον τῷ περὶ τὸν Β κύκλον

9 λόγον om. (C) || 10 τῶν κέντρων CG : τοῦ κέντρου BDEH : 20 ὡς add. Basil. || 22 πρὸς alt. BDEGH : καὶ C || 29 τῷ DE GH : τὸ C.

au cercle B. Par conséquent, la surface du prisme circonscrit au cylindre A est à son tour équivalente à la figure rectiligne circonscrite au cercle B. Puisque, d'autre part, le rapport de la figure rectiligne circonscrite au cercle B à la figure inscrite dans ce cercle est inférieur au rapport de la surface du cylindre A à l'aire du cercle B, le rapport de la surface du prisme circonscrit au cylindre à l'aire de la figure rectiligne inscrite dans le cercle B est à son tour inférieur au rapport de la surface du cylindre à l'aire du cercle B ; la relation déduite de cela par permutation est absurde. Car on a démontré que la surface du prisme circonscrit au cylindre est supérieure à la surface du cylindre, et la figure rectiligne inscrite dans le cercle B est inférieure au cercle B. L'aire du cercle B n'est donc pas inférieure à la surface du cylindre.

Qu'elle soit donc, si possible, plus grande. Imaginons de nouveau une figure rectiligne inscrite dans le cercle B et une autre qui lui soit circonscrite, de manière que le rapport de la figure circonscrite à la figure inscrite soit inférieur au rapport du cercle B à la surface du cylindre[1]. Inscrivons dans le cercle A un polygone semblable à celui qui est inscrit dans le cercle B, et construisons un prisme sur le polygone inscrit dans le cercle (sc. A). Soit de nouveau KΔ un segment de droite égal au périmètre de la figure rectiligne inscrite dans le cercle A, et ZΛ un segment égal à KΔ. Le triangle KTΔ sera dès lors supérieur à l'aire de la figure rectiligne inscrite dans le cercle A [du fait qu'il a une base (sc.

1. Cf. prop. 5.

περιγεγραμμένῳ εὐθυγράμμῳ· ὥστε καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος τοῦ περὶ τὸν Α κύλινδρον περιγεγραμμένου τῷ εὐθυγράμμῳ τῷ περὶ τὸν Β κύκλον ἴση ἐστίν. Καὶ ἐπεὶ ἐλάσσονα λόγον ἔχει τὸ εὐθύγραμμον τὸ περὶ τὸν Β κύκλον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ κύκλῳ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ Α κυλίνδρου πρὸς τὸν Β κύκλον, ἐλάσσονα λόγον ἕξει καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος τοῦ περὶ τὸν κύλινδρον περιγεγραμμένου πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ κύκλῳ τῷ Β ἐγγεγραμμένον ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου πρὸς τὸν Β κύκλον· καὶ ἐναλλάξ· ὅπερ ἀδύνατον [ἡ μὲν γὰρ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸν κύλινδρον μείζων οὖσα δέδεικται τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου, τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον εὐθύγραμμον ἐν τῷ Β κύκλῳ ἔλασσόν ἐστιν τοῦ Β κύκλου]. Οὐκ ἄρα ἐστὶν ὁ Β κύκλος ἐλάσσων τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου.

Ἔστω δή, εἰ δυνατόν, μείζων. Πάλιν δὴ νοείσθω εἰς τὸν Β κύκλον εὐθύγραμμον ἐγγεγραμμένον καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον, ὥστε τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἢ τὸν Β κύκλον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν Α κύκλον πολύγωνον ὅμοιον τῷ εἰς τὸν Β κύκλον ἐγγεγραμμένῳ, καὶ πρίσμα ἀναγεγράφθω ἀπὸ τοῦ ἐν τῷ κύκλῳ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου· καὶ πάλιν ἡ ΚΔ ἴση ἔστω τῇ περιμέτρῳ τοῦ εὐθυγράμμου τοῦ ἐν τῷ Α κύκλῳ ἐγγεγραμμένου, καὶ ἡ ΖΛ ἴση αὐτῇ ἔστω. Ἔσται δὴ τὸ μὲν ΚΤΔ τρίγωνον μεῖζον τοῦ εὐθυγράμμου τοῦ ἐν τῷ Α κύκλῳ ἐγγεραμμένου [διότι βάσιν μὲν ἔχει τὴν

9 ἐγγεγραμμένον C : γεγραμμένον BDEGH ‖ 13 ἐγγεγραμμένον C : γεγραμμένον BDEGH ‖ 17 δὴ utrumque Heiberg : δὲ BCDEGH ‖ 18-19 καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον om. C ‖ 20 ἔχειν CG : ἔχει DEH ‖ ἢ BDEGH : ἤπερ C ‖ 23 ἐγγεγραμμένῳ (C)G : ἐγγεγραμμένον DEGH.

KΔ) égale au périmètre du polygone et une hauteur (sc. ΔT) supérieure à la perpendiculaire abaissée du centre sur un des côtés du polygone], et le parallélogramme EΛ sera équivalent à la surface du prisme, somme des parallélogrammes (sc. qui constituent les faces du prisme) [du fait que EΛ admet comme côtés la génératrice du cylindre et un segment égal au périmètre de la figure rectiligne qui forme la base du prisme]. Par conséquent, le triangle PΛZ est à son tour équivalent à la surface du prisme. Puisque, d'autre part, les figures rectilignes inscrites dans les cercles A et B sont semblables entre elles, elles ont entre elles le même rapport que les carrés des rayons de ces cercles. Mais les triangles KTΔ, ZPΛ sont eux aussi dans le rapport des carrés des rayons des cercles[1]. La figure rectiligne inscrite dans le cercle A a donc à la figure rectiligne inscrite dans le cercle B le même rapport que celui qu'a le triangle KTΔ au triangle ΛZP. Or l'aire de la figure rectiligne inscrite dans le cercle A est inférieure à l'aire du triangle KTΔ ; la figure rectiligne inscrite dans le cercle B est donc à son tour plus petite que le triangle ZPΛ ; il s'ensuit qu'elle est aussi plus petite que la surface du prisme inscrit dans le cylindre, ce qui est impossible [puisque, en effet, la figure rectiligne circonscrite au cercle B a à la figure inscrite un rapport inférieur à celui qu'a le cercle B à la surface du cylindre, et que la proposition déduite de cette relation par permutation est vraie ; puisque, d'autre part, la figure circonscrite au cercle B est supérieure au cercle B, il s'ensuit que l'aire de la figure inscrite dans le cercle B est supérieure à l'aire de la surface du cylindre, et donc aussi à la surface du prisme]. L'aire du cercle B n'est donc pas supérieure à la surface du cylindre. Mais nous avons démontré qu'elle n'est pas inférieure non plus. Elle est donc égale.

1. On a, en effet, d'après la note de la page 39 :
$\frac{\mathrm{KT\Delta}}{\mathrm{P\Lambda Z}} = \frac{\mathrm{T\Delta}}{\mathrm{ZP}} = \frac{\overline{\Delta \mathrm{T}}^2}{\mathrm{H}^2}$; puisque TΔ est égal au rayon du cercle A et H égal au rayon du cercle B, le rapport des aires des deux

περίμετρον αὐτοῦ, ὕψος δὲ μεῖζον τῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου {πλευρᾶς} ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου ἀγομένης καθέτου], τὸ δὲ ΕΛ παραλληλόγραμμον ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ πρίσματος τῇ ἐκ τῶν παραλληλογράμμων συγκειμένῃ [διότι περιέχεται ὑπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ κυλίνδρου καὶ τῆς ἴσης τῇ περιμέτρῳ τοῦ εὐθυγράμμου, ὅ ἐστιν βάσις τοῦ πρίσματος]· ὥστε καὶ τὸ ΡΛΖ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ πρίσματος. Καὶ ἐπεὶ ὅμοιά ἐστι τὰ εὐθύγραμμα τὰ ἐν τοῖς Α, Β κύκλοις ἐγγεγραμμένα, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς ἄλληλα ὃν αἱ ἐκ τῶν κέντρων αὐτῶν δυνάμει. Ἔχει δὲ καὶ τὰ ΚΤΔ, ΖΡΔ τρίγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον, ὃν αἱ ἐκ τῶν κέντρων τῶν κύκλων δυνάμει· τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ Α κύκλῳ ἐγγεγραμμένον πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ Β ἐγγεγραμμένον καὶ τὸ ΚΤΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΛΖΡ τρίγωνον. Ἔλασσον δέ ἐστι τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ Α κύκλῳ ἐγγεγραμμένον τοῦ ΚΤΔ τριγώνου· ἔλασσον ἄρα καὶ τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ Β κύκλῳ ἐγγεγραμμένον τοῦ ΖΡΛ τριγώνου· ὥστε καὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος τοῦ ἐν τῷ κυλίνδρῳ ἐγγεγραμμένου· ὅπερ ἀδύνατον [ἐπεὶ γὰρ ἐλάσσονα λόγον ἔχει τὸ περιγεγραμμένον εὐθύγραμμον περὶ τὸν Β κύκλον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἢ ὁ Β κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, καὶ ἐναλλάξ, μεῖζον δέ ἐστι τὸ περιγεγραμμένον περὶ τὸν Β κύκλον τοῦ Β κύκλου, μεῖζον ἄρα ἐστὶν τὸ ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ Β κύκλῳ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου· ὥστε καὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος]. Οὐκ ἄρα μείζων ἐστὶν ὁ Β κύκλος τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων· ἴσος ἄρα ἐστίν.

2 πλευρᾶς del. Torellius || 3 τῇ BDEGH : (ἐν) τῇ C || 13-14 Α κύκλῳ ἐγγεγραμμένον πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ om. C || 29 ἴσος BDEGH : ἴσον C.

14.

Dans tout cône isoscèle, la surface sans la base est équivalente à un cercle dont le rayon est la moyenne proportionnelle entre la génératrice du cône et le rayon du cercle de base[1].

Soit un cône isoscèle admettant comme base le cercle A ; soit Γ le rayon de A, Δ un segment de droite égal à la génératrice du cône, E la moyenne proportionnelle entre Γ et Δ, et B un cercle de rayon E. Je dis que le cercle B est équivalent à la surface du cône sans la base.

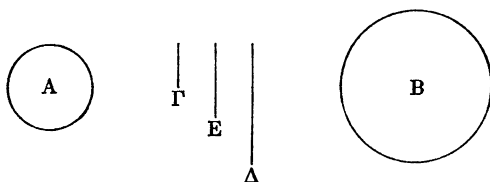


Fig. 16.

En effet, si le cercle B n'est pas équivalent à la surface du cône, il est ou bien supérieur ou bien inférieur. Qu'il soit d'abord inférieur. Il y a donc deux grandeurs inégales, la surface du cône et le cercle B, et la surface du cône en est la plus grande. Il est par conséquent possible[2] d'inscrire au cercle B un polygone équilatéral et de lui en circonscrire un autre, semblable au polygone inscrit, de manière que le rapport du polygone circonscrit au polygone inscrit soit inférieur au rapport de la surface du cône à l'aire du cercle B. Imaginons donc aussi un polygone circonscrit au cercle A et semblable au polygone circonscrit au cercle B et construisons sur le polygone circonscrit au cercle A

triangles KTΔ et ZPΛ est bien égal au rapport des carrés des cercles A et B.

1. Cette proposition est citée par Pappus, *Coll.* I, p. 290 (éd. F. Hultsch).

2. D'après la proposition 5.

ιδ'.

Παντὸς κώνου ἰσοσκελοῦς χωρὶς τῆς βάσεως ἡ ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέσον λόγον ἔχει τῆς πλευρᾶς τοῦ κώνου καὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ὅς ἐστιν βάσις τοῦ κώνου.

Ἔστω κῶνος ἰσοσκελής, οὗ βάσις ὁ Α κύκλος, ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου ἔστω ἡ Γ, τῇ δὲ πλευρᾷ τοῦ κώνου ἔστω ἴση ἡ Δ, τῶν δὲ Γ, Δ μέση ἀνάλογον ἡ Ε, ὁ δὲ Β κύκλος ἐχέτω τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῇ Ε ἴσην· λέγω ὅτι ὁ Β κύκλος ἐστὶν ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου χωρὶς τῆς βάσεως.

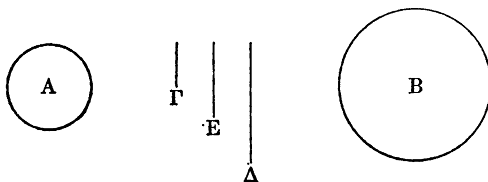


Fig. 16.

Εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσος, ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ ἐλάσσων. Ἔστω πρότερον ἐλάσσων. Ἔστι δὴ δύο μεγέθη ἄνισα ἥ τε ἐπιφάνεια τοῦ κώνου καὶ ὁ Β κύκλος, καὶ μείζων ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου· δυνατὸν ἄρα εἰς τὸν Β κύκλον πολύγωνον ἰσόπλευρον ἐγγράψαι καὶ ἄλλο περιγράψαι ὅμοιον τῷ ἐγγεγραμμένῳ, ὥστε τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχειν τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου πρὸς τὸν Β κύκλον. Νοείσθω δὴ καὶ περὶ τὸν Α κύκλον πολύγωνον περιγεγραμμένον ὅμοιον τῷ περὶ τὸν Β κύκλον περιγεγραμμένῳ, καὶ ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν Α κύκλον περιγεγραμμένου πολυγώνου

8 Β om. C || 17 ἔχειν C : ἔχει DEGH.

une pyramide ayant même sommet que le cône. Puisque les polygones circonscrits aux cercles A et B sont semblables entre eux, leurs aires ont entre elles le même rapport qu'ont entre eux les carrés des rayons, c'est-à-dire le rapport des carrés sur Γ et sur E, c'est-à-dire encore le rapport des segments de droite[1] Γ et Δ. Or ce dernier rapport est le même que le rapport du polygone circonscrit au cercle A à la surface de la pyramide circonscrite au cône[2]. Le segment de droite Γ est en effet égal à la perpendiculaire abaissée du centre sur un des côtés du polygone, Δ est égal à la génératrice du cône, et le périmètre du polygone est hauteur commune pour les moitiés des aires[3] ; par conséquent la figure rectiligne circonscrite au cercle A est à la figure circonscrite au cercle B comme cette même figure rectiligne (sc. circonscrite au cercle A) est à la surface de la pyramide circonscrite au cône ; il s'ensuit que la surface de la pyramide est égale[4] à la figure rectiligne circonscrite au cercle B. Du moment donc que le rapport de la figure rectiligne, circonscrite au cercle B, à la figure inscrite dans ce cercle est inférieur au rapport de la surface du cône au cercle B, le rapport de la surface de la pyramide, circonscrite au cône, à la figure rectiligne inscrite au cercle B sera inférieur au rapport de la surface du cône à l'aire du cercle B, ce qui est impossible ; on a en effet démontré que la surface de la pyramide est supérieure à la surface du cône, et la figure rectiligne inscrite dans le cercle B sera inférieure au cercle B. Le cercle B ne sera donc pas inférieur à la surface du cône.

Je dis qu'il n'est pas, non plus, supérieur. Qu'il soit, en

1. Cf. Eucl. VI, 20, coroll. 2.

2. Le polygone circonscrit est en effet équivalent à un triangle ayant pour base le périmètre du polygone et pour hauteur le rayon Γ, et la surface de la pyramide est équivalente à un triangle de même base ayant pour hauteur la génératrice, Δ, du cône ; cf. Eucl. VI, 1.

3. Le texte grec, l. 11 et 12, est altéré et obscur.

4. Cf. Eucl. V, 9.

πυραμὶς ἀνεστάτω ἀναγεραμμένη τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ. Ἐπεὶ οὖν ὅμοιά ἐστιν τὰ πολύγωνα τὰ περὶ τοὺς Α, Β κύκλους περιγεγραμμένα, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς ἄλληλα, ὃν αἱ ἐκ τοῦ κέντρου δυνάμει πρὸς ἀλλήλας, τουτέστιν ὃν ἔχει ἡ Γ πρὸς Ε δυνάμει, τουτέστιν ἡ Γ πρὸς Δ μήκει. Ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ Γ πρὸς Δ μήκει, τοῦτον ἔχει τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον περὶ τὸν Α κύκλον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸν κῶνον [ἡ μὲν γὰρ Γ ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου καθέτῳ ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου, ἡ δὲ Δ τῇ πλευρᾷ τοῦ κώνου· κοινὸν δὲ ὕψος ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου πρὸς τὰ ἡμίση τῶν ἐπιφανειῶν]· τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει τὸ εὐθύγραμμον τὸ περὶ τὸν Α κύκλον πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τὸ περὶ τὸν Β κύκλον καὶ αὐτὸ τὸ εὐθύγραμμον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸν κῶνον· ὥστε ἴση ἐστὶν ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος τῷ εὐθυγράμμῳ τῷ περὶ τὸν Β κύκλον περιγεγραμμένῳ. Ἐπεὶ οὖν ἐλάσσονα λόγον ἔχει τὸ εὐθύγραμμον τὸ περὶ τὸν Β κύκλον περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου πρὸς τὸν Β κύκλον, ἐλάσσονα λόγον ἕξει ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος τῆς περὶ τὸν κῶνον περιγεγραμμένης πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ Β κύκλῳ ἐγγεγραμμένον ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου πρὸς τὸν Β κύκλον· ὅπερ ἀδύνατον [ἡ μὲν γὰρ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος μείζων οὖσα δέδεικται τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον εὐθύγραμμον ἐν τῷ Β κύκλῳ ἔλασσον ἔσται τοῦ Β κύκλου]. Οὐκ ἄρα ὁ Β κύκλος ἐλάσσων ἔσται τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου.

Λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ μείζων. Εἰ γὰρ δυνατόν ἐστιν, ἔστω

12 πρὸς BDEGH : καὶ C || 14-15 πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τὸ περὶ τὸν Β κύκλον om. C || 18 περιγεγραμμένῳ G : περιγεγραμμένη DEH || ἐλάσσονα GH : ἔλασσο D ἐλάσσω E.

effet, supérieur si possible. Imaginons de nouveau un polygone inscrit dans le cercle B et un autre polygone qui lui soit circonscrit, de manière que le rapport du polygone circonscrit au polygone inscrit soit inférieur au rapport de l'aire du cercle B à la surface du cône[1]. Imaginons, de plus, un polygone inscrit dans le cercle A et semblable au polygone inscrit dans le cercle B, et construisons sur ce polygone une pyramide ayant le même sommet que le cône. Du moment, donc, que les polygones inscrits dans les cercles A et B sont semblables, ils ont entre eux le rapport des carrés sur les rayons de ces cercles[2]. Le polygone est donc au polygone comme le segment de droite Γ est au segment Δ[3]. Mais le rapport de Γ à Δ est supérieur au rapport du polygone inscrit dans le cercle A à la surface de la pyramide inscrite dans le cône ; car le rapport du rayon du cercle A à la génératrice du cône est supérieur au rapport de la perpendiculaire abaissée du centre sur un des côtés du polygone à la perpendiculaire abaissée du sommet du cône sur le côté du polygone. Il s'ensuit que le rapport du polygone inscrit dans le cercle A au polygone inscrit dans le cercle B est supérieur au rapport de ce même polygone (sc. inscrit dans le cercle A) à la surface de la pyramide. La surface de la pyramide est par conséquent plus grande que l'aire du polygone inscrit dans le cercle B. Mais le rapport du polygone circonscrit au cercle B au polygone inscrit dans ce cercle est inférieur au rapport de l'aire du cercle B à la surface du cône, à plus forte raison, par conséquent, le rapport du polygone circonscrit au cercle B à la surface de la pyramide inscrite au cône est inférieur au rapport de l'aire du cercle B à la surface du cône, ce qui est impossible, du moment que le polygone circonscrit est plus grand que le cercle B et que la surface de la pyramide à l'intérieur du cône

1. Cf. prop. 5.
2. D'après Eucl. XII, 1.
3. D'après Eucl. VI, 20, coroll. 2.

μείζων. Πάλιν δὴ νοείσθω εἰς τὸν Β κύκλον πολύγωνον ἐγγεγραμμένον καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον, ὥστε τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχειν τοῦ ὃν ἔχει ὁ Β κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου, καὶ εἰς τὸν Α κύκλον νοείσθω ἐγγεγραμμένον πολύγωνον ὅμοιον τῷ εἰς τὸν Β κύκλον ἐγγεγραμμένῳ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπ᾽ αὐτοῦ πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ. Ἐπεὶ οὖν ὅμοιά ἐστι τὰ ἐν τοῖς Α, Β κύκλοις ἐγγεγραμμένα, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον πρὸς ἄλληλα, ὃν αἱ ἐκ τῶν κέντρων δυνάμει πρὸς ἀλλήλας· τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον καὶ ἡ Γ πρὸς τὴν Δ μήκει. Ἡ δὲ Γ πρὸς τὴν Δ μείζονα λόγον ἔχει ἢ τὸ πολύγωνον τὸ ἐν τῷ Α κύκλῳ ἐγγεγραμμένον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸν κῶνον [ἡ γὰρ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Α κύκλου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀγομένη κάθετος ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου πρὸς τὴν ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου κάθετον ἀγομένην ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου]· μείζονα ἄρα λόγον ἔχει τὸ πολύγωνον τὸ ἐν τῷ Α κύκλῳ ἐγγεγραμμένον πρὸς τὸ πολύγωνον τὸ ἐν τῷ Β ἐγγεγραμμένον ἢ αὐτὸ τὸ πολύγωνον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος τοῦ ἐν τῷ Β πολυγώνου ἐγγεγραμμένου. Ἐλάσσονα δὲ λόγον ἔχει τὸ πολύγωνον τὸ περὶ τὸν Β κύκλον περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἢ ὁ Β κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου· πολλῷ ἄρα τὸ πολύγωνον τὸ περὶ τὸν Β κύκλον περιγεγραμμένον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος τῆς ἐν τῷ κώνῳ ἐγγεγραμμένης ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ὁ Β κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου· ὅπερ

1 δὴ Heiberg : δὲ BDEGH ‖ 4 ἔχειν G : ἔχει DEH ‖ 5 τὸν GH : τὸ DE ‖ 18 πρὸς τὴν ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου add. Basil.

est inférieure à la surface du cône. L'aire du cercle B n'est donc pas, non plus, supérieure à la surface du cône ; mais nous avons montré qu'elle n'est pas inférieure à cette surface ; elle lui est donc égale.

15

Dans tout cône isoscèle, le rapport de la surface à la base est égal au rapport de la génératrice du cône au rayon du cercle de base.

Soit un cône isoscèle ayant pour base le cercle A ; soit B un segment de droite égal au rayon du cercle A, et Γ un segment égal à la génératrice du cône ; il faut montrer que le rapport de la surface du cône au cercle A est égal au rapport de Γ à B.

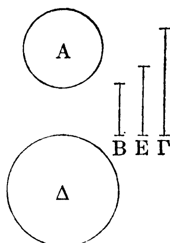


Fig. 17.

Entre B et Γ prenons la moyenne proportionnelle E et construisons le cercle Δ ayant son rayon égal à E ; le cercle Δ est donc équivalent à la surface du cône[1] ; cette proposition a en effet été démontrée précédemment. Mais on a montré que le rapport du cercle Δ au cercle A est égal au rapport du segment Γ au segment B ; chacun de ces rapports est en effet égal au rapport des carrés de E et de B, puisque les cercles ont entre eux le même rapport que les carrés de leurs diamètres ou de leurs rayons[2] ; on peut substituer en

1. Cf. prop. 14.
2. On a en effet :
$$\frac{\text{cercle } \Delta}{\text{cercle A}} = \frac{E^2}{B^2} = \frac{B \cdot \Gamma}{B^2} = \frac{\Gamma}{B}.$$

ἀδύνατον [τὸ μὲν γὰρ περιγεγραμμένον πολύγωνον μεῖζόν ἐστιν τοῦ Β κύκλου, ἡ δὲ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος τῆς ἐν τῷ κώνῳ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου]. Οὐκ ἄρα οὐδὲ μείζων ἐστὶν ὁ κύκλος τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων· ἴσος ἄρα.

ιε′.

Παντὸς κώνου ἰσοσκελοῦς ἡ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν βάσιν τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἡ πλευρὰ τοῦ κώνου πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως τοῦ κώνου.

Ἔστω κῶνος ἰσοσκελής, οὗ βάσις ὁ Α κύκλος, ἔστω δὲ τῇ μὲν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Α ἴση ἡ Β, τῇ δὲ πλευρᾷ τοῦ κώνου ἡ Γ· δεικτέον ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου πρὸς τὸν Α κύκλον καὶ ἡ Γ πρὸς τὴν Β.

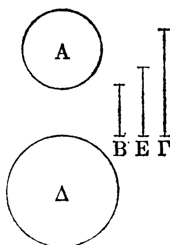


Fig. 17.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν Β, Γ μέση ἀνάλογον ἡ Ε, καὶ ἐκκείσθω κύκλος ὁ Δ ἴσην ἔχων τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῇ Ε· ὁ Δ ἄρα κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου [τοῦτο γὰρ ἐδείχθη ἐν τῷ πρὸ τούτου]. Ἐδείχθη δὲ ὁ Δ κύκλος πρὸς τὸν Α κύκλον λόγον ἔχων τὸν αὐτὸν τῷ τῆς Γ πρὸς Β μήκει [ἑκάτερος γὰρ ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς Ε πρὸς Β δυνάμει διὰ τὸ τοὺς κύκλους πρὸς ἀλλήλους εἶναι ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα πρὸς ἄλληλα, ὁμοίως δὲ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ἐκ τῶν κέντρων τῶν κύκλων· εἰ γὰρ

effet dans ce rapport aux diamètres les moitiés des diamètres, c'est-à-dire les rayons ; or B et E sont égaux aux rayons. Il est donc évident que le rapport de la surface du cône au cercle A est égal au rapport de Γ à B.

16.

Si un cône isoscèle est coupé par un plan parallèle à la base, l'aire du cône comprise entre les plans parallèles est équivalente à un cercle dont le rayon est la moyenne proportionnelle entre la partie de la génératrice du cône située entre les plans parallèles et un segment égal à la somme des rayons des cercles dans les plans parallèles[1].

Soit un cône, dont l'intersection par un plan passant par l'axe soit un triangle égal au triangle ΑΒΓ ; coupons le cône par un plan parallèle à la base ; soit ΔΕ la trace de ce plan, ΒΗ l'axe du cône ; construisons un cercle dont le rayon est la moyenne proportionnelle entre ΑΔ et la somme de ΔΖ et ΗΑ, et soit Θ ce cercle ; je dis que le cercle Θ est équivalent à l'aire du cône comprise entre ΔΕ et ΑΓ.

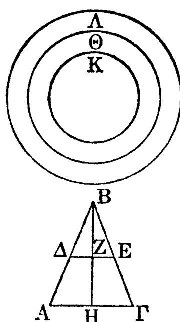


Fig. 18.

1. Proposition citée par Pappus, *Coll.* I, p. 366.

αἱ διάμετροι, καὶ τὰ ἡμίση, τουτέστιν αἱ ἐκ τῶν κέντρων· ταῖς δὲ ἐκ τῶν κέντρων ἴσαι εἰσὶν αἱ Β, Ε]. Δῆλον οὖν ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου πρὸς τὸν Α κύκλον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἡ Γ πρὸς Β μήκει.

ιϛ′.

Ἐὰν κῶνος ἰσοσκελὴς ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ τῇ βάσει, τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ἐπιφανείᾳ ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέσον λόγον ἔχει τῆς τε πλευρᾶς τοῦ κώνου τῆς μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων καὶ τῆς ἴσης ἀμφοτέραις ταῖς ἐκ τῶν κέντρων τῶν κύκλων τῶν ἐν τοῖς παραλλήλοις ἐπιπέδοις.

Ἔστω κῶνος, οὗ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον ἴσον τῷ ΑΒΓ, καὶ τετμήσθω παραλλήλῳ ἐπιπέδῳ τῇ βάσει, καὶ ποιείτω τομὴν ΔΕ, ἄξων δὲ τοῦ κώνου ἔστω ὁ ΒΗ, κύκλος δέ τις ἐκκείσθω, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέση ἀνάλογόν ἐστι τῆς τε ΑΔ καὶ συναμφοτέρου τῆς ΔΖ, ΗΑ, ἔστω δὲ κύκλος ὁ Θ· λέγω ὅτι ὁ Θ κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τῇ μεταξὺ τῶν ΔΕ, ΑΓ.

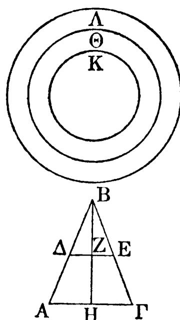


Fig. 18.

14 ὁ om. DEGH.

Construisons deux cercles Λ et K tels que pour l'un, K, le carré du rayon soit égal au produit de BΔ par ΔZ, et que pour l'autre, Λ, le carré du rayon soit égal au produit de BA par AH ; le cercle Λ est donc équivalent[1] à la surface du cône ABΓ, et le cercle K est équivalent[1] à la surface du cône ΔEB. Le produit de BA par AH est égal à la somme du produit de BΔ par ΔZ et du produit de AΔ par la somme de ΔZ et AH, parce que ΔZ est parallèle à AH ; mais le produit de AB par AH est égal au carré du rayon du cercle Λ, le produit de BΔ par ΔZ est égal au carré du rayon du cercle K, et le produit de ΔA par la somme de ΔZ et AH est égal au carré du rayon du cercle Θ. Il résulte de ces propriétés que le carré sur le rayon du cercle Λ est égal à la somme des carrés sur les rayons des cercles K et Θ, d'où il suit que le cercle Λ est lui-même égal à la somme des cercles K et Θ[2]. Mais le cercle Λ est équivalent à la surface du cône BAΓ, et le cercle K est égal à la surface du cône ΔBE ; la différence (sc. entre ces surfaces coniques), à savoir l'aire du cône comprise entre les plans parallèles ΔE et AΓ, est donc équivalente au cercle Θ.

Soit le parallélogramme BAH et BH sa diagonale. Coupons le côté BA par un point Δ pris au hasard et menons par Δ la parallèle ΔΘ à AH et par Z la parallèle KΛ à BA ; je dis que le produit de BA par AH est égal à la somme du produit de BΔ par ΔZ et du produit de ΔA par la somme de ΔZ et AH.

Fig. 19.

1. Cf. prop. 14.
2. Cf. Eucl. XII, 2.

Ἐκκείσθωσαν γὰρ κύκλοι οἱ Λ, Κ, καὶ τοῦ μὲν Κ κύκλου ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δυνάσθω τὸ ὑπὸ ΒΔΖ, τοῦ δὲ Λ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δυνάσθω τὸ ὑπὸ ΒΑΗ· ὁ μὲν ἄρα Λ κύκλος ἴσος ἐστὶν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΑΒΓ κώνου, ὁ δὲ Κ κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΔΕΒ. Καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΗ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΖ καὶ τῷ ὑπὸ τῆς ΑΔ καὶ συναμφοτέρου τῆς ΔΖ, ΑΗ διὰ τὸ παράλληλον εἶναι τὴν ΔΖ τῇ ΑΗ, ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ ΑΒ, ΑΗ δύναται ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Λ κύκλου, τὸ δὲ ὑπὸ ΒΔ, ΔΖ δύναται ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Κ κύκλου, τὸ δὲ ὑπὸ τῆς ΔΑ καὶ συναμφοτέρου τῆς ΔΖ, ΑΗ δύναται ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Θ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Λ κύκλου ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ἐκ τῶν κέντρων τῶν Κ, Θ κύκλων· ὥστε καὶ ὁ Λ κύκλος ἴσος ἐστὶ τοῖς Κ, Θ κύκλοις. Ἀλλ' ὁ μὲν Λ ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΒΑΓ κώνου, ὁ δὲ Κ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΔΒΕ κώνου· λοιπὴ ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου ἡ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν ΔΕ, ΑΓ ἴση ἐστὶ τῷ Θ κύκλῳ.

[Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΒΑΗ, καὶ διάμετρος αὐτοῦ ἔστω ἡ ΒΗ. Τετμήσθω ἡ ΒΑ πλευρά, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὸ Δ, καὶ διὰ τοῦ Δ ἤχθω παράλληλος τῇ ΑΗ ἡ ΔΘ, διὰ δὲ τοῦ Ζ τῇ ΒΑ ἡ ΚΛ· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ ΒΑΗ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ ΒΔΖ καὶ τῷ ὑπὸ ΔΑ καὶ συναμφοτέρου τῆς ΔΖ, ΑΗ.

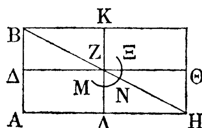


Fig. 19.

2 ὑπὸ C Basil. : ὑπὸ τὸ DEGH ‖ 19 - p. 48,8 ἔστω — ΔΖ om. B. ‖ 24 ΑΗ ms. D : ΑΛ mss. CEGH.

Le produit de BA par AH est en effet égal à l'aire de tout le parallélogramme de diagonale BH, le produit de BΔ par ΔZ est égal au parallélogramme BZ, et le produit de ΔA par la somme de ΔZ et AH est égal au gnomon MNΞ ; le produit de ΔA par AH est en effet égal au parallélogramme KH parce que le complément KΘ est égal au complément ΔΛ, et le produit de ΔA par ΔZ est égal au parallélogramme ΔΛ ; tout le parallélogramme BH, produit de BA par AH, est donc égal à la somme du produit de BΔ par ΔZ et du gnomon MNΞ, qui est égal au produit de ΔA par la somme de AH et ΔZ.

Lemmes.

1. Les cônes de même hauteur ont le même rapport que leurs bases[1] ; les cônes de même base ont le même rapport que leurs hauteurs[2].

2. Si un cylindre est coupé par un plan parallèle à la base, les cylindres (sc. ainsi obtenus) ont entre eux le même rapport que leurs axes[3].

3. Sont dans le même rapport que les cylindres les cônes ayant mêmes bases que les cylindres <et mêmes hauteurs>[4].

4. Dans les cônes équivalents, les bases sont dans le rapport inverse des hauteurs, et les cônes dont les bases sont dans le rapport inverse des hauteurs sont équivalents[5].

5. Les cônes dont les diamètres des bases ont le même rapport que leurs axes, c'est-à-dire que leurs hauteurs, ont entre eux le même rapport que les cubes des diamètres de leurs bases[6].

Toutes ces propositions ont été démontrées par les géomètres du passé.

1. Cf. Eucl. XII, 11.
2. Cf. Eucl. XII, 14.
3. Cf. Eucl. XII, 13.
4. Le sens de la proposition exige la restitution des mots entre < > ; cf. Heiberg, *Archim.* I, p. 75, n. 2.
5. Cf. Eucl. XII, 15.
6. Cf. Eucl. XII, 12.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν ὑπὸ ΒΑΗ ὅλον ἐστὶ τὸ ΒΗ, τὸ δὲ ὑπὸ ΒΔΖ τὸ ΒΖ, τὸ δὲ ὑπὸ ΔΑ καὶ συναμφοτέρου τῆς ΔΖ, ΑΗ ὁ ΜΝΞ γνώμων· τὸ μὲν γὰρ ὑπὸ ΔΑΗ ἴσον ἐστὶν τῷ ΚΗ διὰ τὸ ἴσον εἶναι τὸ ΚΘ παραπλήρωμα τῷ ΔΛ παραπληρώματι, τὸ δὲ ὑπὸ ΔΑ, ΔΖ τῷ ΔΛ· ὅλον ἄρα τὸ ΒΗ, ὅπερ ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΒΑΗ, ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ ΒΔΖ καὶ τῷ ΜΝΞ γνώμονι, ὅς ἐστιν ἴσος τῷ ὑπὸ ΔΑ καὶ συναμφοτέρου τῆς ΑΗ, ΔΖ].

ΛΗΜΜΑΤΑ.

α′. Οἱ κῶνοι οἱ ἴσον ὕψος ἔχοντες τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον ταῖς βάσεσιν· καὶ οἱ ἴσας ἔχοντες βάσεις τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον τοῖς ὕψεσιν.

β′. Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ παρὰ τὴν βάσιν, ἔστιν, ὡς ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον, ὁ ἄξων πρὸς τὸν ἄξονα.

γ′. Τοῖς δὲ κυλίνδροις ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶν οἱ κῶνοι οἱ ἔχοντες τὰς αὐτὰς βάσεις τοῖς κυλίνδροις.

δ′. Καὶ τῶν ἴσων κώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· καὶ ὧν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσοι εἰσίν.

ε′. Καὶ οἱ κῶνοι, ὧν αἱ διάμετροι τῶν βάσεων τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσιν τοῖς ἄξοσιν [τουτέστιν τοῖς ὕψεσι], πρὸς ἀλλήλους ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶν τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων.

Ταῦτα δὲ πάντα ὑπὸ τῶν πρότερον ἀπεδείχθη.

4 τῷ pr. DEGH : τὸ C || τὸ alt. CG : τῷ DEH || 5 τῷ DEGH : τὸ C.

17.

Étant donnés deux cônes isoscèles, si la surface de l'un est équivalente à la base de l'autre, et que la perpendiculaire abaissée du centre de la base sur la génératrice du (sc. premier) cône est égale à la hauteur (sc. du deuxième cône), les cônes seront égaux.

Soient deux cônes isoscèles ΑΒΓ et ΔΕΖ ; que la base du cône ΑΒΓ soit équivalente à la surface du cône ΔΕΖ, et que la hauteur ΑΗ soit égale à la perpendiculaire ΚΘ abaissée du centre Θ de la base sur une des génératrices du cône (sc. ΔΕΖ), soit sur ΔΕ ; je dis que les deux cônes sont égaux.

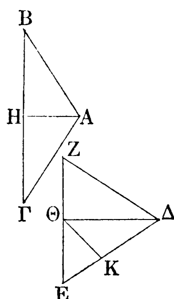


Fig. 20.

Puisque, en effet, la base du cône ΑΒΓ est équivalente à la surface du cône ΔΕΖ et que des grandeurs égales ont à une même grandeur le même rapport, le rapport de la base du cône ΒΑΓ à la base du cône ΔΕΖ est égal au rapport de la surface du cône ΔΕΖ à la base du cône ΔΕΖ[1]. Mais la surface du cône est à la base du même cône comme ΔΘ est à ΘΚ ; on a en effet montré que dans tout cône isoscèle le

1. Cf. Eucl. V, 7.

ιζ'.

Ἐὰν ὦσιν δύο κῶνοι ἰσοσκελεῖς, ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου κώνου ἐπιφάνεια ἴση ᾖ τῇ τοῦ ἑτέρου βάσει, ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου κάθετος ἀγομένη τῷ ὕψει ἴση ᾖ, ἴσοι ἔσονται οἱ κῶνοι.

Ἔστωσαν δύο κῶνοι ἰσοσκελεῖς οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ τοῦ ΑΒΓ ἡ μὲν βάσις ἴση ἔστω τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΔΕΖ, τὸ δὲ ὕψος τὸ ΑΗ ἴσον ἔστω τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως τοῦ Θ ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ κώνου, οἷον ἐπὶ τὴν ΔΕ, καθέτῳ ἠγμένῃ τῇ ΚΘ· λέγω ὅτι ἴσοι εἰσὶν οἱ κῶνοι.

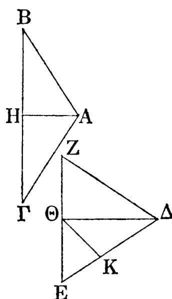


Fig. 20.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ βάσις τοῦ ΑΒΓ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΔΕΖ [τὰ δὲ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον], ὡς ἄρα ἡ τοῦ ΒΑΓ βάσις πρὸς τὴν τοῦ ΔΕΖ βάσιν, οὕτως ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ΔΕΖ πρὸς τὴν βάσιν τοῦ ΔΕΖ. Ἀλλ' ὡς ἡ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν ἰδίαν βάσιν, οὕτως ἡ ΔΘ πρὸς τὴν ΘΚ [ἐδείχθη γὰρ τοῦτο, ὅτι παντὸς κώνου ἰσοσκελοῦς ἡ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν βάσιν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει, ὃν

10 καθέτῳ B : κάθετον DEGH ‖ 15 ΔΘ mss. BG : ΕΘ mss. CDEH.

rapport de la surface à la base est égal au rapport de la génératrice du cône au rayon de la base, de ΔE à EΘ. Mais EΔ est à ΘΔ comme EΘ est à ΘK, puisque les triangles (sc. EΘΔ et EKΔ) sont équiangles. De plus, ΘK est égal à AH ; il s'ensuit que le rapport de la base du cône BAΓ à la base du cône ΔEZ est égal au rapport de la hauteur du cône ΔEZ à la hauteur du cône ABΓ. Dans les cônes ABΓ et ΔEZ les bases sont par conséquent dans le rapport inverse des hauteurs ; le cône BAΓ est donc équivalent au cône ΔEZ[1].

18.

Tout rhombe composé de cônes isoscèles est équivalent à un cône ayant une base équivalente à la surface de l'un des cônes comprenant le rhombe et une hauteur égale à la perpendiculaire abaissée du sommet de l'autre cône sur une génératrice du premier.

Soit ABΓΔ un rhombe composé de cônes isoscèles, dont la base est le cercle de diamètre BΓ et la hauteur AΔ ; donnons-nous un autre cône HΘK ayant sa base équivalente à la surface du cône ABΓ et sa hauteur égale à la perpendiculaire abaissée du point Δ sur AB ou sur le prolongement de AB, soit ΔZ, et soit ΘΛ la hauteur du cône ΘHK ; ΘΛ est donc égal à ΔZ ; je dis que le cône est égal au rhombe.

1. D'après le lemme 4, p. 48.

ἡ πλευρὰ τοῦ κώνου πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως, ἡ ΔΕ τουτέστι πρὸς ΕΘ. Ὡς δὲ ἡ ΕΔ πρὸς ΘΔ, οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς ΘΚ· ἰσογώνια γάρ ἐστι τὰ τρίγωνα]. Ἴση δέ ἐστιν ἡ ΘΚ τῇ ΑΗ· ὡς ἄρα ἡ βάσις τοῦ ΒΑΓ πρὸς τὴν βάσιν τοῦ ΔΕΖ, οὕτως τὸ ὕψος τοῦ ΔΕΖ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ ΑΒΓ. Τῶν ΑΒΓ, ΔΕΖ ἄρα ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ΒΑΓ τῷ ΔΕΖ κώνῳ.

ιη'.

Παντὶ ῥόμβῳ ἐξ ἰσοσκελῶν κώνων συγκειμένῳ ἴσος ἐστὶ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἑτέρου κώνου τῶν περιεχόντων τὸν ῥόμβον, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ ἑτέρου κώνου καθέτῳ ἀγομένῃ ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ ἑτερου κώνου.

Ἔστω ῥόμβος ἐξ ἰσοσκελῶν κώνων συγκείμενος ὁ ΑΒΓΔ, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΒΓ κύκλος, ὕψος δὲ τὸ ΑΔ, ἐκκείσθω δέ τις ἕτερος ὁ ΗΘΚ τὴν μὲν βάσιν ἔχων τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΑΒΓ κώνου ἴσην, τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ Δ σημείου καθέτῳ ἐπὶ τὴν ΑΒ ἢ τὴν ἐπ' εὐθείας αὐτῇ ἠγμένῃ, ἔστω δὲ ἡ ΔΖ, τὸ δὲ ὕψος τοῦ ΘΗΚ κώνου ἔστω τὸ ΘΛ· ἴσον δή ἐστιν τὸ ΘΛ τῇ ΔΖ· λέγω ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ κῶνος τῷ ῥόμβῳ.

2 ΕΘ mss. BG : ΔΘ mss. DEH ‖ ΘΔ mss. CEH : ΘΕ mss. DG ‖ 3 ΕΘ mss. BCEH : ΔΘ mss. DG ‖ 19 ἠγμένῃ Torellius : ἠγμένην BDEGH.

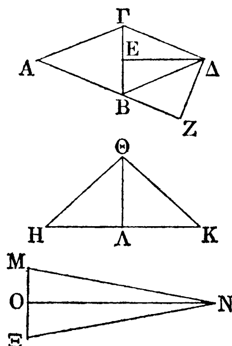


Fig. 21.

Donnons-nous en effet un autre cône ΜΝΞ ayant sa base égale à la base du cône ΑΒΓ et sa hauteur égale à ΑΔ ; soit ΝΟ cette hauteur. Du moment donc que ΝΟ est égal à ΑΔ, ΝΟ est à ΔΕ comme ΑΔ est à ΔΕ[1]. Or comme ΑΔ est à ΔΕ, ainsi le rhombe ΑΒΓΔ est au cône ΒΓΔ[2], et comme ΝΟ est à ΔΕ, ainsi le cône ΜΝΞ est au cône ΒΓΔ[3], puisque leurs bases sont égales ; mais le rapport du cône ΜΝΞ au cône ΒΓΔ est égal au rapport du rhombe ΑΒΓΔ au cône ΒΓΔ ; le cône ΜΝΞ est donc équivalent au rhombe ΑΒΓΔ[4]. Puisque, en outre, la surface du cône ΑΒΓ est équivalente à la base du cône ΗΘΚ, la surface du cône ΑΒΓ est à la base du même cône comme la base du cône ΗΘΚ est à la base du cône ΜΝΞ ; la base de ΑΒΓ est en effet égale à la base de ΜΝΞ. Mais le rapport de la surface du cône ΑΒΓ à la base du même cône est égal au rapport de ΑΒ à ΒΕ, c'est-à-dire de ΑΔ à ΔΖ à cause de la similitude des triangles ; il s'ensuit que le rapport des bases des cônes ΗΘΚ et ΜΝΞ est égal au rapport de ΑΔ à ΔΖ. Or ΑΔ et ΝΟ sont égaux

1. Cf. Eucl. V, 7.
2. Cf. les notes complémentaires.
3. D'après le lemme 1, p. 48.
4. Cf. Eucl. V, 9.

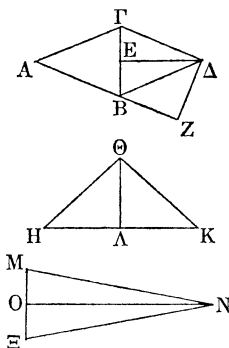


Fig. 21.

Ἐκκείσθω γὰρ ἕτερος κῶνος ὁ ΜΝΞ τὴν μὲν βάσιν ἔχων ἴσην τῇ βάσει τοῦ ΑΒΓ κώνου, τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ ΑΔ, καὶ ἔστω τὸ ὕψος αὐτοῦ τὸ ΝΟ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΝΟ τῇ ΑΔ ἴση ἐστίν, ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΝΟ πρὸς ΔΕ, οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς ΔΕ. Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΔ πρὸς ΔΕ, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ ῥόμβος πρὸς τὸν ΒΓΔ κῶνον, ὡς δὲ ἡ ΝΟ πρὸς τὴν ΔΕ, οὕτως ὁ ΜΝΞ κῶνος πρὸς τὸν ΒΓΔ κῶνον [διὰ τὸ τὰς βάσεις αὐτῶν εἶναι ἴσας]· ὡς ἄρα ὁ ΜΝΞ κῶνος πρὸς τὸν ΒΓΔ κῶνον, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ ῥόμβος πρὸς τὸν ΒΓΔ κῶνον· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ΜΝΞ τῷ ΑΒΓΔ ῥόμβῳ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ΑΒΓ ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ ΗΘΚ, ὡς ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ΑΒΓ πρὸς τὴν ἰδίαν βάσιν, οὕτως ἡ βάσις τοῦ ΗΘΚ πρὸς τὴν βάσιν τοῦ ΜΝΞ [ἡ γὰρ βάσις τοῦ ΑΒΓ ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ ΜΝΞ]. Ὡς δὲ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ΑΒΓ πρὸς τὴν ἰδίαν βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΕ, τουτέστιν ἡ ΑΔ πρὸς ΔΖ [ὅμοια γὰρ τὰ τρίγωνα]· ὡς ἄρα ἡ βάσις τοῦ ΗΘΚ πρὸς τὴν βάσιν τοῦ ΜΝΞ, οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς ΔΖ. Ἴση δὲ ἡ μὲν ΑΔ τῇ ΝΟ [ὑπέκειτο γάρ], ἡ δὲ ΔΖ

2 ἔχων GH : ἔχον DE ‖ ΑΒΓ mss. BD : ΑΒ mss. EGH ‖ 5 οὕτως om. C ‖ 9 ΑΒΓΔ mss. BDEGH : ΑΒΓ ms. C.

par hypothèse, et de même ΔZ est égal à ΘΛ ; par conséquent, le rapport de la base du cône HΘK à la base du cône MNΞ est égal au rapport de la hauteur NO à la hauteur ΘΛ. Dans les cônes HΘK et MNΞ les bases sont donc dans le rapport inverse des hauteurs ; ils sont par conséquent équivalents. Mais on a démontré que le cône MNΞ est équivalent au rhombe ΑΒΓΔ ; le cône HΘK est donc lui aussi équivalent au rhombe ΑΒΓΔ.

19.

Si un cône isoscèle est coupé par un plan parallèle à la base, que sur le cercle produit par cette section on construit un cône ayant pour sommet le centre de la base et qu'on retranche le rhombe ainsi construit du cône entier, la figure qui reste sera équivalente à un cône ayant sa base équivalente à l'aire du cône comprise entre les plans parallèles et sa hauteur égale à la perpendiculaire abaissée du centre de la base sur une des génératrices du cône.

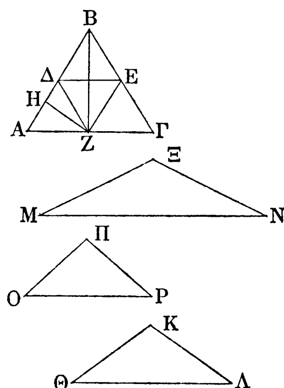


Fig. 22.

τῇ ΘΛ· ὡς ἄρα ἡ βάσις τοῦ ΗΘΚ πρὸς τὴν βάσιν τοῦ ΜΝΞ, οὕτως τὸ ΝΟ ὕψος πρὸς τὸ ΘΛ. Τῶν ΗΘΚ, ΜΝΞ ἄρα κώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· ἴσοι ἄρα εἰσὶν οἱ κῶνοι. Ἐδείχθη δὲ ὁ ΜΝΞ ἴσος τῷ ΑΒΓΔ ῥόμβῳ· καὶ ὁ ΗΘΚ ἄρα κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ ΑΒΓΔ ῥόμβῳ.

ιθ′.

Ἐὰν κῶνος ἰσοσκελὴς ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ τῇ βάσει, ἀπὸ δὲ τοῦ γενομένου κύκλου κῶνος ἀναγραφῇ κορυφὴν ἔχων τὸ κέντρον τῆς βάσεως, ὁ δὲ γενόμενος ῥόμβος ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ ὅλου κώνου, τῷ περιλείμματι ἴσος ἔσται κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ κώνου καθέτῳ ἠγμένῃ.

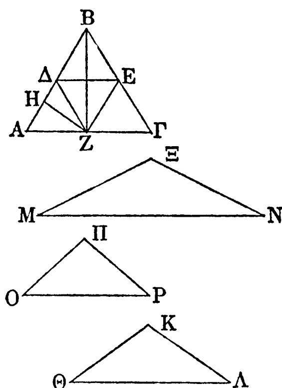


Fig. 22.

1 ὡς Basil. : ut B ὥστε DEGH ‖ 2 τῶν Basil. : τοῦ DEGH ‖ 10 περιλείμματι C : περιλήμματι BDEGH ‖ 13 πλευρὰν om. C.

Soit le cône isoscèle ΑΒΓ ; qu'il soit coupé par un plan parallèle à la base ; soit ΔΕ la section produite, Ζ le centre de la base ; sur le cercle de diamètre ΔΕ construisons un cône de sommet Ζ ; on aura ainsi un rhombe ΒΔΖΕ composé de deux cônes isoscèles. Donnons-nous un cône ΚΘΛ dont la base soit équivalente à l'aire comprise entre ΔΕ et ΑΓ, et dont la hauteur soit égale à ΖΗ, ΖΗ étant la perpendiculaire abaissée du point Ζ sur ΑΒ ; je dis que, si on imagine le rhombe ΒΔΖΕ retranché du cône ΑΒΓ, la figure qui reste sera équivalente au cône ΘΚΛ.

Donnons-nous en effet deux cônes ΜΝΞ et ΟΠΡ tels que la base du cône ΜΝΞ soit équivalente à la surface du cône ΑΒΓ, et la hauteur égale à ΖΗ, ce qui rend le cône ΜΝΞ équivalent au cône ΑΒΓ, puisque, si dans deux cônes isoscèles la surface de l'un est équivalente à la base de l'autre et que la perpendiculaire abaissée du centre de la base (sc. de l'un) sur une génératrice du cône est égale à la hauteur de l'autre, les deux cônes sont équivalents[1], et que la base du cône ΟΠΡ soit équivalente à la surface du cône ΔΒΕ et sa hauteur égale ΖΗ, ce qui rend le cône ΟΠΡ équivalent au rhombe ΒΔΖΕ, comme on l'a démontré plus haut. Or puisque la surface du cône ΑΒΓ se compose de la surface du cône ΔΒΕ et de l'aire comprise entre ΔΕ et ΑΓ, que la surface du cône ΑΒΓ est équivalente à la base du cône ΜΝΞ, que la surface du cône ΔΒΕ est équivalente à la base du cône ΟΠΡ, et que l'aire comprise entre ΔΕ et ΑΓ est équivalente à la base du cône ΘΚΛ, la base du cône ΜΝΞ est équivalente à la somme des bases des cônes ΘΚΛ et ΟΠΡ. De plus, ces cônes ont la même hauteur ; le cône ΜΝΞ est donc équivalent à la somme des cônes ΘΚΛ et ΟΠΡ[1]. Mais le cône ΜΝΞ est équivalent au cône

1. D'après le lemme 1, p. 48.

Ἔστω κῶνος ἰσοσκελὴς ὁ ΑΒΓ καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ παραλλήλῳ τῇ βάσει, καὶ ποιείτω τομὴν τὴν ΔΕ, κέντρον δὲ τῆς βάσεως ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ περὶ διάμετρον τὴν ΔΕ κύκλου κῶνος ἀναγεγράφθω κορυφὴν ἔχων τὸ Ζ· ἔσται δὴ ῥόμβος ὁ ΒΔΖΕ ἐξ ἰσοσκελῶν κώνων συγκείμενος. Ἐκκείσθω δή τις κῶνος ὁ ΚΘΛ, οὗ ἡ μὲν βάσις ἔστω ἴση τῇ ἐπιφανείᾳ τῇ μεταξὺ τῶν ΔΕ, ΑΓ, τὸ δὲ ὕψος, ἀχθείσης ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου καθέτου ἐπὶ τὴν ΑΒ τῆς ΖΗ, ἔστω ἴσον τῇ ΖΗ· λέγω ὅτι, ἐὰν ἀπὸ τοῦ ΑΒΓ κώνου νοηθῇ ἀφῃρημένος ὁ ΒΔΖΕ ῥόμβος, τῷ περιλείμματι ἴσος ἔσται ὁ ΘΚΛ κῶνος.

Ἐκκείσθωσαν γὰρ δύο κῶνοι οἱ ΜΝΞ, ΟΠΡ, ὥστε τὴν μὲν τοῦ ΜΝΞ βάσιν ἴσην εἶναι τοῦ ΑΒΓ κώνου τῇ ἐπιφανείᾳ, τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ ΖΗ [διὰ δὴ τοῦτο ἴσος ἐστὶν ὁ ΜΝΞ κῶνος τῷ ΑΒΓ κώνῳ· ἐὰν γὰρ ὦσι δύο κῶνοι ἰσοσκελεῖς, ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου κώνου ἐπιφάνεια ἴση ᾖ τῇ τοῦ ἑτέρου βάσει, ἔτι δὲ ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου ἀγομένη κάθετος τῷ ὕψει ἴση, ἴσοι ἔσονται οἱ κῶνοι], τὴν δὲ τοῦ ΟΠΡ κώνου βάσιν ἴσην εἶναι τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΔΒΕ κώνου, ὕψος δὲ τῇ ΖΗ [διὰ δὴ τοῦτο καὶ ἴσος ἐστὶν ὁ ΟΠΡ κῶνος τῷ ΒΔΖΕ ῥόμβῳ· τοῦτο γὰρ προαπεδείχθη]. Ἐπεὶ δὲ ἡ τοῦ ΑΒΓ κώνου ἐπιφάνεια σύγκειται ἔκ τε τῆς τοῦ ΔΒΕ ἐπιφανείας καὶ τῆς μεταξὺ τῶν ΔΕ, ΑΓ, ἀλλ' ἡ μὲν τοῦ ΑΒΓ κώνου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ ΜΝΞ κώνου, ἡ δὲ τοῦ ΔΒΕ ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶν τῇ βάσει τοῦ ΟΠΡ, ἡ δὲ μεταξὺ τῶν ΔΕ, ΑΓ ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ ΘΚΛ, ἡ ἄρα τοῦ ΜΝΞ βάσις ἴση ἐστὶ ταῖς βάσεσιν τῶν ΘΚΛ, ΟΠΡ. Καί εἰσιν οἱ κῶνοι ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος· ἴσος ἄρα ἐστὶν καὶ ὁ ΜΝΞ κῶνος τοῖς ΘΚΛ, ΟΠΡ κώνοις. Ἀλλ' ὁ μὲν ΜΝΞ κῶνος ἴσος ἐστὶ

9 τῆς Basil. : τῇ DEGH || 10-11 περιλείμματι B : περιλήμματι DEGH || 21 τοῦτο καὶ BC : τούτοις DEGH.

ΑΒΓ[1], et le cône ΠΟΡ est équivalent au rhombe ΒΔΕΖ[2] ; en retranchant (sc. le rhombe ΒΔΕΖ) on trouve que le cône ΘΚΛ est équivalent à la figure qui reste.

20.

Si dans un rhombe composé de cônes isoscèles l'un des deux cônes est coupé par un plan parallèle à la base, qu'on construit sur le cercle produit un cône ayant le même sommet que l'autre cône et qu'on retranche le rhombe ainsi construit du rhombe entier, la figure qui reste sera équivalente à un cône ayant sa base équivalente à l'aire du cône comprise entre les plans parallèles et sa hauteur égale à la perpendiculaire abaissée du sommet de l'autre cône sur la génératrice du premier.

Soit ΑΒΓΔ un rhombe composé de cônes isoscèles ; coupons l'un des deux cônes par un plan parallèle à la base ; soit ΕΖ la section ; sur le cercle de diamètre ΕΖ construisons un cône ayant pour sommet le point Δ ; on aura ainsi produit le rhombe ΕΒΔΖ. Imaginons le rhombe ΕΒΔΖ retranché du rhombe entier, et donnons-nous un cône ΘΚΛ ayant sa base équivalente à l'aire comprise entre ΑΓ et ΕΖ, et sa hauteur égale à la perpendiculaire abaissée du point Δ sur ΒΑ ou sur son prolongement ; je dis que le cône ΘΚΛ est équivalent à la figure de reste indiquée.

1. Cf. prop. 17.

2. Cf. prop. 18 ; il convient de compléter ici le raisonnement par les remarques : ainsi ΑΒΓ = ΘΚΛ + ΒΔΕΖ ; retranchons de part et d'autre ΒΔΕΖ.

τῷ ΑΒΓ κώνῳ, ὁ δὲ ΠΟΡ τῷ ΒΔΕΖ ῥόμβῳ· λοιπὸς ἄρα ὁ ΘΚΛ κῶνος τῷ περιλείμματι ἴσος ἐστίν.

κ'.

Ἐὰν ῥόμβου ἐξ ἰσοσκελῶν κώνων συγκειμένου ὁ ἕτερος κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ τῇ βάσει, ἀπὸ δὲ τοῦ γενομένου κύκλου κῶνος ἀναγραφῇ κορυφὴν ἔχων τὴν αὐτὴν τῷ ἑτέρῳ κώνῳ, ἀπὸ δε τοῦ ὅλου ῥόμβου ὁ γενόμενος ῥόμβος ἀφαιρεθῇ, τῷ περιλείμματι ἴσος ἔσται ὁ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ ἑτέρου κώνου ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ ἑτέρου κώνου καθέτῳ ἠγμένῃ.

Ἔστω ῥόμβος ἐξ ἰσοσκελῶν κώνων συγκείμενος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ τμηθήτω ὁ ἕτερος κῶνος ἐπιπέδῳ παραλλήλῳ τῇ βάσει, καὶ ποιείτω τομὴν τὴν ΕΖ, ἀπὸ δὲ τοῦ περὶ διάμετρον τὴν ΕΖ κύκλου κῶνος ἀναγεγράφθω τὴν κορυφὴν ἔχων τὸ Δ σημεῖον· ἔσται δὴ γεγονὼς ῥόμβος ὁ ΕΒΔΖ. Καὶ νοείσθω ἀφῃρημένος ἀπὸ τοῦ ὅλου ῥόμβου, ἐκκείσθω δέ τις κῶνος ὁ ΘΚΛ τὴν μὲν βάσιν ἴσην ἔχων τῇ ἐπιφανείᾳ τῇ μεταξὺ τῶν ΑΓ, ΕΖ, τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ Δ σημείου καθέτῳ ἀγομένῃ ἐπὶ τὴν ΒΑ ἢ τὴν ἐπ' εὐθείας αὐτῇ· λέγω ὅτι ὁ ΘΚΛ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ εἰρημένῳ περιλείμματι.

1 ὁ pr. Basil. : τὸ DEGH ‖ 2 περιλείμματι Basil. : περιλήμματι BEH περιλίμματι DG ‖ 8 ἀφαιρεθῇ CG : ἀφῃρέθη DEH ‖ περιλείμματι C : περιλήμματι BEH περιλίμματι DG ‖ 10 τῇ DEGH : τῷ C ‖ 19 δέ om. C ‖ 21 ΒΑ mss. BDEGH : ΒΔ ms. C ‖ 22-23 περιλείμματι C : περιλήμματι BDEGH.

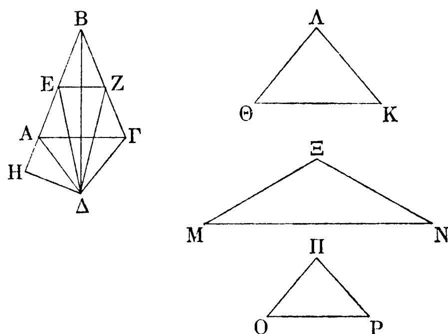


Fig. 23.

Donnons-nous en effet deux cônes MNΞ et OΠP tels que la base du cône MNΞ soit équivalente à la surface du cône ABΓ et sa hauteur égale à ΔH, ce qui fera que, d'après ce qui a été démontré plus haut, le cône MNΞ soit équivalent au rhombe ABΓΔ, et que la base du cône OΠP soit équivalente à la surface du cône EBZ et sa hauteur égale à ΔH, ce qui fera que pour les mêmes raisons le cône OΠP soit équivalent au rhombe EBΔZ. Mais puisque, comme antérieurement[1], la surface du cône ABΓ se compose de celle du cône EBZ et de l'aire comprise entre EZ et AΓ, que la surface du cône ABΓ est équivalente à la base du cône MNΞ et celle du cône EBZ équivalente à la base du cône OPΠ, que, enfin, l'aire entre EZ et AΓ est équivalente à la base du cône ΘKΛ, la base du cône MNΞ est équivalente à la somme des bases des cônes OΠP et ΘKΛ. De plus, les cônes ont la même hauteur ; le cône MNΞ est donc équivalent à la somme des cônes ΘKΛ et OΠP. Mais le cône MNΞ est équivalent au rhombe ABΓΔ, et le cône OΠP est équivalent au rhombe EBΔZ ; en retranchant on trouve que le cône ΘKΛ est équivalent à la figure qui reste.

1. Cf. prop. 19.

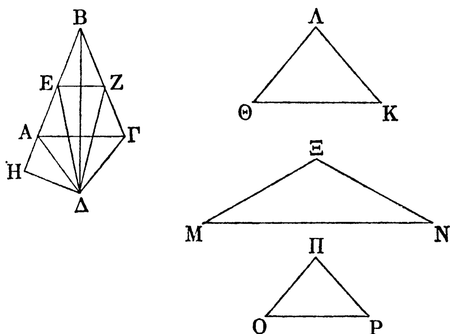


Fig. 23.

Ἐκκείσθωσαν γὰρ δύο κῶνοι οἱ ΜΝΞ, ΟΠΡ, καὶ ἡ μὲν βάσις τοῦ ΜΝΞ κώνου ἴση ἔστω τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΑΒΓ, τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ ΔΗ [διὰ δὴ τὰ προδειχθέντα ἴσος ἐστὶν ὁ ΜΝΞ κῶνος τῷ ΑΒΓΔ ῥόμβῳ], τοῦ δὲ ΟΠΡ κώνου ἡ μὲν βάσις ἴση ἔστω τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΕΒΖ κώνου, τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ ΔΗ [ὁμοίως δὴ ἴσος ἐστὶν ὁ ΟΠΡ κῶνος τῷ ΕΒΔΖ ῥόμβῳ]. Ἐπεὶ δὲ ὁμοίως ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ΑΒΓ κώνου σύγκειται ἔκ τε τῆς τοῦ ΕΒΖ καὶ τῆς μεταξὺ τῶν ΕΖ, ΑΓ, ἀλλὰ ἡ μὲν τοῦ ΑΒΓ κώνου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ ΜΝΞ, ἡ δὲ τοῦ ΕΒΖ κώνου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ ΟΡΠ κώνου, ἡ δὲ μεταξὺ τῶν ΕΖ, ΑΓ ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ ΘΚΛ, ἡ ἄρα βάσις τοῦ ΜΝΞ ἴση ἐστὶ ταῖς βάσεσιν τῶν ΟΠΡ, ΘΚΛ. Καί εἰσιν οἱ κῶνοι ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος· καὶ ὁ ΜΝΞ ἄρα κῶνος ἴσος ἐστὶ τοῖς ΘΚΛ, ΟΠΡ κώνοις. Ἀλλ' ὁ μὲν ΜΝΞ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ ΑΒΓΔ ῥόμβῳ, ὁ δὲ ΟΠΡ κῶνος τῷ ΕΒΔΖ ῥόμβῳ· λοιπὸς ἄρα ὁ κῶνος ὁ ΘΚΛ ἴσος ἐστὶ τῷ περιλείμματι τῷ λοιπῷ.

17 περιλείμματι Basil. : περιλήμματι BEH περιλίμματι DG.

21.

Si on inscrit dans un cercle un polygone équilatéral d'un nombre pair de côtés et qu'on y mène des droites reliant les côtés du polygone de manière qu'elles soient parallèles à une quelconque des cordes sous-tendant deux côtés du polygone, le rapport de la somme des cordes de jonction au diamètre du cercle est égal au rapport de la corde sous-tendant un nombre de côtés égal à la moitié de leur nombre total diminuée d'une unité au côté du polygone.

Soit le cercle ΑΒΓΔ ; inscrivons-y le polygone ΑΕΖΒΗΘΓΜΝΔΛΚ et menons les droites ΕΚ, ΖΛ, ΒΔ, ΗΝ et ΘΜ ; il est ainsi évident qu'elles sont parallèles à la corde sous-tendant deux côtés du polygone[1] ; je dis que le rapport de la somme de toutes les cordes indiquées au diamètre ΑΓ du cercle est égal au rapport de ΓΕ à ΕΑ.

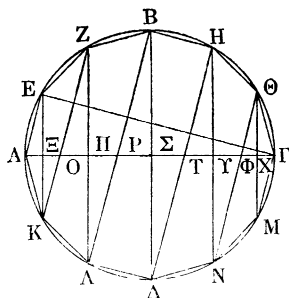


Fig. 24.

Menons en effet les cordes ΖΚ, ΛΒ, ΗΔ, ΘΝ ; sont parallèles ΖΚ à ΕΑ, ΒΛ à ΖΚ, ΔΗ à ΒΛ, ΘΝ à ΔΗ, et ΓΜ à ΘΝ, et puisque les deux cordes ΕΑ et ΚΖ sont parallèles, et qu'on a mené les droites ΕΚ et ΑΟ,

1. Les arcs ΚΛ et ΕΖ étant en effet égaux, les angles ΕΚΖ et ΚΖΛ sont égaux d'après Eucl. III, 27, et par conséquent ΕΚ et ΛΖ sont parallèles d'après Eucl. I, 28.

κα'.

Ἐὰν εἰς κύκλον πολύγωνον ἐγγραφῇ ἀρτιόπλευρόν τε καὶ ἰσόπλευρον, καὶ διαχθῶσιν εὐθεῖαι ἐπιζευγνύουσα τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου, ὥστε αὐτὰς παραλλήλους εἶναι μιᾷ ὁποιαοῦν τῶν ὑπὸ δύο πλευρὰς τοῦ πολυγώνου ὑποτεινουσῶν, αἱ ἐπιζευγνύουσαι πᾶσαι πρὸς τὴν τοῦ κύκλου διάμετρον τοῦτον ἔχουσι τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ὑποτείνουσα τὰς μιᾷ ἐλάσσονας τῶν ἡμίσεων πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν αὐτῷ πολύγωνον ἐγγεγράφθω τὸ ΑΕΖΒΗΘΓΜΝΔΛΚ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΚ ΖΛ, ΒΔ, ΗΝ, ΘΜ· δῆλον δὴ ὅτι παράλληλοί εἰσιν τῇ ὑπὸ δύο πλευρὰς τοῦ πολυγώνου ὑποτεινούσῃ· λέγω οὖν ὅτι αἱ εἰρημέναι πᾶσαι πρὸς τὴν τοῦ κύκλου διάμετρον τὴν ΑΓ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι τῷ τῆς ΓΕ πρὸς ΕΑ.

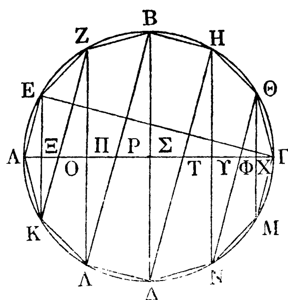


Fig. 24.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΖΚ, ΛΒ, ΗΔ, ΘΝ· παράλληλος ἄρα ἡ μὲν ΖΚ τῇ ΕΑ, ἡ δὲ ΒΛ τῇ ΖΚ, καὶ ἔτι ἡ μὲν ΔΗ τῇ ΒΛ, ἡ δὲ ΘΝ τῇ ΔΗ, καὶ ἡ ΓΜ τῇ ΘΝ [καὶ ἐπεὶ δύο παράλληλοί εἰσιν αἱ ΕΑ, ΚΖ, καὶ δύο διηγμέναι εἰσὶν αἱ ΕΚ,

EΞ est à ΞA comme KΞ à ΞO, KΞ à ΞO, comme ZΠ à ΠO[1], ZΠ à ΠO comme ΛΠ à ΠP[1], ΛΠ à ΠP comme BΣ à ΣP[1], BΣ à ΣP comme ΔΣ à ΣT[1], ΔΣ à ΣT comme HΥ à ΥT[1], HΥ à ΥT comme NΥ à ΥΦ, NΥ à ΥΦ comme ΘX à XΦ, ΘX à XΦ comme MX à XΓ[1], et la somme des termes est à la somme des termes comme un terme dans un de ces rapports est à l'autre. La somme de EK, ZΛ, BΔ, HN et ΘM est donc au diamètre AΓ comme EΞ est à ΞA[2]. Mais EΞ est à ΞA comme ΓE est à EA ; le rapport de la somme de EK, ZΛ, BΔ, HN et ΘM au diamètre AΓ est donc égal au rapport de ΓE à EA.

22.

Si on inscrit dans un segment de cercle un polygone ayant ses côtés, hormis la base, égaux et en nombre pair et qu'on mène parallèlement à la base du segment des droites reliant les côtés du polygone, le rapport de la somme des cordes ainsi menées et de la moitié de la base à la hauteur du segment est égal au rapport de la corde, reliant le diamètre du cercle au côté du polygone, au côté du polygone.

Menons dans le cercle ABΓΔ une droite AΓ et construisons sur AΓ un polygone, inscrit dans le segment ABΓ, ayant un nombre pair de côtés, tous égaux sauf la base AΓ ; menons les cordes ZH et EΘ, qui sont parallèles[3] à la base du segment ; je dis que la somme de ZH, EΘ et AΞ est à BΞ comme ΔZ est à ZB.

1. Cf. Eucl. VI, 4.
2. Cf. Eucl. V, 12.
3. Cf. la n. 1 de la p. 56.

ΑΟ], ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΕΞ πρὸς ΞΑ, ἡ ΚΞ πρὸς ΞΟ. Ὡς δ' ἡ ΚΞ πρὸς ΞΟ, ἡ ΖΠ πρὸς ΠΟ, ὡς δὲ ἡ ΖΠ πρὸς ΠΟ, ἡ ΛΠ πρὸς ΠΡ, ὡς δὲ ἡ ΛΠ πρὸς ΠΡ, οὕτως ἡ ΒΣ πρὸς ΣΡ, καὶ ἔτι ὡς ἡ μὲν ΒΣ πρὸς ΣΡ, ἡ ΔΣ πρὸς ΣΤ, ὡς δὲ ἡ ΔΣ πρὸς ΣΤ, ἡ ΗΥ πρὸς ΥΤ, καὶ ἔτι ὡς ἡ μὲν ΗΥ πρὸς ΥΤ, ἡ ΝΥ πρὸς ΥΦ, ὡς δὲ ἡ ΝΥ πρὸς ΥΦ, ἡ ΘΧ πρὸς ΧΦ, καὶ ἔτι ὡς μὲν ἡ ΘΧ πρὸς ΧΦ, ἡ ΜΧ πρὸς ΧΓ [καὶ πάντα ἄρα πρὸς πάντα ἐστὶν ὡς εἷς τῶν λόγων πρὸς ἕνα] · ὡς ἄρα ἡ ΕΞ πρὸς ΞΑ, οὕτως αἱ ΕΚ, ΖΛ, ΒΔ, ΗΝ, ΘΜ πρὸς τὴν ΑΓ διάμετρον. Ὡς δὲ ἡ ΕΞ πρὸς ΞΑ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς ΕΑ · ἔσται ἄρα καὶ ὡς ἡ ΓΕ πρὸς ΕΑ, οὕτω πᾶσαι αἱ ΕΚ, ΖΛ, ΒΔ, ΗΝ, ΘΜ πρὸς τὴν ΑΓ διάμετρον.

κβ'.

Ἐὰν εἰς τμῆμα κύκλου πολύγωνον ἐγγραφῇ τὰς πλευρὰς ἔχον χωρὶς τῆς βάσεως ἴσας καὶ ἀρτίους, ἀχθῶσιν δὲ εὐθεῖαι παρὰ τὴν βάσιν τοῦ τμήματος αἱ τὰς πλευρὰς ἐπιζευγνύουσαι τοῦ πολυγώνου, αἱ ἀχθεῖσαι πᾶσαι καὶ ἡ ἡμίσεια τῆς βάσεως πρὸς τὸ ὕψος τοῦ τμήματος τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσιν, ὃν ἡ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου ἐπιζευγνυμένη πρὸς τὴν τοῦ πολυγώνου πλευράν.

Εἰς γὰρ κύκλον τὸν ΑΒΓΔ διήχθω τις εὐθεῖα ἡ ΑΓ, καὶ ἐπὶ τῆς ΑΓ πολύγωνον ἐγγεγράφθω εἰς τὸ ΑΒΓ τμῆμα ἀρτιόπλευρόν τε καὶ ἴσας ἔχον τὰς πλευρὰς χωρὶς τῆς βάσεως τῆς ΑΓ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΗ, ΕΘ, αἵ εἰσιν παράλληλοι τῇ βάσει τοῦ τμήματος · λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς αἱ ΖΗ, ΕΘ, ΑΞ πρὸς ΒΞ, οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς ΖΒ.

1 ΑΟ mss. BG : ΑΘ mss. DEH ‖ 7 ΧΓ mss. BDG : ΗΓ mss. EH ‖ 11 ἡ B : om. DEGH ‖ 15 ἔχον C : ἔχων DEGH ‖ 17 ἡ add. Heiberg ‖ 22 διήχθω τις εὐθεῖα ἡ ΑΓ om. C.

Fig. 25.

Menons comme antérieurement[1] les cordes HE et AΘ ; elles sont donc parallèles à BZ[2] ; pour les mêmes raisons[3] donc KZ est à KB comme HK à KΛ, comme EM à MΛ, comme MΘ à MN et comme ΞA à ΞN, et la somme des termes est à la somme des termes comme un terme dans un de ces rapports est à l'autre ; il s'ensuit que la somme de ZH, EΘ et AΞ est à BΞ comme ZK est à KB. Mais ZK est à KB comme ΔZ à ZB ; la somme de ZH, EΘ et AΞ est donc à ΞB comme ΔZ est à ZB.

23.

Soit sur une sphère un grand cercle ABΓΔ ; inscrivons dans ce grand cercle un polygone équilatéral dont le nombre de côtés soit divisible par quatre. Soient AΓ et ΔB des diamètres (sc. perpendiculaires l'un à l'autre). Si dans ces conditions, le diamètre AΓ restant en place, le cercle ABΓΔ tourne, il est évident que la circonférence de ce cercle se déplacera suivant la surface de la sphère, et que les sommets du polygone, à part les sommets A et Γ, se déplaceront suivant des circonférences de cercle tracées dans la surface de la sphère perpen-

1. Cf. prop. 21, p. 56, l. 16.
2. Cf. p. 56, n. 1.
3. Cf. p. 57, l. 1 sq.

Fig. 25.

Πάλιν γὰρ ὁμοίως ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΕ, ΑΘ · παράλληλοι ἄρα εἰσὶν τῇ ΒΖ · διὰ δὴ ταὐτά ἐστιν, ὡς ἡ ΚΖ πρὸς ΚΒ, ἥ τε ΗΚ πρὸς ΚΛ καὶ ἡ ΕΜ πρὸς ΜΛ καὶ ἡ ΜΘ πρὸς ΜΝ καὶ ἡ ΞΑ πρὸς ΞΝ [καὶ ὡς ἄρα πάντα πρὸς πάντα, εἷς τῶν λόγων πρὸς ἕνα] · ὡς ἄρα αἱ ΖΗ, ΕΘ, ΑΞ πρὸς ΒΞ, οὕτως ἡ ΖΚ πρὸς ΚΒ. Ὡς δὲ ἡ ΖΚ πρὸς ΚΒ, οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς ΖΒ · ὡς ἄρα ἡ ΔΖ πρὸς ΖΒ, οὕτως αἱ ΖΗ, ΕΘ, ΑΞ πρὸς ΞΒ.

κγ'.

Ἔστω ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸν πολύγωνον ἰσόπλευρον, τὸ δὲ πλῆθος τῶν πλευρῶν αὐτοῦ μετρείσθω ὑπὸ τετράδος, αἱ δὲ ΑΓ, ΔΒ διάμετροι ἔστωσαν. Ἐὰν δὴ μενούσης τῆς ΑΓ διαμέτρου περιενεχθῇ ὁ ΑΒΓΔ κύκλος ἔχων τὸ πολύγωνον, δῆλον ὅτι ἡ μὲν περιφέρεια αὐτοῦ κατὰ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ἐνεχθήσεται, αἱ δὲ τοῦ πολυγώνου γωνίαι χωρὶς τῶν πρὸς τοῖς Α, Γ σημείοις κατὰ κύκλων περιφερειῶν ἐνεχθήσονται ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας γεγραμμένων ὀρθῶν

8 post ΞΒ ἑξῆς τὸ σχῆμα add. C || 9 post κγ' Stamatis restituit enuntiationem theorematis XXIII quam Archimedes demonstrationi eius, l. 10 sq., anteposuerat ; uide Appendicem. || 18 ὀρθῶν BC : ὀρθὸν DEGH.

diculairement au cercle ΑΒΓΔ. Les diamètres de ces circonférences seront les segments de droite qui joignent les sommets du polygone parallèlement à ΒΔ. Les côtés du polygone se déplaceront suivant certains cônes, les côtés AZ et AN suivant la surface d'un cône ayant pour base le cercle de diamètre ZN et pour sommet le point A, les côtés ZH et MN suivant une surface conique ayant pour base le cercle de diamètre MH et pour sommet le point où les droites ZH et MN, prolongées, se rencontrent l'une l'autre et rencontrent la droite ΑΓ, les côtés BH et ΜΔ suivant une surface de cône ayant pour base le cercle, de diamètre ΒΔ, perpendiculaire au cercle ΑΒΓΔ et pour sommet le point où les droites BH et ΔΜ, prolongées, se rencontrent l'une l'autre et rencontrent ΓΑ.

De la même manière aussi les côtés situés dans l'autre demi-cercle se déplaceront suivant des surfaces coniques à leur tour semblables à celles que nous venons d'indiquer. On aura donc une figure inscrite dans la sphère et limitée par les surfaces coniques que nous avons dites, et la surface de cette figure sera inférieure à la surface de la sphère.

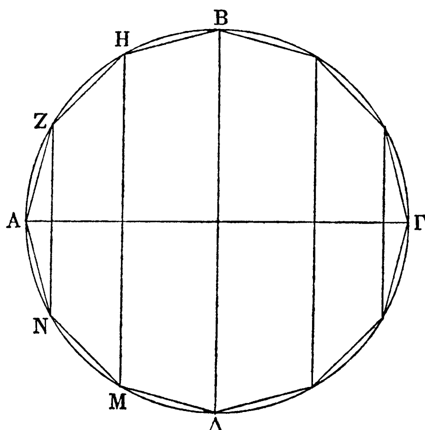


Fig. 26.

πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον· διάμετροι δὲ αὐτῶν ἔσονται αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου παρὰ τὴν ΒΔ οὖσαι. Αἱ δὲ τοῦ πολυγώνου πλευραὶ κατά τινων κώνων ἐνεχθήσονται, αἱ μὲν ΑΖ, ΑΝ κατ' ἐπιφανείας κώνου, οὗ βάσις μὲν ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΖΝ, κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον, αἱ δὲ ΖΗ, ΜΝ κατά τινος κωνικῆς ἐπιφανείας οἰσθήσονται, ἧς βάσις μὲν ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΜΗ, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον, καθ' ὃ συμβάλλουσιν ἐκβαλλόμεναι αἱ ΖΗ, ΜΝ ἀλλήλαις τε καὶ τῇ ΑΓ, αἱ δὲ ΒΗ, ΜΔ πλευραὶ κατὰ κωνικῆς ἐπιφανείας οἰσθήσονται, ἧς βάσις μέν ἐστιν ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ ὀρθὸς πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον, καθ' ὃ συμβάλλουσιν ἐκβαλλόμεναι αἱ ΒΗ, ΔΜ ἀλλήλαις τε καὶ τῇ ΓΑ· ὁμοίως δὲ καὶ αἱ ἐν τῷ ἑτέρῳ ἡμικυκλίῳ πλευραὶ κατὰ κωνικῶν ἐπιφανειῶν οἰσθήσονται πάλιν ὁμοίων ταύταις. Ἔσται δή τι σχῆμα ἐγγεγραμμένον ἐν τῇ σφαίρᾳ ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενον τῶν προειρημένων, οὗ ἡ ἐπιφάνεια ἐλάσσων ἔσται τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

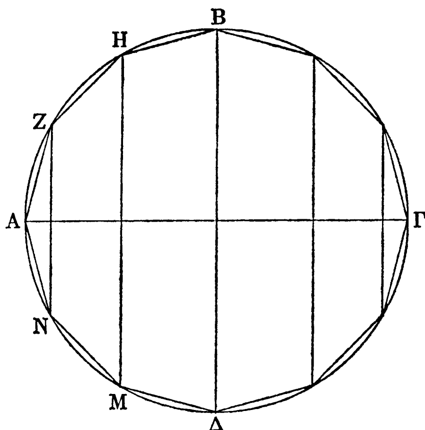


Fig. 26.

4 ΑΖ mss. BC : ΑΞ mss. DEGH ‖ 5 οὗ BC : ὃ DEGH ‖ τὴν CG : τῇ DEH ‖ 14 αἱ add. Heiberg.

La sphère étant en effet divisée par le plan perpendiculaire au cercle ΑΒΓΔ selon la droite ΒΔ, la surface d'un des deux hémisphères et la surface de la figure qui y est inscrite ont les mêmes limites dans un seul plan ; car la limite de chacune de ces surfaces est la circonférence du cercle de diamètre ΒΔ qui est perpendiculaire au cercle ΑΒΓΔ ; toutes deux tournent leur concavité du même côté, et l'une est enveloppée par l'autre surface et par le plan ayant les mêmes limites qu'elle-même[1]. Pour les mêmes raisons, aussi dans l'autre hémisphère la surface de la figure inscrite est inférieure à la surface de l'hémisphère. Il s'ensuit que la surface entière de la figure inscrite dans la sphère est inférieure à la surface de la sphère.

24.

La surface d'une figure inscrite dans la sphère est équivalente à un cercle, dont le carré du rayon est égal au produit du côté de la figure par la somme des cordes, reliant les côtés du polygone, qui sont parallèles à la corde sous-tendant deux côtés du polygone.

Soit dans une sphère le grand cercle ΑΒΓΔ ; inscrivons-y un polygone équilatéral dont le nombre des côtés soit divisible par quatre, et imaginons à partir du polygone inscrit une figure inscrite dans la sphère ; menons les cordes ΕΖ, ΗΘ, ΓΔ, ΚΛ, ΜΝ, parallèles à la corde sous-tendant deux côtés, et donnons-nous un cercle Ξ tel que le carré de son rayon soit égal au

1. Il convient de compléter ici le raisonnement par la conclusion : « la surface de la figure inscrite dans l'un des hémisphères est donc inférieure à la surface de l'hémisphère ». Comme le fait observer Heiberg, I, p. 93, les mots ὁμοίως δὲ καὶ de la ligne 10 montrent que cette conclusion avait figuré dans le texte d'Archimède.

Διαιρεθείσης γὰρ τῆς σφαίρας ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κατὰ τὴν ΒΔ ὀρθοῦ πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἑτέρου ἡμισφαιρίου καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ σχήματος τοῦ ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένου τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσιν ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ· ἀμφοτέρων γὰρ τῶν ἐπιφανειῶν πέρας ἐστὶν τοῦ κύκλου ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ ὀρθοῦ πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον· καί εἰσιν ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι, καὶ περιλαμβάνεται αὐτῶν ἡ ἑτέρα ὑπὸ τῆς ἑτέρας ἐπιφανείας καὶ τῆς ἐπιπέδου τῆς τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης αὐτῇ. Ὁμοίως δὲ καὶ τοῦ ἐν τῷ ἑτέρῳ ἡμισφαιρίῳ σχήματος ἡ ἐπιφάνεια ἐλάσσων ἐστὶν τῆς τοῦ ἡμισφαιρίου ἐπιφανείας· καὶ ὅλη οὖν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ σχήματος τοῦ ἐν τῇ σφαίρᾳ ἐλάσσων ἐστὶν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

κδ΄.

Ἡ τοῦ ἐγγραφομένου σχήματος εἰς τὴν σφαῖραν ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς πλευρᾶς τοῦ σχήματος καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς ἐπιζευγνυούσαις τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου παραλλήλοις οὔσαις τῇ ὑπὸ δύο πλευρὰς τοῦ πολυγώνου ὑποτεινούσῃ εὐθείᾳ.

Ἔστω ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν αὐτῷ πολύγωνον ἐγγεγράφθω ἰσόπλευρον, οὗ αἱ πλευραὶ ὑπὸ τετράδος μετροῦνται, καὶ ἀπὸ τοῦ πολυγώνου τοῦ ἐγγεγραμμένου νοείσθω τι εἰς τὴν σφαῖραν ἐγγραφὲν σχῆμα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΖ, ΗΘ, ΓΔ, ΚΛ, ΜΝ παράλληλοι οὖσαι τῇ ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτεινούσῃ εὐθείᾳ, κύκλος δέ τις ἐκκείσθω ὁ Ξ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δυνάσθω

10 ἐν τῷ BC : om. DEGH ‖ 20 παραλλήλοις οὔσαις Nizzius : = οὔσας C entia equedistantia B τετραγώνους οὔσας DEGH ‖ 28 δὲ Heiberg : δὴ BCDEGH.

produit de AE par la somme de EZ, HΘ, ΓΔ, KΛ et MN ; je dis que ce cercle est équivalent à la surface de la figure inscrite dans la sphère.

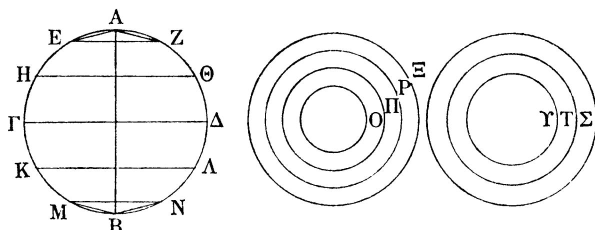


Fig. 27.

Donnons-nous des cercles O, Π, P, Σ, T, Υ tels que le carré du rayon soit égal au produit de EA par la moitié de EZ dans le cercle O, au produit de EA par la moitié de la somme de EZ et HΘ dans le cercle Π, au produit de EA par la moitié de la somme de HΘ et ΓΔ dans le cercle P, au produit de EA par la moitié de la somme de ΓΔ et KΛ dans le cercle Σ, au produit de EA par la demi-somme de KΛ et MN dans le cercle T, au produit de EA par la moitié de MN dans le cercle Υ. En vertu de ces conditions[1], le cercle O est équivalent à la surface du cône AEZ, le cercle Π équivalent à l'aire du cône comprise entre EZ et HΘ, le cercle P à l'aire conique entre HΘ et ΓΔ, le cercle Σ à l'aire conique entre ΔΓ et KΛ, le cercle T à l'aire conique entre KΛ et MN[2], et le cercle Υ à la surface du cône MBN ; la somme de ces cercles est donc équivalente à la surface de la figure inscrite (sc. dans la sphère). Il est évident, de plus, que les carrés des rayons des cercles O, Π, P, Σ, T, Υ ont une somme équivalente

1. Cf. prop. 14.
2. Cf. prop. 16.

τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ΑΕ καὶ τῆς ἴσης ταῖς ΕΖ, ΗΘ, ΓΔ, ΚΛ, ΜΝ· λέγω ὅτι ὁ κύκλος οὗτος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ εἰς τὴν σφαῖραν ἐγγραφομένου σχήματος.

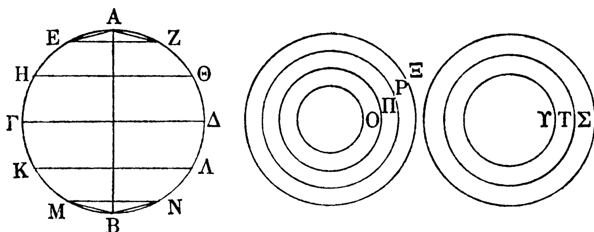


Fig. 27.

Ἐκκείσθωσαν γὰρ κύκλοι οἱ Ο, Π, Ρ, Σ, Τ, Υ, καὶ τοῦ μὲν Ο ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ΕΑ καὶ τῆς ἡμισείας τῆς ΕΖ, ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Π δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ΕΑ καὶ τῆς ἡμισείας τῶν ΕΖ, ΗΘ, ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Ρ δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ΕΑ καὶ τῆς ἡμισείας τῶν ΗΘ, ΓΔ, ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Σ δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ΕΑ καὶ τῆς ἡμισείας τῶν ΓΔ, ΚΛ, ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Τ δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ΑΕ καὶ τῆς ἡμισείας τῶν ΚΛ, ΜΝ, ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Υ δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ΑΕ καὶ τῆς ἡμισείας τῆς ΜΝ. Διὰ δὴ ταῦτα ὁ μὲν Ο κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΑΕΖ κώνου, ὁ δὲ Π τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τῇ μεταξὺ τῶν ΕΖ, ΗΘ, ὁ δὲ Ρ τῇ μεταξὺ τῶν ΗΘ, ΓΔ, ὁ δὲ Σ τῇ μεταξὺ τῶν ΔΓ, ΚΛ, καὶ ἔτι ὁ μὲν Τ ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τῇ μεταξὺ τῶν ΚΛ, ΜΝ, ὁ δὲ Υ τῇ τοῦ ΜΒΝ κώνου ἐπιφανείᾳ ἴσος ἐστίν· οἱ πάντες ἄρα κύκλοι ἴσοι εἰσὶν τῇ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐπιφανείᾳ. Καὶ φανερὸν ὅτι αἱ ἐκ τῶν κέντρων τῶν Ο, Π, Ρ, Σ, Τ

au produit de AE par le double de la somme des moitiés de EZ, HΘ, ΓΔ, ΚΛ, ΜΝ, c'est-à-dire par la somme des cordes entières EZ, HΘ, ΓΔ, ΚΛ et ΜΝ. La somme des carrés sur les rayons des cercles O, Π, P, Σ, T et Υ est donc équivalente au rectangle ayant pour côtés AE et la somme de EZ, HΘ, ΓΔ, ΚΛ et ΜΝ. Mais le carré sur le rayon du cercle Ξ est lui aussi équivalent au rectangle ayant pour côtés AE et la somme de EZ, HΘ, ΓΔ, ΚΛ et ΜΝ ; le carré sur le rayon du cercle Ξ est donc équivalent à la somme des carrés sur les rayons des cercles O, Π, P, Σ, T et Υ ; il s'ensuit que le cercle Ξ est équivalent à la somme des cercles O, Π, P, Σ, T et Υ[1]. Or on a montré que la somme des cercles O, Π, P, Σ, T et Υ est équivalente à la surface de la figure indiquée ; le cercle Ξ sera par conséquent équivalent à la surface de cette figure.

25.

L'aire d'une figure inscrite dans une sphère et limitée par les surfaces coniques est inférieure au quadruple de l'aire du grand cercle de la sphère.

Soit ΑΒΓΔ le grand cercle d'une sphère ; qu'un polygone équilatéral, dont le nombre des côtés soit divisible par quatre, y soit inscrit. Imaginons, en partant de ce polygone, la figure limitée par les surfaces coniques (sc. engendrées par la révolution du polygone autour d'un diamètre du grand cercle) ; je dis que l'aire de la figure inscrite est inférieure au quadruple de l'aire du grand cercle de la sphère.

1. D'après Eucl. XII, 2.

κύκλων δύνανται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ΑΕ καὶ δὶς τῶν ἡμίσεων τῆς ΕΖ, ΗΘ, ΓΔ, ΚΛ, ΜΝ, αἳ ὅλαι εἰσὶν αἱ ΕΖ, ΗΘ, ΓΔ, ΚΛ, ΜΝ· αἱ ἄρα ἐκ τῶν κέντρων τῶν Ο, Π, Ρ, Σ, Τ, Υ κύκλων δύνανται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ΑΕ καὶ πασῶν τῶν ΕΖ, ΗΘ, ΓΔ, ΚΛ, ΜΝ. Ἀλλὰ καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Ξ κύκλου δύναται τὸ ὑπὸ τῆς ΑΕ καὶ τῆς συγκειμένης ἐκ πασῶν τῶν ΕΖ, ΗΘ, ΓΔ, ΚΛ, ΜΝ· ἡ ἄρα ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Ξ κύκλου δύναται τὰ ἀπὸ τῶν ἐκ τῶν κέντρων τῶν Ο, Π, Ρ, Σ, Τ, Υ κύκλων· καὶ ὁ κύκλος ἄρα ὁ Ξ ἴσος ἐστὶ τοῖς Ο, Π, Ρ, Σ, Τ, Υ κύκλοις. Οἱ δὲ Ο, Π, Ρ, Σ, Τ, Υ κύκλοι ἀπεδείχθησαν ἴσοι τῇ εἰρημένῃ τοῦ σχήματος ἐπιφανείᾳ· καὶ ὁ Ξ ἄρα κύκλος ἴσος ἔσται τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος.

κε'.

Τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος εἰς τὴν σφαῖραν ἡ ἐπιφάνεια ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν κωνικῶν ἐπιφανειῶν ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ.

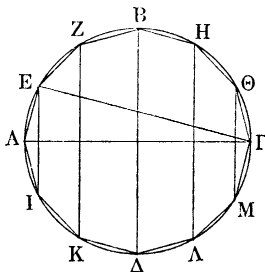
Ἔστω ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν αὐτῷ ἐγγεγράφθω πολύγωνον [ἀρτιόγωνον] ἰσόπλευρον, οὗ αἱ πλευραὶ ὑπὸ τετράδος μετροῦνται, καὶ ἀπ' αὐτοῦ νοείσθω ἐπιφάνεια ἡ ὑπὸ τῶν κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχομένη· λέγω ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγραφέντος ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ.

1 δύνανται BCG : δύναται DEH || 2 ὅλαι EG : ὅλοι CDH || 3 ΓΔ mss. CG : om. BDEH || 6 δύναται BCDG : δύνανται EH || 8 τὰ ἀπὸ τῶν Heiberg : τὰς BCDEGH || 21 ἀπ' Heiberg : ἐπ' BCDEGH.

Fig. 28.

Menons en effet les cordes EI et ΘM, qui sous-tendent deux côtés du polygone, ainsi que les cordes ZK, ΔB et HΛ, qui leur sont parallèles, et donnons-nous un cercle P dont le carré du rayon soit équivalent au rectangle ayant pour côtés le segment EA d'une part, d'autre part un segment égal à la somme de EI, ZK, BΔ, HΛ, ΘM. En vertu d'une proposition antérieure[1], le cercle P est équivalent à la surface de la figure indiquée. Puisque nous avons démontré[2], d'autre part, que le segment de droite égal à la somme des segments EI, ZK, BΔ, HΛ, ΘM est au diamètre AΓ du cercle comme ΓE est à EA, le rectangle ayant pour côtés la somme des segments indiqués d'une part et, d'autre part, le segment EA, et par conséquent aussi le carré sur le rayon du cercle P, est équivalent au rectangle de côtés AΓ et ΓE[3]. Mais le rectangle de côtés AΓ et ΓE est inférieur au carré sur AΓ[4] ; il s'ensuit que le carré sur le rayon du cercle P est inférieur au carré sur AΓ ; le rayon du cercle P est donc inférieur à AΓ, de façon que le diamètre du cercle P est inférieur au double du diamètre du cercle ABΓΔ, que le double diamètre du cercle ABΓΔ est supérieur au diamètre du cercle P, et que le quadruple du carré sur le diamètre du cercle ABΓΔ, c'est-à-dire sur AΓ, est supérieur au carré sur le diamètre du cercle P. Or le rapport du quadruple carré sur AΓ au carré sur le diamètre du

1. Proposition 24.
2. Cf. prop. 21.
3. Cf. Eucl. VI, 16.
4. Cf. Eucl. III, 15.



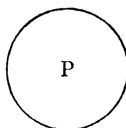


Fig. 28.

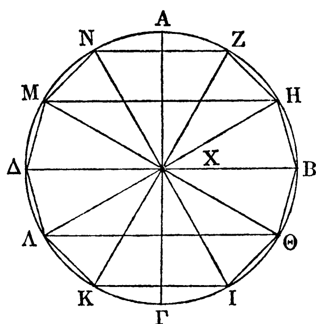
Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτείνουσαι τοῦ πολυγώνου αἱ ΕΙ, ΘΜ καὶ ταύταις παράλληλοι αἱ ΖΚ, ΔΒ, ΗΛ, ἐκκείσθω δέ τις κύκλος ὁ Ρ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ τῆς ΕΑ καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς ΕΙ, ΖΚ, ΒΔ, ΗΛ, ΘΜ· διὰ δὴ τὸ προδειχθὲν ἴσος ἐστὶν ὁ κύκλος τῇ τοῦ εἰρημένου σχήματος ἐπιφανείᾳ. Καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ὅτι ἐστίν, ὡς ἡ ἴση πάσαις ταῖς ΕΙ, ΖΚ, ΒΔ, ΗΛ, ΘΜ πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς ΕΑ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς εἰρημέναις καὶ τῆς ΕΑ, τουτέστιν τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Ρ κύκλου, ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΕ. Ἀλλὰ καὶ τὸ ὑπὸ ΑΓ, ΓΕ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ἔλασσον ἄρα ἐστὶν τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Ρ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ [ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Ρ τῆς ΑΓ· ὥστε ἡ διάμετρος τοῦ Ρ κύκλου ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλασία τῆς διαμέτρου τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, καὶ δύο ἄρα τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου διάμετροι μείζους εἰσὶ τῆς διαμέτρου τοῦ Ρ κύκλου, καὶ τὸ τετράκις ἀπὸ τῆς διαμέτρου τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, τουτέστι τῆς ΑΓ, μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς τοῦ Ρ κύκλου διαμέτρου. Ὡς δὲ τὸ τετράκις ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τοῦ Ρ κύκλου διαμέτρου, οὕτως

20 ἔλασσόν CE : ἐλάσσων DGH.

cercle P est égal au rapport de la quadruple aire du cercle ΑΒΓΔ à celle du cercle P ; par conséquent, le cercle P est inférieur au quadruple du grand cercle. Mais il a été démontré que le cercle P est équivalent à la surface indiquée de la figure. La surface de cette figure est donc inférieure au quadruple du grand cercle de la sphère.

26.

La figure, limitée par des surfaces coniques, inscrite dans une sphère est équivalente au cône ayant pour base un cercle équivalent à la surface de la figure inscrite dans la sphère et une hauteur égale à la perpendiculaire abaissée du centre de la sphère sur un côté du polygone (sc. du polygone régulier, inscrit dans le grand cercle, dont la révolution engendre les surfaces coniques).



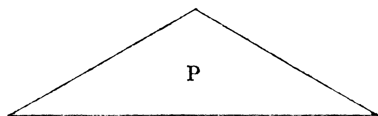
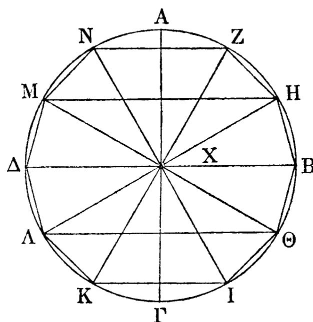


Fig. 29.

τέσσαρες κύκλοι οἱ ΑΒΓΔ πρὸς τὸν Ρ κύκλον· τέσσαρες ἄρα κύκλοι οἱ ΑΒΓΔ μείζους εἰσὶν τοῦ Ρ κύκλου]· ὁ ἄρα κύκλος ὁ Ρ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τετραπλάσιος τοῦ μεγίστου κύκλου. Ὁ δὲ Ρ κύκλος ἴσος ἐδείχθη τῇ εἰρημένῃ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος· ἡ ἄρα ἐπιφάνεια τοῦ σχήματος ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ.

κϛ'.

Τῷ ἐγγραφομένῳ ἐν τῇ σφαίρᾳ σχήματι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κωνικῶν ἴσος ἐστὶν κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος τοῦ ἐγγραφέντος ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καθέτῳ ἠγμένῃ.



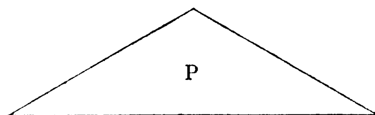


Fig. 29.

Soit la sphère, et ΑΒΓΔ son grand cercle. Mêmes constructions que précédemment[1]. Soit le cône droit P ayant comme base l'aire de la figure inscrite dans la sphère et comme hauteur un segment égal à la perpendiculaire abaissée du centre de la sphère sur un des côtés du polygone. Il faut démontrer que le cône P est équivalent (sc. par le volume) à la figure inscrite dans la sphère.

Sur les cercles de diamètres ZN, HM, ΘΛ et IK construisons des cônes ayant pour sommet le centre de la sphère. Il y aura ainsi un rhombe solide composé d'une part du cône ayant pour base le cercle de diamètre ZN et pour sommet le point A, d'autre part du cône ayant pour base le même cercle et pour sommet le point X. Ce rhombe est équivalent au cône ayant pour base la surface du cône NAZ et pour hauteur le segment égal à la perpendiculaire abaissée du point X (sc. sur AZ)[2]. En outre la partie restante du rhombe, limitée par la surface du cône, qui est située entre les plans parallèles passant par ZN et HM, et par les surfaces des cônes ZNX et HMX[3], est équivalente au cône ayant pour base une aire équivalente à la surface conique comprise entre les plans parallèles passant par MH et ZN et pour hauteur un segment égal à la perpendiculaire abaissée du point X sur ZH, comme cela a été démontré[4]. De plus, la partie restante du cône, limitée par la surface conique comprise entre les plans parallèles passant par HM et BΔ, par la surface du cône MHX et par le cercle de diamètre BΔ, est équivalente au cône ayant pour base une aire équivalente à la surface conique comprise entre les plans passant par HM et

1. Cf. prop. 25.
2. Cf. prop. 18.
3. En d'autres termes : le volume qui reste si on retranche le rhombe XNAZ du rhombe composé du cône XMH et du cône ΞMH, Ξ étant le point d'intersection des droites MN et HZ prolongées.
4. Cf. prop. 20.

Ἔστω ἡ σφαῖρα καὶ ὁ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τῷ πρότερον, ἔστω δὲ κῶνος ὀρθὸς ὁ Ρ βάσιν μὲν ἔχων τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ σχήματος τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καθέτῳ ἠγμένῃ· δεικτέον ὅτι ὁ κῶνος ὁ Ρ ἴσος ἐστὶν τῷ ἐγγεγραμμένῳ ἐν τῇ σφαίρᾳ σχήματι.

Ἀπὸ γὰρ τῶν κύκλων, ὧν εἰσι διάμετροι αἱ ΖΝ, ΗΜ, ΘΛ, ΙΚ, κῶνοι ἀναγεγράφθωσαν κορυφὴν ἔχοντες τὸ τῆς σφαίρας κέντρον· ἔσται δὴ ῥόμβος στερεὸς ἔκ τε τοῦ κώνου, οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ κύκλος ὁ περὶ τὴν ΖΝ, κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον, καὶ τοῦ κώνου, οὗ βάσις ὁ αὐτὸς κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Χ σημεῖον· ἴσος ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ΝΑΖ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ Χ καθέτῳ ἠγμένῃ. Πάλιν δὲ καὶ τὸ περιλελειμμένον τοῦ ῥόμβου τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου τῆς μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ΖΝ, ΗΜ καὶ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κώνων τοῦ τε ΖΝΧ καὶ τοῦ ΗΜΧ ἴσον ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ΜΗ, ΖΝ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ Χ ἐπὶ τὴν ΖΗ καθέτῳ ἠγμένῃ· δέδεικται γὰρ ταῦτα. Ἔτι δὲ καὶ τὸ περιλειπόμενον τοῦ κώνου τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου τῆς μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ΗΜ, ΒΔ καὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ΜΗΧ κώνου καὶ τοῦ κύκλου τοῦ περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ ἴσον τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τῇ μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ΗΜ,

3 τὴν ἐπιφάνειαν BCDEH : ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ G ‖ 10 τοῦ add. Heiberg ‖ 11 ἐστιν Torellius : ἔστω BCDEGH ‖ 18 τὰς Torellius : τὴν DEGH ‖ 21 ΜΗ, ΖΝ ms. B : ΜΝΖΗ mss. DEGH ‖ 23 τὸ περιεχόμενον Heiberg : τοῦ περιεχομένου BDEGH ‖ 24 τῆς Basil. : τῇ DEGH.

BΔ et pour hauteur un segment égal à la perpendiculaire abaissée du point X sur BH[1].

De la même manière, aussi dans l'autre hémisphère, le rhombe XKΓI et les restes des cônes seront équivalents à des cônes de même nombre et de même situation que ceux que nous avons indiqués plus haut. Il est donc évident que la figure entière inscrite dans la sphère est elle aussi équivalente à la somme des cônes indiqués. Mais la somme de ces cônes est équivalente au cône P, puisque le cône P a une hauteur égale à celle de chacun des cônes indiqués et une base équivalente à la somme de leurs bases[2]. Il est donc évident que la figure inscrite dans la sphère est équivalente au cône proposé.

27.

La figure, limitée par des surfaces coniques, inscrite dans la sphère est inférieure au quadruple du cône dont la base est égale au grand cercle de la sphère et dont la hauteur est égale au rayon de la sphère.

Soit en effet construit un cône P, équivalent à la figure inscrite dans la sphère, ayant sa base équivalente à la surface de la figure inscrite et sa hauteur égale à la perpendiculaire abaissée du centre du cercle sur un des côtés du polygone[3] (sc. dont la révolution engendre la figure inscrite dans la sphère). Soit, d'autre part, le cône Ξ ayant sa base égale au cercle ABΓΔ et sa hauteur égale au rayon du cercle ABΓΔ.

Puisque donc le cône P a une base équivalente à l'aire de la figure inscrite dans la sphère et une hauteur égale à la perpendiculaire abaissée du centre X sur le côté AZ, et qu'il a été démontré[4] que la surface de la figure inscrite est inférieure au quadruple de l'aire

1. Cf. prop. 19.
2. Cf. lemme 1, p. 48.
3. Cf. prop. 26.
4. Cf. prop. 25.

ΒΔ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ Χ ἐπὶ τὴν ΒΗ καθέτῳ ἠγμένῃ. Ὁμοίως δὲ καὶ ἐν τῷ ἑτέρῳ ἡμισφαιρίῳ ὅ τε ῥόμβος ὁ ΧΚΓΙ καὶ τὰ περιλείμματα τῶν κώνων ἴσα ἔσται τοσούτοις καὶ τηλικούτοις κώνοις, ὅσοι καὶ πρότερον ἐρρήθησαν· δῆλον οὖν ὅτι καὶ ὅλον τὸ σχῆμα τὸ ἐγγεγραμμένον ἐν τῇ σφαίρᾳ ἴσον ἐστὶν πᾶσιν τοῖς εἰρημένοις κώνοις. Οἱ δὲ κῶνοι ἴσοι εἰσὶν τῷ Ρ κώνῳ, ἐπειδὴ ὁ Ρ κῶνος ὕψος μὲν ἔχει ἑκάστῳ ἴσον τῶν εἰρημένων κώνων, βάσιν δὲ ἴσην πάσαις ταῖς βάσεσιν αὐτῶν· δῆλον οὖν ὅτι τὸ ἐν τῇ σφαίρᾳ ἐγγεγραμμένον ἴσον ἐστὶν τῷ ἐκκειμένῳ κώνῳ.

κζ'.

Τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῇ σφαίρᾳ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κωνικῶν ἔλασσόν ἐστιν ἢ τετραπλάσιον τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας.

Ἔστω γὰρ γινόμενος κῶνος ἴσος τῷ σχήματι τῷ ἐγγεγραμμένῳ ἐν τῇ σφαίρᾳ τὴν βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος, τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου καθέτῳ ἀγομένῃ ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ ἐγγραφέντος πολυγώνου ὁ Ρ, ὁ δὲ κῶνος ὁ Ξ ἔστω βάσιν ἔχων ἴσην τῷ ΑΒΓΔ κύκλῳ, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου.

Ἐπεὶ οὖν ὁ Ρ κῶνος βάσιν ἔχει ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ Χ καθέτῳ ἀγομένῃ ἐπὶ τὴν ΑΖ, ἐδείχθη δὲ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐλάσσων ἢ

3 ΧΚΓΙ Basil. : ΧΚΓΛ mss. BDEGH ‖ περιλείμματα B : περιλίμματα DG περιλήμματα EH ‖ 15 τῶν BG : τῷ E τὸν DH ‖ 25 ἴσον om. DE.

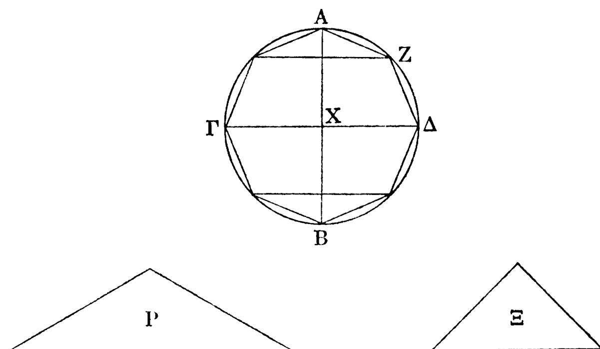


Fig. 30.

du grand cercle de la sphère, la base du cône P sera inférieure au quadruple de la base du cône Ξ. Mais la hauteur du cône P est à son tour inférieure à la hauteur du cône Ξ. Du moment donc que le cône P a sa base inférieure au quadruple de la base du cône Ξ et sa hauteur inférieure à la hauteur du cône Ξ, il est évident que le cône P lui-même est inférieur au quadruple du cône Ξ[1]. Mais le cône P est aussi équivalent à la figure inscrite. Il s'ensuit que la figure inscrite est inférieure au quadruple du cône Ξ.

28.

Soit dans une sphère le plus grand cercle ΑΒΓΔ ; qu'au cercle ΑΒΓΔ soit circonscrit un polygone équilatéral et équiangle, dont le nombre des côtés soit divisible par quatre ; qu'autour du polygone circonscrit au cercle soit décrit un autre cercle ayant même centre

1. Cf. lemme 1, p. 48.

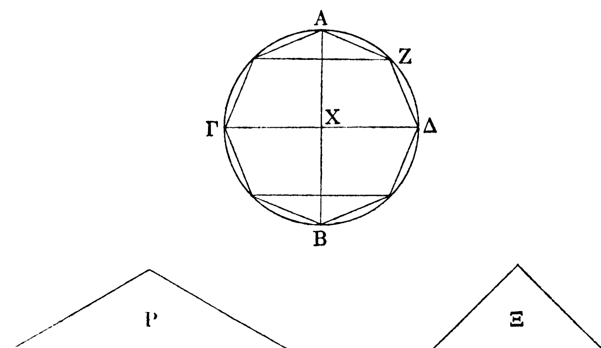


Fig. 30.

τετραπλασία τοῦ ἐν τῇ σφαίρᾳ μεγίστου κύκλου, ἔσται ἄρα ἡ τοῦ Ρ κώνου βάσις ἐλάσσων ἢ τετραπλασία τῆς βάσεως τοῦ Ξ κώνου. Ἔστιν δὲ καὶ τὸ ὕψος τοῦ Ρ ἔλασσον τοῦ ὕψους τοῦ Ξ κώνου· ἐπεὶ οὖν ὁ Ρ κῶνος τὴν μὲν βάσιν ἔχει ἐλάσσονα ἢ τετραπλασίαν τῆς τοῦ Ξ βάσεως, τὸ δὲ ὕψος ἔλασσον τοῦ ὕψους, δῆλον ὡς καὶ αὐτὸς ὁ Ρ κῶνος ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τετραπλάσιος τοῦ Ξ κώνου. Ἀλλὰ καὶ ὁ Ρ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι· τὸ ἄρα ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσόν ἐστιν ἢ τετραπλάσιον τοῦ Ξ κώνου.

κη'.

Ἔστω ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, περὶ δὲ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον περιγεγράφθω πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, τὸ δὲ πλῆθος τῶν πλευρῶν αὐτοῦ μετρείσθω ὑπὸ τετράδος, τὸ δὲ περὶ τὸν κύκλον περιγεγραμμένον πολύγωνον κύκλος περιγεγραμμένος περιλαμβανέτω περὶ

2-3 τῆς βάσεως om. B add. B² ‖ 11 post κη' Stamatis restituit enuntiationem theorematis XXVIII quam Archimedes demonstrationi eius, l. 11 sq., anteposuerat; uide Appendicem.

que le cercle ΑΒΓΔ. Le segment ΕΗ restant en place, faisons tourner le plan ΕΖΗΘ dans lequel se trouvent le polygone et le cercle ; il est évident que la circonférence du cercle ΑΒΓΔ se déplacera suivant la surface de la sphère et la circonférence du cercle ΕΖΗΘ suivant une autre surface de sphère ayant le même centre que la sphère plus petite, que les points de contact où les côtés touchent (sc. le cercle ΑΒΓΔ) décriront des cercles perpendiculaires au cercle ΑΒΓΔ dans la plus petite sphère, que les sommets du polygone, à part les points Ε et Η, se déplaceront suivant des circonférences de cercles tracées sur la surface de la plus grande sphère, perpendiculairement au cercle ΕΖΗΘ, que les côtés du polygone se déplaceront suivant des surfaces coniques comme dans les propositions qui précèdent[1]. La figure limitée par les surfaces coniques sera ainsi circonscrite à la plus petite des deux sphères et inscrite dans la plus grande. Nous allons démontrer de la manière suivante que la surface de la figure circonscrite est supérieure à la surface de la sphère.

Soit en effet ΚΔ le diamètre d'une des circonférences décrites sur la plus petite des deux sphères, Κ et Δ étant les points où les côtés du polygone circonscrit

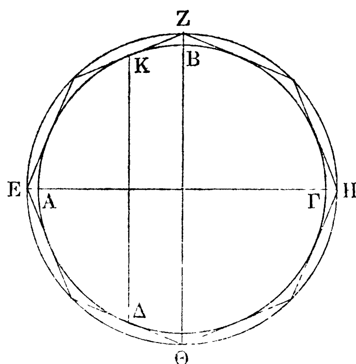


Fig. 31.

1. Cf. les propositions 23 à 27.

τὸ αὐτὸ κέντρον γενόμενος τῷ ΑΒΓΔ. Μενούσης δὴ τῆς ΕΗ περιενεχθήτω τὸ ΕΖΗΘ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ τό τε πολύγωνον καὶ ὁ κύκλος· δῆλον οὖν ὅτι ἡ μὲν περιφέρεια τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου κατὰ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας οἰσθήσεται, ἡ δὲ περιφέρεια τοῦ ΕΖΗΘ κατ' ἄλλης ἐπιφανείας σφαίρας τὸ αὐτὸ κέντρον ἐχούσης τῇ ἐλάσσονι οἰσθήσεται, αἱ δὲ ἁφαί, καθ' ἃς ἐπιψαύουσιν αἱ πλευραί, γράφουσιν κύκλους ὀρθοὺς πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον ἐν τῇ ἐλάσσονι σφαίρᾳ, αἱ δὲ γωνίαι τοῦ πολυγώνου χωρὶς τῶν πρὸς τοῖς Ε, Η σημείοις κατὰ κύκλων περιφερειῶν οἰσθήσονται ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς μείζονος σφαίρας γεγραμμένων ὀρθῶν πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, αἱ δὲ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου κατὰ κωνικῶν ἐπιφανειῶν οἰσθήσονται, καθάπερ ἐπὶ τῶν πρὸ τούτου· ἔσται οὖν τὸ σχῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κωνικῶν περὶ μὲν τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν περιγεγραμμένον, ἐν δὲ τῇ μείζονι ἐγγεγραμμένον. Ὅτι δὲ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος μείζων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας οὕτως δειχθήσεται· ἔστω γὰρ ἡ ΚΔ διάμετρος κύκλου τινὸς τῶν ἐν τῇ ἐλάσσονι

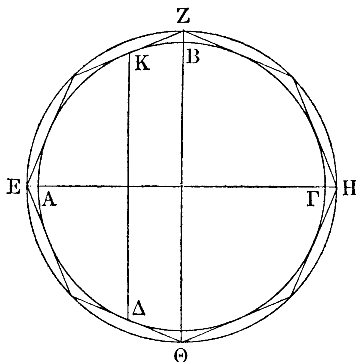


Fig. 31.

13 τῶν Nizzius : τοῦ BDEGH ‖ 13-14 πρὸ τούτου Torellius : πρώτου BDEGH ‖ 19 ἡ BEH : ὁ G οἱ D.

sont tangents au cercle ΑΒΓΔ. Dans ces conditions, si la sphère est divisée par le plan perpendiculaire, suivant la droite ΚΔ, au cercle ΑΒΓΔ, la surface de la figure circonscrite à la sphère sera à son tour divisée par le plan, et il est évident que sphère et figure circonscrite ont les mêmes limites dans le plan ; car pour les deux surfaces, la limite est la circonférence du cercle, de diamètre ΚΔ, perpendiculaire au cercle ΑΒΓΔ ; les deux surfaces tournent, de plus, leur concavité du même côté, et l'une d'entre elles est enveloppée par l'autre et par la surface plane (sc. le cercle de diamètre ΚΔ) ayant mêmes limites qu'elle. Il s'ensuit que la surface du segment sphérique enveloppé (sc. par la figure circonscrite) est inférieure à la surface de la figure qui lui est circonscrite[1]. Pour les mêmes raisons, la surface du segment restant de la sphère est inférieure à la surface de la figure qui lui est circonscrite. Il est donc évident que la surface entière de la sphère est inférieure à la surface de la figure circonscrite à la sphère.

29.

La surface de la figure circonscrite à la sphère est équivalente à un cercle, dont le carré du rayon est équivalent au rectangle compris entre un des côtés du polygone et un segment égal à la somme des cordes qui joignent les sommets du polygone et qui sont parallèles à une des cordes sous-tendant deux côtés du polygone.

La figure circonscrite à la plus petite sphère est en effet inscrite dans la plus grande sphère[2] ; or on a démontré[3] que la surface de la figure inscrite dans la sphère et limitée par les surfaces coniques est équi-

1. D'après le postulat 4, p. 11.
2. Cf. prop. 28.
3. Cf. prop. 24.

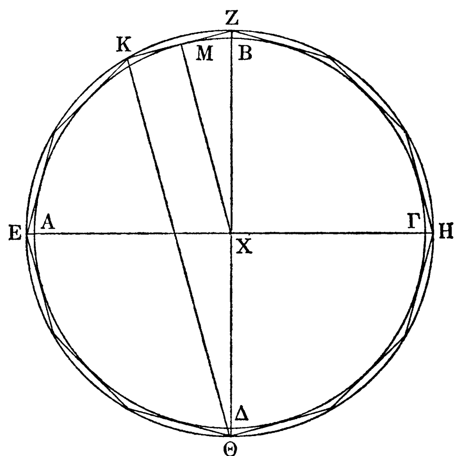
σφαίρᾳ τῶν Κ, Δ σημείων ὄντων, καθ' ἃ ἅπτονται τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου αἱ πλευραὶ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου. Διῃρημένης δὴ τῆς σφαίρας ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κατὰ τὴν ΚΔ ὀρθοῦ πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὴν σφαῖραν διαιρεθήσεται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου. Καὶ φανερὸν ὅτι τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσιν ἐν ἐπιπέδῳ· ἀμφοτέρων γὰρ τῶν ἐπιπέδων πέρας ἐστὶν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια τοῦ περὶ διάμετρον τὴν ΚΔ ὀρθοῦ πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον· καί εἰσιν ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι, καὶ περιλαμβάνεται ἡ ἑτέρα αὐτῶν ὑπὸ τῆς ἑτέρας ἐπιφανείας καὶ τῆς ἐπιπέδου τῆς τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης· ἐλάσσων οὖν ἐστιν ἡ περιλαμβανομένη τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια τῆς ἐπιφανείας τοῦ σχήματος τοῦ περιγεγεγραμμένου περὶ αὐτήν. Ὁμοίως δὲ καὶ ἡ τοῦ λοιποῦ τμήματος τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια ἐλάσσων ἐστὶν τῆς ἐπιφανείας τοῦ σχήματος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτήν· δῆλον οὖν ὅτι καὶ ὅλη ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ σχήματος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτήν.

κθ'.

Τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὴν σφαῖραν ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ πολυγώνου καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς ἐπιζευγνυούσαις τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου οὔσαις παρά τινα τῶν ὑπὸ δύο πλευρὰς τοῦ πολυγώνου ὑποτεινουσῶν.

Τὸ γὰρ περιγεγραμμένον περὶ τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν ἐγγέγραπται εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν· τοῦ δὲ ἐγγεγραμμένου ἐν τῇ σφαίρᾳ περιεχομένου ὑπὸ τῶν ἐπιφανειῶν

2 αἱ πλευραὶ add. Heiberg praeeunte Basil.



valente à un cercle dont le carré du rayon est équivalent au rectangle compris entre un des côtés du polygone et un segment égal à la somme des cordes joignant les sommets du polygone parallèlement à une des cordes sous-tendant deux côtés. La proposition indiquée ci-dessus est donc évidente.

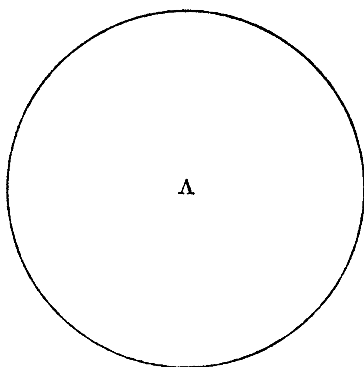


Fig. 32.

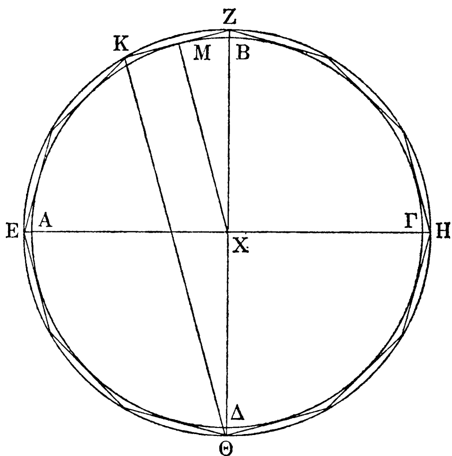
30.

La surface de la figure circonscrite à la sphère est supérieure au quadruple de l'aire du grand cercle de la sphère.

Soit la sphère et le cercle et les autres données, comme dans les propositions qui précèdent ; soit Λ un cercle équivalent à la surface donnée, circonscrite à la sphère la plus petite.

Puisque dans le cercle EZHΘ est inscrit un polygone

τῶν κωνικῶν δέδεικται ὅτι τῇ ἐπιφανείᾳ ἴσος ἐστὶν ὁ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ πολυγώνου καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς ἐπιζευγνυούσαις τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου οὔσαις παρά τινα τῶν ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτεινουσῶν· δῆλον οὖν ἐστι τὸ προειρημένον.



λ'.

Τοῦ σχήματος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὴν σφαῖραν ἡ ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶν ἢ τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ.

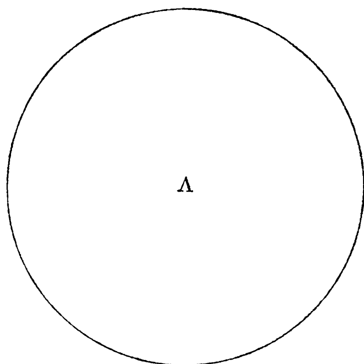


Fig. 32.

Ἔστω γὰρ ἥ τε σφαῖρα καὶ ὁ κύκλος καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον προκειμένοις, καὶ ὁ Λ κύκλος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ ἔστω τοῦ προκειμένου περιγεγραμμένου περὶ τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν. Ἐπεὶ οὖν ἐν τῷ ΕΖΗΘ κύκλῳ πολύγωνον ἰσόπλευρον

2 τῇ ἐπιφανείᾳ Basil. : τῆς ἐπιφανείας DEGH.

équilatéral d'un nombre pair de sommets, la somme des cordes qui, joignant les sommets du polygone, sont parallèles à ZΘ est à ZΘ comme ΘK est à KZ[1]. Il s'ensuit que le rectangle compris entre un des côtés du polygone et un segment de droite égal à la somme des cordes joignant les sommets du polygone est équivalent au rectangle de côtés ZΘ et ΘK[2]. Par conséquent, le carré sur le rayon du cercle Λ est équivalent au rectangle de côtés ZΘ et ΘK[3] ; le rayon du cercle Λ est donc plus grand que la corde ΘK[4]. Mais la corde ΘK est égale au diamètre du cercle ΑΒΓΔ, du moment qu'elle est double de ΧΣ, rayon du cercle ΑΒΓΔ. Il est donc évident que l'aire du cercle Λ, c'est-à-dire la surface de la figure circonscrite à la plus petite sphère, est supérieure au quadruple de l'aire du grand cercle de cette sphère[5].

31.

La figure circonscrite à la plus petite sphère est équivalente à un cône ayant pour base le cercle équivalent à la surface de la figure et pour hauteur un segment égal au rayon de la sphère.

La figure circonscrite à la plus petite sphère est en effet inscrite dans la plus grande sphère ; mais on a montré[6] que la figure inscrite, limitée par des surfaces coniques, est équivalente au cône ayant pour base le cercle équivalent à la surface de la figure et pour hauteur un segment égal à la perpendiculaire abaissée du centre de la sphère sur un des côtés du polygone (sc. dont la révolution engendre la figure composée de surfaces coniques) ; or cette perpendiculaire est égale au rayon de la plus petite sphère ; la proposition est donc évidente.

1. Cf. prop. 21.
2. D'après Eucl. VI, 16.
3. Cf. prop. 29.
4. L'égalité $\lambda^2 = Z\Theta \cdot \Theta K$, jointe à l'inégalité $Z\Theta > \Theta K$, entraîne $\lambda > \Theta K$; cf. Eucl. III, 15.
5. Cf. Eucl. XII, 2.
6. Cf. prop. 26.

ἐγγέγραπται καὶ ἀρτιογώνιον, αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς τοῦ πολυγώνου πλευρὰς παράλληλοι οὖσαι τῇ ΖΘ πρὸς τὴν ΖΘ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσιν, ὃν ἡ ΘΚ πρὸς ΚΖ· ἴσον ἄρα ἐστὶν τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ πολυγώνου καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς ἐπιζευγνυούσαις τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν ΖΘΚ· ὥστε ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Λ κύκλου ἴσον δύναται τῷ ὑπὸ ΖΘΚ· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Λ κύκλου τῆς ΘΚ. Ἡ δὲ ΘΚ ἴση ἐστὶ τῇ διαμέτρῳ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου [διπλασία γάρ ἐστιν τῆς ΧΣ οὔσης ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου]· δῆλον οὖν ὅτι μείζων ἐστὶν ἢ τετραπλάσιος ὁ Λ κύκλος, τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν, τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ.

λα'.

Τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι περὶ τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν ἴσος ἐστὶ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας.

Τὸ γὰρ περιγεγραμμένον σχῆμα περὶ τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν ἐγγέγραπται ἐν τῇ μείζονι σφαίρᾳ· τῷ δὲ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν κωνικῶν ἐπιφανειῶν δέδεικται ἴσος κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καθέτῳ ἠγμένῃ· αὕτη δέ ἐστιν ἴση τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας· δῆλον οὖν ἐστι τὸ προτεθέν.

2 ΖΘ ms. B : ΖΕ mss. DEGH ‖ 3 ΖΘ mss. BG : ΖΕ mss. DEH ‖ 5 ἴσης om. DEH.

Corollaire.

D'après ce qui précède, il est évident que la figure circonscrite à la plus petite sphère est supérieure au quadruple du cône ayant pour base le grand cercle de la sphère et pour hauteur le rayon de la sphère. Car du moment que la figure est équivalente à un cône ayant pour base une aire équivalente à sa surface et pour hauteur la perpendiculaire abaissée du centre de la sphère sur un des côtés du polygone, c'est-à-dire un segment égal au rayon de la plus petite sphère[1], et que la surface de la figure circonscrite à la sphère est supérieure au quadruple du grand cercle de la sphère, la figure circonscrite à la sphère sera supérieure au quadruple du cône ayant pour base le grand cercle et pour hauteur le rayon de la sphère, puisque le cône qui lui est équivalent est supérieur au quadruple du cône indiqué du moment qu'il a une base supérieure au quadruple et une hauteur égale[2].

32.

Si une figure est inscrite dans une sphère et qu'une autre est circonscrite à cette sphère, les deux figures étant engendrées[3] par des polygones semblables de la même manière que dans les propositions qui précèdent, le rapport de la surface de la figure circonscrite à la surface de la figure inscrite est égal au carré du rapport entre le côté du polygone circonscrit au grand cercle et le côté du polygone inscrit dans le même cercle, et le rapport du volume de la figure circonscrite au volume

1. Cf. prop. 31.
2. Cf. lemme 1, p. 48.
3. En adoptant la conjecture du « Censor Jenensis » dans Jenaer Litteraturzeitung, 1795, fasc. 172-73, p. 610-23 ; cf. app. cr.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δὲ φανερὸν ὅτι τὸ σχῆμα τὸ περιγραφόμενον περὶ τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν μεῖζόν ἐστιν ἢ τετραπλάσιον κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν μέγιστον κύκλον τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. Ἐπειδὴ γὰρ ἴσος ἐστὶ τῷ σχήματι κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ αὐτοῦ, ὕψος δὲ ἴσον [τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καθέτῳ ἠγμένῃ, τουτέστιν] τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας, ἔστι δὲ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὴν σφαῖραν μείζων ἢ τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, μεῖζον ἄρα ἢ τετραπλάσιον ἔσται τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον περὶ τὴν σφαῖραν τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν μέγιστον κύκλον, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ἐπειδὴ καὶ ὁ κῶνος ὁ ἴσος αὐτῷ μείζων ἢ τετραπλάσιος γίνεται τοῦ εἰρημένου κώνου [βάσιν τε γὰρ μείζονα ἢ τετραπλασίαν ἔχει καὶ ὕψος ἴσον].

λβ'.

Ἐὰν ᾖ ἐν σφαίρᾳ σχῆμα ἐγγεγραμμένον καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον ὑπὸ ὁμοίων πολυγώνων τὸν αὐτὸν τρόπον τοῖς πρότερον κατεσκευασμένα, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐπιφάνειαν διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου περὶ τὸν μέγιστον κύκλον πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ, αὐτὸ δὲ τὸ σχῆμα [τὸ περιγεγραμμένον]

4 τὸν add. Heiberg || 12 μεῖζον CGH : μείζων DE || 14 τοῦ alt. add. Heiberg || 16 ὁ alt. om. C || 20 ᾖ om. C || 22 κατεσκευασμένα Jen : κατεσκευασμένοις BCDEGH || 27 τὸ περιγεγραμμένον del. Heiberg.

de la figure inscrite est égal au cube du même rapport.

Soit ΑΒΓΔ le grand cercle d'une sphère ; que soit inscrit dans ce cercle un polygone équilatéral dont le nombre des côtés soit divisible par quatre ; circonscrivons à ce cercle un autre polygone, semblable au polygone inscrit ; que, de plus, les côtés du polygone circonscrit soient tangents au cercle au milieu des arcs découpés par les côtés du polygone inscrit. Soient ΕΗ et ΖΘ des diamètres perpendiculaires l'un à l'autre du cercle circonscrit au polygone circonscrit (sc. au cercle ΑΒΓΔ) et disposés de la même manière que les diamètres ΑΓ et ΒΔ, et imaginons que soient menées celles des cordes, joignant les sommets opposés du polygone, qui sont parallèles entre elles et à la droite ΖΒΔΘ. Si dans ces conditions le diamètre ΕΗ reste sur place et que les périmètres des polygones tournent en même temps que[1] la circonférence du cercle, l'une des deux figures (sc. engendrées par cette révolution) sera inscrite dans la sphère, l'autre lui sera circonscrite. Il faut donc démontrer que le rapport de la surface de la figure circonscrite à la surface de la figure inscrite est égal au carré du rapport entre les côtés ΕΛ et ΑΚ, et que le rapport du volume de la figure circonscrite au volume de la figure inscrite est égal au cube du même rapport.

Soit Μ un cercle équivalent à la surface de la figure circonscrite à la sphère, Ν un cercle équivalent à la surface de la figure inscrite. Le carré sur le rayon du cercle Μ est donc équivalent au rectangle ayant pour côtés le segment ΕΛ et un segment égal à la somme des cordes joignant les sommets du polygone circonscrit[2], et le carré sur le rayon du cercle Ν est équivalent au rectangle ayant pour côtés le segment ΑΚ et un segment

1. Le texte grec dit « autour de la circonférence... » ; mais il s'agit sans doute, comme le fait remarquer Heiberg, de la négligence d'un copiste.

2. Cf. prop. 29.

πρὸς τὸ σχῆμα τριπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ αὐτοῦ λόγου.

Ἔστω ἐν σφαίρᾳ κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸν πολύγωνον ἰσόπλευρον, τὸ δὲ πλῆθος τῶν πλευρῶν αὐτοῦ μετρείσθω ὑπὸ τετράδος, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω περὶ τὸν κύκλον ὅμοιον τῷ ἐγγεγραμένῳ, ἔτι δὲ αἱ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πλευραὶ ἐπιψαυέτωσαν τοῦ κύκλου κατὰ μέσα τῶν περιφερειῶν τῶν ἀποτεμνομένων ὑπὸ τῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου πλευρῶν, αἱ δὲ ΕΗ, ΖΘ διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἔστωσαν ἀλλήλαις τοῦ κύκλου τοῦ περιλαμβάνοντος τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον καὶ ὁμοίως κείμεναι ταῖς ΑΓ, ΒΔ διαμέτροις, καὶ νοείσθωσαν ἐπιζευγνύμεναι ἐπὶ τὰς ἀπεναντίον γωνίας τοῦ πολυγώνου, αἳ γίγνονται ἀλλήλαις τε καὶ τῇ ΖΒΔΘ παράλληλοι. Μενούσης δὴ τῆς ΕΗ διαμέτρου καὶ περιενεχθεισῶν τῶν περιμέτρων τῶν πολυγώνων περὶ τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν τὸ μὲν ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἔσται ἐν τῇ σφαίρᾳ, τὸ δὲ περιγεγραμμένον· δεικτέον οὖν ὅτι ἡ μὲν ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΛ πρὸς ΑΚ, τὸ δὲ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον τριπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ αὐτοῦ λόγου.

Ἔστω γὰρ ὁ μὲν Μ κύκλος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὴν σφαῖραν, ὁ δὲ Ν ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἐγγεγραμμένου· δύναται ἄρα τοῦ μὲν Μ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ΕΛ καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς ἐπιζευγνυούσαις τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου τοῦ περιγεγραμμένου, ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Ν τὸ ὑπὸ

5 ἔτι δὲ αἱ Heiberg : ἐπὶ δὲ BCDEGH ‖ 9 ἀλλήλαις C : ἀλλήλοις DEGH ‖ 16 ἐγγεγραμμένον Nizzius : περιγεγραμμένον BCDEGH ‖ 17 περιγεγραμμένον Nizzius : ἐγγεγραμμένον BCDEGH ‖ 21 πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον C : om. BDEGH ‖ 28 τὸ BC : τοῦ DEGH.

égal à la somme des cordes joignant les sommets (sc. du polygone inscrit)[1]. Et puisque les polygones sont semblables entre eux, il en sera de même[2] des aires limitées par les segments de droite indiqués, c'est-à-dire par les cordes joignant les sommets et par les côtés[3] des polygones, de façon que le rapport qu'ont ces aires entre elles est égal au carré du rapport entre les côtés des polygones ; mais le rapport entre les aires comprises entre les lignes indiquées est aussi égal au carré du rapport qu'ont entre eux les rayons des cercles M et N ; par conséquent, les diamètres des cercles M

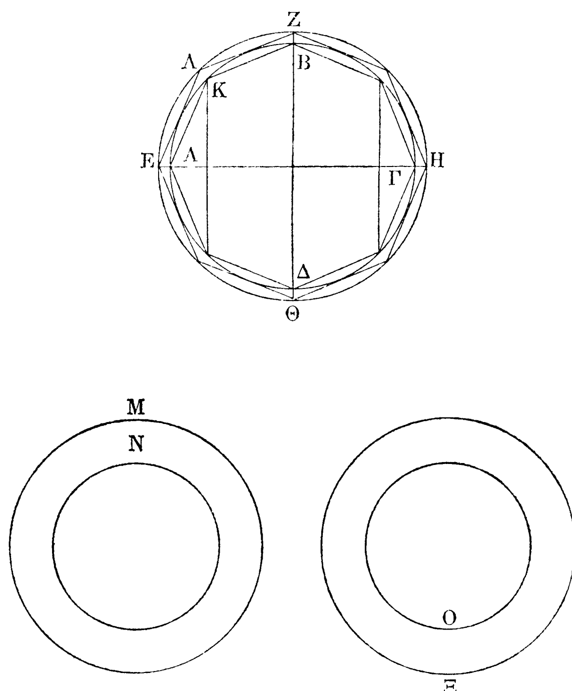


Fig. 33.

1. Cf. prop. 24.
2. D'après Eucl. V, 12 ; VI, 4 et VI, 20.
3. En adoptant la leçon de Torellius.

τῆς ΑΚ καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς ἐπιζευγνυούσαις τὰς γωνίας. Καὶ ἐπεὶ ὅμοιά ἐστιν τὰ πολύγωνα, ὅμοια ἂν εἴη καὶ τὰ περιεχόμενα χωρία ὑπὸ τῶν εἰρημένων γραμμῶν [τουτέστι τῶν ἐπὶ τὰς γωνίας καὶ τῶν πλευρῶν τῶν πολυγώνων, ὥστε τὸν αὐτὸν λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα, ὃν ἔχουσιν αἱ τῶν πολυγώνων πλευραὶ δυνάμει. Ἀλλὰ καὶ ὃν ἔχει λόγον τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν εἰρημένων γραμμῶν, τοῦτον ἔχουσιν αἱ ἐκ τῶν κέντρων τῶν Μ, Ν κύκλων πρὸς ἀλλήλας δυνάμει· ὥστε καὶ αἱ τῶν Μ, Ν διάμετροι τὸν

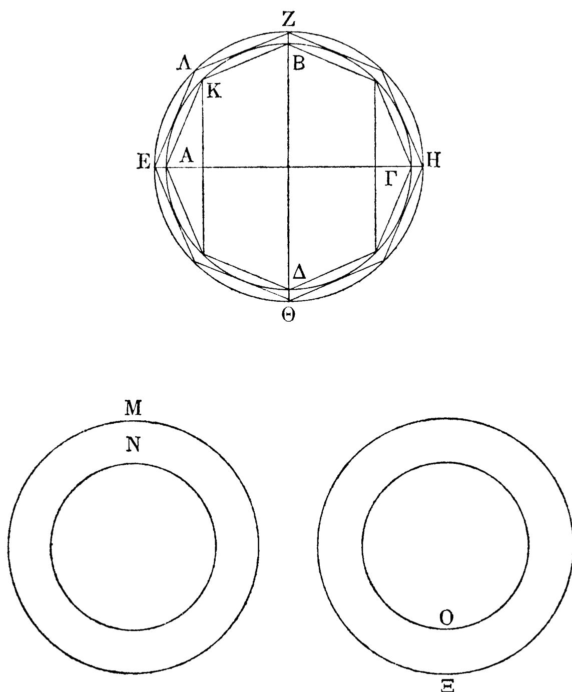


Fig. 33.

4 καὶ τῶν πλευρῶν Torellius : ἢ τὰς πλευρὰς BCDEGH ‖ 5 ἄλληλα Basil. : ἀλλήλας CDEGH ‖ 9 ἀλλήλας DEGH : ἀλλήλαις C.

et N ont eux aussi le même rapport que les côtés des polygones. Or les cercles ont entre eux le rapport des carrés sur les diamètres, et ils sont équivalents aux surfaces de la figure circonscrite et de la figure inscrite ; il est donc évident que le rapport de la surface de la figure, circonscrite à la sphère, à la surface de la figure inscrite dans la sphère est égal au carré du rapport qu'ont entre eux les côtés EΛ et AK.

Soient maintenant deux cônes O et Ξ ; que le cône Ξ ait pour base le cercle Ξ égal au cercle M ; que le cône O ait pour base le cercle O égal au cercle N ; que le cône Ξ ait pour hauteur le rayon de la sphère, que le cône O ait pour hauteur la perpendiculaire abaissée du centre sur AK. Le cône Ξ est donc équivalent à la figure circonscrite à la sphère[1], et le cône O équivalent à la figure qui y est inscrite[2], comme nous l'avons démontré. Et puisque les polygones sont semblables, le rapport de EΛ à AK est égal au rapport du rayon de la sphère à la perpendiculaire abaissée du centre de la sphère sur AK. Le rapport de la hauteur du cône Ξ à la hauteur du cône O est donc le même que celui de EΛ à AK. Mais le rapport du diamètre du cercle M au diamètre du cercle N est lui aussi égal au rapport de EΛ à AK. Dans les cônes Ξ et O les diamètres des bases ont donc le même rapport que les hauteurs[3] ; les cônes sont donc semblables, et pour cette raison le rapport du cône Ξ au cône O est égal au cube du rapport entre le diamètre du cercle M et le diamètre du cercle N[4]. Il est donc évident que le rapport de la figure circonscrite à la figure inscrite est égal au cube du rapport de EΛ à AK.

1. Cf. prop. 31.
2. Cf. prop. 26.
3. Cf. lemme 5, p. 48.
4. Cf. Eucl. XII, 12.

αὐτὸν ἔχουσι λόγον ταῖς τῶν πολυγώνων πλευραῖς. Οἱ δὲ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους διπλασίονα λόγον ἔχουσιν τῶν διαμέτρων, οἵτινες ἴσοι εἰσὶν ταῖς ἐπιφανείαις τοῦ περιγεγραμμένου καὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου]· δῆλον οὖν ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὴν σφαῖραν πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος εἰς τὴν σφαῖραν διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΛ πρὸς ΑΚ.

Εἰλήφθωσαν δὴ δύο κῶνοι οἱ Ο, Ξ, καὶ ἔστω ὁ μὲν Ξ κῶνος βάσιν ἔχων τὸν Ξ κύκλον ἴσον τῷ Μ, ὁ δὲ Ο βάσιν ἔχων τὸν Ο κύκλον ἴσον τῷ Ν, ὕψος δὲ ὁ μὲν Ξ κῶνος τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ὁ δὲ Ο τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ΑΚ κάθετον ἠγμένην· ἴσος ἄρα ὁ μὲν Ξ κῶνος τῷ σχήματι τῷ περιγεγραμμένῳ περὶ τὴν σφαῖραν, ὁ δὲ Ο τῷ ἐγγεγραμμένῳ [δέδεικται οὖν ταῦτα]. Καὶ ἐπεὶ ὅμοιά ἐστι τὰ πολύγωνα, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἡ ΕΛ πρὸς τὴν ΑΚ, ὃν ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὴν ΑΚ κάθετον ἀγομένην· τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει τὸ ὕψος τοῦ Ξ κώνου πρὸς τὸ ὕψος τοῦ Ο κώνου, ὃν ἡ ΕΛ πρὸς ΑΚ. Ἔχει δὲ καὶ ἡ διάμετρος τοῦ Μ κύκλου πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ Ν κύκλου λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΕΛ πρὸς ΑΚ· τῶν ἄρα Ξ, Ο κώνων αἱ διάμετροι τῶν βάσεων τοῖς ὕψεσι τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον [ὅμοιοι ἄρα εἰσίν], καὶ διὰ τοῦτο τριπλασίονα λόγον ἕξει ὁ Ξ κῶνος πρὸς τὸν Ο κῶνον ἤπερ ἡ διάμετρος τοῦ Μ κύκλου πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ Ν κύκλου. Δῆλον οὖν ὅτι καὶ τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον τριπλασίονα λόγον ἕξει ἤπερ ἡ ΕΛ πρὸς ΑΚ.

4 καὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου BDEGH : om. C ‖ 10 τὸν DEGH : τοῦ C ‖ O ms. G : B mss. CDEH ‖ 15 οὖν CDEGH : γὰρ B ‖ 16 τὴν C : om. DEGH ‖ 20 O mss. BCG : om. DEH ‖ 24 τοῦτο Heiberg : τὸ αὐτὸ BCDEGH.

33.

Dans toute sphère, la surface est quadruple du grand cercle[1].

Soit en effet une sphère, et soit A un cercle dont l'aire est quadruple de celle du grand cercle. Je dis que le cercle A est équivalent à la surface de la sphère.

S'il n'en est pas ainsi, il est ou bien supérieur ou bien inférieur à cette surface. Que la surface de la sphère soit d'abord supérieure à l'aire du cercle A. On a dès lors deux grandeurs inégales, la surface de la sphère et le cercle A. Il est donc possible de prendre deux segments de droite inégaux tels que le rapport du plus grand au plus petit soit inférieur au rapport de la surface de la sphère au cercle A[2]. Prenons les segments B et Γ, et soit Δ la moyenne proportionnelle entre B et Γ. Imaginons, de plus, que la sphère soit coupée par un plan passant par le centre suivant le cercle EZHΘ, et qu'on ait inscrit et circonscrit à ce cercle des polygones de manière que le polygone circonscrit soit semblable au polygone inscrit et que le rapport entre le côté du polygone circonscrit et le côté du polygone inscrit[3] soit inférieur au rapport entre le segment B et le segment Δ[4] ; le carré du premier rapport est alors inférieur au carré du second ; le rapport de B à Γ est égal au carré du rapport de B à Δ[5], et le rapport de la surface de la figure circonscrite à la sphère à la surface de la figure inscrite est égal au carré du rapport entre le côté du polygone circonscrit et le côté du polygone inscrit[6]. Il s'ensuit que le rapport de la surface de la figure circonscrite à la sphère à la figure inscrite est inférieur au rapport de la surface de la sphère à l'aire du cercle A, ce qui est absurde ; car la surface de la figure circonscrite à la sphère est supérieure à la

1. Proposition citée par Simplicius, *In Aristt. De caelo*, p. 549, 18 sq. ; Héron, *Metrica*, p. 2, 18 ; 86, 29 ; Pappus, *Coll.* I, p. 360.
2. Cf. prop. 2.
3. Par une négligence des copistes, ces derniers mots, πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου, manquent dans les manuscrits.
4. Cf. prop. 3. 5. Cf. Eucl. VI, 20, coroll. 2. 6. Cf. prop. 32.

λγ'.

Πάσης σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐστὶ τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν αὐτῇ.

Ἔστω γὰρ σφαῖρά τις καὶ ἔστω τετραπλάσιος τοῦ μεγίστου κύκλου ὁ Α· λέγω ὅτι ὁ Α ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας.

Εἰ γὰρ μή, ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ ἐλάσσων. Ἔστω πρότερον μείζων ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας τοῦ κύκλου. Ἔστι δὴ δύο μεγέθη ἄνισα ἥ τε ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας καὶ ὁ Α κύκλος· δυνατὸν ἄρα ἐστὶ λαβεῖν δύο εὐθείας ἀνίσους, ὥστε τὴν μείζονα πρὸς τὴν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἐλάσσονα τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας πρὸς τὸν κύκλον. Εἰλήφθωσαν αἱ Β, Γ, καὶ τῶν Β, Γ μέση ἀνάλογον ἔστω ἡ Δ, νοείσθω δὲ καὶ ἡ σφαῖρα ἐπιπέδῳ τετμημένη διὰ τοῦ κέντρου κατὰ τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, νοείσθω δὲ καὶ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένον καὶ περιγεγραμμένον πολύγωνον, ὥστε ὅμοιον εἶναι τὸ περιγεγραμμένον τῷ ἐγγεγραμμένῳ πολυγώνῳ καὶ τὴν τοῦ περιγεγραμμένου πλευρὰν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν τοῦ ὃν ἔχει ἡ Β πρὸς Δ [καὶ ὁ διπλάσιος ἄρα λόγος τοῦ διπλασίου λόγου ἐστὶν ἐλάσσων. Καὶ τοῦ μὲν τῆς Β πρὸς Δ διπλάσιός ἐστιν ὁ τῆς Β πρὸς τὴν Γ, τῆς δὲ πλευρᾶς τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου διπλάσιος ὁ τῆς ἐπιφανείας τοῦ περιγεγραμμένου στερεοῦ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου]· ἡ ἐπιφάνεια ἄρα τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὴν σφαῖραν πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας πρὸς τὸν Α κύκλον· ὅπερ ἄτοπον· ἡ μὲν γὰρ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου τῆς ἐπιφανείας τῆς

4 ἔστω BCG : ὡς DEH || 8-9 τοῦ — σφαίρας om. C || 16 *καὶ* περιγεγραμμένον om. C.

surface de la sphère[1], et, d'autre part, la surface de la figure inscrite à la sphère est inférieure à l'aire du cercle A[2]; on a montré en effet que la surface de la figure inscrite est inférieure au quadruple du grand cercle de la sphère, et le cercle A est quadruple du grand cercle. La surface de la sphère n'est donc pas supérieure à l'aire du cercle A.

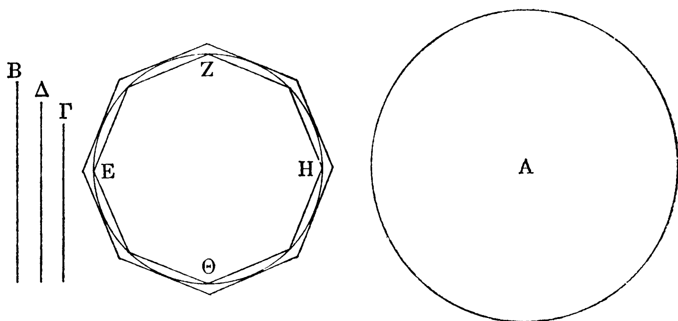


Fig. 34.

Je dis qu'elle ne lui est pas, non plus, inférieure. Qu'elle le soit, si possible. Trouvons, de la même manière que précédemment, deux segments de droite B et Γ tels que le rapport de B à Γ soit inférieur au rapport de l'aire du cercle A à la surface de la sphère[3], et un segment Δ qui soit moyenne proportionnelle entre B et Γ. Inscrivons et circonscrivons de nouveau des polygones de manière que le rapport du côté du polygone circonscrit au côté du polygone inscrit soit inférieur au rapport de B à Δ[4]; le carré du premier rapport sera alors inférieur au carré du deuxième rapport. Le rapport de la surface circonscrite à la sphère à la surface inscrite sera par conséquent inférieur au rapport de B à Γ, qui est inférieur au rapport de l'aire du cercle A à la surface de la sphère, ce qui est absurde,

1. Cf. prop. 28.
2. Cf. prop. 25.
3. Cf. prop. 2.
4. Cf. prop. 3.

σφαίρας μείζων ἐστίν, ἡ δὲ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος τοῦ Α κύκλου ἐλάσσων ἐστί [δέδεικται γὰρ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσων τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ ἢ τετραπλασία, τοῦ δὲ μεγίστου κύκλου τετραπλάσιός ἐστιν ὁ Α κύκλος]. Οὐκ ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας μείζων ἐστὶ τοῦ Α κύκλου.

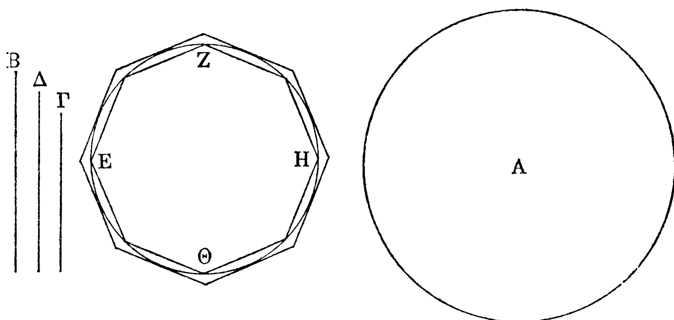


Fig. 34.

Λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων. Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω· καὶ ὁμοίως εὑρήσθωσαν αἱ Β, Γ εὐθεῖαι ὥστε τὴν Β πρὸς Γ ἐλάσσονα λόγον ἔχειν τοῦ ὃν ἔχει ὁ Α κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, καὶ τῶν Β, Γ μέση ἀνάλογον ἡ Δ, καὶ ἐγγεγράφθω καὶ περιγεγράφθω πάλιν, ὥστε τὴν τοῦ περιγεγραμμένου ἐλάσσονα λόγον ἔχειν τοῦ τῆς Β πρὸς Δ [καὶ τὰ διπλάσια ἄρα]· ἡ ἐπιφάνεια ἄρα τοῦ περιγεγραμμένου πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ [ἡ Β πρὸς Γ. Ἡ δὲ Β πρὸς Γ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ] ὁ Α κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας· ὅπερ ἄτοπον· ἡ μὲν γὰρ τοῦ περι-

12 τοῦ alt. BCG : τὸ DEH ‖ 15-16 ἡ Β — ἤπερ C : om. BDEGH.

puisque la surface de la figure circonscrite est supérieure à l'aire du cercle A[1], alors que la surface de la figure inscrite est inférieure à la surface de la sphère[2].

Il s'ensuit que la surface de la sphère n'est pas inférieure à l'aire du cercle A. Mais on a démontré qu'elle n'est pas, non plus, supérieure à A. La surface de la sphère est donc équivalente à l'aire du cercle A, c'est-à-dire au quadruple de l'aire du grand cercle.

34.

Toute sphère est quadruple du cône ayant une base équivalente au grand cercle de la sphère et une hauteur égale au rayon de la sphère.

Soit en effet une sphère et dans cette sphère le grand cercle ΑΒΓΔ. Si donc la sphère n'est pas équivalente au quadruple du cône indiqué, qu'elle soit, si possible, supérieure au quadruple. Soit un cône Ξ ayant une base équivalente au quadruple du cercle ΑΒΓΔ et une hauteur égale au rayon de la sphère. Dans ces conditions, la sphère sera supérieure au cône Ξ, et la sphère et le cône seront par conséquent deux grandeurs inégales. Il est donc possible de prendre deux segments de droite inégaux tels que le rapport du plus grand au plus petit soit inférieur au rapport entre la sphère et le cône Ξ[3]. Soient donc les segments de droite Κ et Η, et prenons les segments Ι et Θ de manière que Κ dépasse Ι, que Ι dépasse Θ et que Θ dépasse Η d'une même grandeur. De plus, imaginons inscrit dans le cercle ΑΒΓΔ un polygone dont le nombre de côtés soit divisible par quatre, et circonscrit à ce cercle un autre polygone, semblable au polygone inscrit, comme dans les propositions qui précèdent. Que le rapport du côté du polygone circonscrit au côté du polygone inscrit soit inférieur au rapport entre Κ et Ι[4] ; soient ΑΓ et ΒΔ des diamètres perpendiculaires l'un à l'autre. Si

1. Cf. prop. 30.
2. Cf. prop. 29.
3. Cf. prop. 2.
4. Cf. prop. 3.

γεγραμμένου ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ τοῦ Α κύκλου, ἡ δὲ τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσων τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. Οὐκ ἄρα οὐδὲ ἐλάσσων ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας τοῦ Α κύκλου. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ μείζων· ἡ ἄρα ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἴση ἐστὶ τῷ Α κύκλῳ, τουτέστι τῷ τετραπλασίῳ τοῦ μεγίστου κύκλου.

λδ'.

Πᾶσα σφαῖρα τετραπλασία ἐστὶ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ μεγίστω κύκλῳ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας.

Ἔστω γὰρ σφαῖρά τις καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ. Εἰ οὖν μή ἐστιν ἡ σφαῖρα τετραπλασία τοῦ εἰρημένου κώνου, ἔστω, εἰ δυνατόν, μείζων ἢ τετραπλασία· ἔστω δὲ ὁ Ξ κῶνος βάσιν μὲν ἔχων τετραπλασίαν τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας· μείζων οὖν ἐστιν ἡ σφαῖρα τοῦ Ξ κώνου. Ἔσται δὴ δύο μεγέθη ἄνισα ἥ τε σφαῖρα καὶ ὁ κῶνος· δυνατὸν οὖν δύο εὐθείας λαβεῖν ἀνίσους, ὥστε ἔχειν τὴν μείζονα πρὸς τὴν ἐλάσσονα ἐλάσσονα λόγον τοῦ ὃν ἔχει ἡ σφαῖρα πρὸς τὸν Ξ κῶνον. Ἔστωσαν οὖν αἱ Κ, Η, αἱ δὲ Ι, Θ εἰλημμέναι, ὥστε τῷ ἴσῳ ἀλλήλων ὑπερέχειν τὴν Κ τῆς Ι καὶ τὴν Ι τῆς Θ καὶ τὴν Θ τῆς Η, νοείσθω δὲ καὶ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον ἐγγεγραμμένον πολύγωνον, οὗ τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν μετρείσθω ὑπὸ τετράδος, καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον ὅμοιον τῷ ἐγγεγραμμένῳ, καθάπερ ἐπὶ τῶν πρότερον, ἡ δὲ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω τοῦ ὃν ἔχει ἡ Κ πρὸς Ι, καὶ ἔστωσαν αἱ ΑΓ, ΒΔ διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις. Εἰ οὖν μενούσης τῆς ΑΓ διαμέτρου

22 Θ pr. mss. BCG : Η mss. DEH.

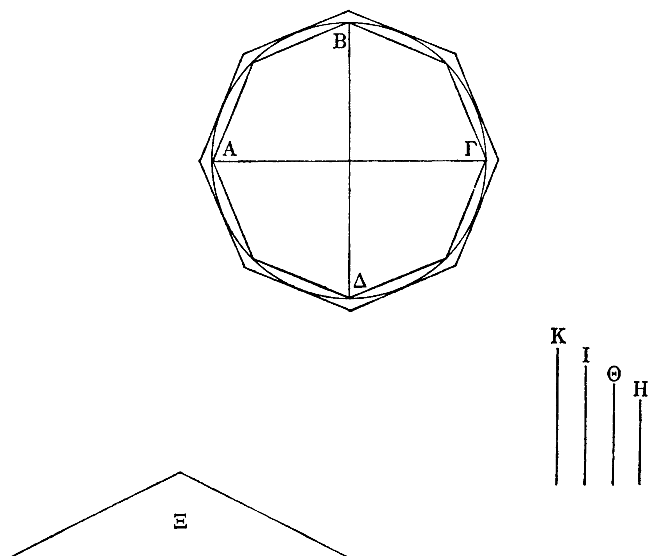


Fig. 35.

maintenant, le diamètre ΑΓ restant en place, le plan contenant les polygones tourne, il y aura une figure inscrite dans la sphère et une figure qui lui sera circonscrite, et le rapport de la figure circonscrite à la figure inscrite sera égal au cube du rapport entre le côté du polygone circonscrit au cercle ΑΒΓΔ et le côté du polygone inscrit à ce cercle[1]. Mais le rapport de côté à côté est inférieur au rapport de K à I, de façon que le rapport de la figure circonscrite à la figure inscrite est inférieur au cube du rapport de K à I. Or le rapport de K à H est aussi supérieur au cube du rapport de K à I, ce qui est évident en vertu des lemmes. A plus forte raison donc le rapport de la figure circonscrite à la figure inscrite est inférieur au rapport de K à H. Mais le rapport de K à H est inférieur au rapport de la sphère au cône

1. Cf. prop. 32.

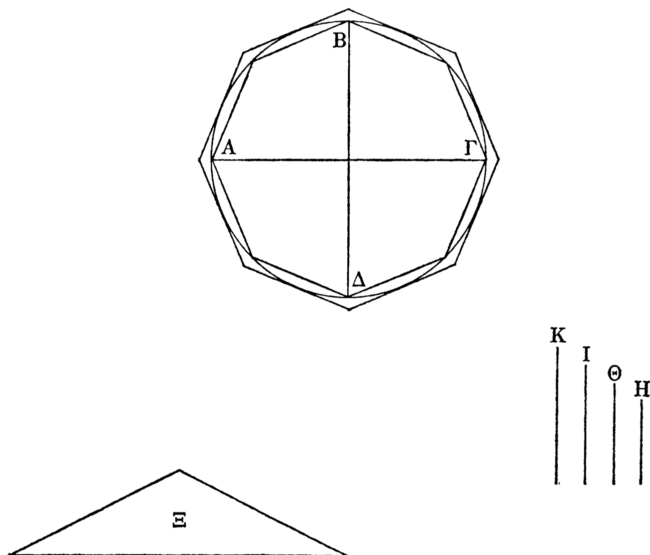


Fig. 35.

περιενεχθείη τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ τὰ πολύγωνα, ἔσται σχήματα τὸ μὲν ἐγγεγραμμένον ἐν τῇ σφαίρᾳ, τὸ δὲ περιγεγραμμένον, καὶ ἕξει τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον τριπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον. Ἡ δὲ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευρὰν ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Κ πρὸς τὴν Ι· ὥστε τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον ἐλασσονα λόγον ἔχει ἢ τριπλασίονα τοῦ Κ πρὸς Ι. Ἔχει δὲ καὶ ἡ Κ πρὸς Η μείζονα λόγον ἢ τριπλάσιον τοῦ ὃν ἔχει ἡ Κ πρὸς Ι [τοῦτο γὰρ φανερὸν διὰ λημμάτων]· πολλῷ ἄρα τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει ἡ Κ πρὸς Η. Ἡ δὲ Κ πρὸς Η ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ σφαῖρα πρὸς τὸν Ξ κῶνον· καὶ ἐναλλάξ·

2 σχήματα Heiberg : τὸ σχῆμα BDEGH.

Ξ[1] ; et par permutation, ce qui est impossible, du fait que, d'une part, la figure circonscrite est supérieure à la sphère et que, d'autre part, la figure inscrite est inférieure au cône Ξ, parce que le cône Ξ est quadruple du cône ayant une base équivalente au cercle ΑΒΓΔ et une hauteur égale au rayon de la sphère, et que la figure inscrite est inférieure au quadruple du cône indiqué. Il s'ensuit que la sphère n'est pas supérieure au quadruple du cône indiqué.

Qu'elle soit maintenant, si possible, inférieure au quadruple. La sphère est ainsi inférieure au cône Ξ. Donnons-nous les segments de droite K et H tels que K soit supérieur à H et que le rapport de K à H soit inférieur au rapport du cône Ξ à la sphère[2]. Posons, de plus, les segments de droite Θ et I comme précédemment[3]. Imaginons un polygone inscrit dans le cercle ΑΒΓΔ et un autre polygone circonscrit à ce cercle de manière que le rapport du côté du polygone circonscrit au côté du polygone inscrit soit inférieur au rapport de K à I, les autres dispositions étant prises comme dans ce qui précède. Le rapport entre la figure solide circonscrite et la figure inscrite sera donc encore égal au cube du rapport entre le côté du polygone circonscrit au cercle ΑΒΓΔ et le côté du polygone qui lui est inscrit[4]. Mais le rapport de côté à côté est inférieur au rapport de K à I. Il s'ensuit que le rapport de la figure circonscrite (sc. à la sphère) à la figure inscrite sera inférieur au cube du rapport de K à I. Mais le rapport de K à H est supérieur au cube du rapport de K à I, de façon que le rapport de la figure circonscrite à la figure inscrite est inférieur au rapport de K à H. Mais le rapport de K à H est inférieur au rapport du

1. Ici, il convient de compléter le raisonnement : « et par conséquent le rapport de la figure circonscrite à la figure inscrite est inférieur au rapport de la sphère au cône Ξ », et, par permutation, « le rapport entre la figure circonscrite et la sphère est inférieur au rapport entre la figure inscrite et le cône. » Cf. Heiberg, I, p. 127-129.
2. Cf. prop. 2.
3. Cf. p. 78, l. 20 sq.
4. Cf. prop. 32.

ὅπερ ἀδύνατον· τὸ γὰρ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον μεῖζόν ἐστι τῆς σφαίρας, τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον ἔλασσον τοῦ Ξ κώνου [διότι ὁ μὲν Ξ κῶνος τετραπλάσιός ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ ΑΒΓΔ κύκλῳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσον τοῦ εἰρημένου κώνου ἢ τετραπλάσιον]. Οὐκ ἄρα μείζων ἢ τετραπλασία ἡ σφαῖρα τοῦ εἰρημένου.

Ἔστω, εἰ δυνατόν, ἐλάσσων ἢ τετραπλασία· ὥστε ἐλάσσων ἐστὶν ἡ σφαῖρα τοῦ Ξ κώνου. Εἰλήφθωσαν δὴ αἱ Κ, Η εὐθεῖαι, ὥστε τὴν Κ μείζονα εἶναι τῆς Η καὶ ἐλάσσονα λόγον ἔχειν πρὸς αὐτὴν τοῦ ὃν ἔχει ὁ Ξ κῶνος πρὸς τὴν σφαῖραν, καὶ αἱ Θ, Ι ἐκκείσθωσαν, καθὼς πρότερον, καὶ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον νοείσθω πολύγωνον ἐγγεγραμμένον καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον, ὥστε τὴν πλευρὰν τοῦ περιγεγραμμένου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἤπερ ἡ Κ πρὸς Ι, καὶ τὰ ἄλλα κατεσκευασμένα τὸν αὐτὸν τρόπον τοῖς πρότερον· ἕξει ἄρα καὶ τὸ περιγεγραμμένον στερεὸν σχῆμα πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον τριπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου. Ἡ δὲ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευρὰν ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Κ πρὸς Ι· ἕξει οὖν τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἢ τριπλάσιον τοῦ ὃν ἔχει ἡ Κ πρὸς τὴν Ι. Ἡ δὲ Κ πρὸς τὴν Η μείζονα λόγον ἔχει ἢ τριπλάσιον τοῦ ὃν ἔχει ἡ Κ πρὸς τὴν Ι· ὥστε ἐλάσσονα λόγον ἔχει τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἢ ἡ Κ πρὸς τὴν Η. Ἡ δὲ Κ πρὸς τὴν Η ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ὁ Ξ κῶνος

9 εἰ BGH : ἢ DE ‖ 25-26 I. Ἡ δὲ Κ πρὸς τὴν G : i que autem k ad ms. B om. DEH ‖ 28 K ms. B : HK mss. DEGH.

cône Ξ à la sphère[1], ce qui est impossible, puisque la figure inscrite dans la sphère est inférieure à la sphère[2], et que la figure qui lui est circonscrite est supérieure au cône Ξ[3]. Par conséquent la sphère n'est pas, non plus, inférieure au quadruple du cône ayant une base équivalente au cercle ΑΒΓΔ et une hauteur égale au rayon de la sphère. Or on a montré qu'elle n'est pas plus grande. Elle est donc équivalente au quadruple de ce cône.

Corollaire[4].

Ces propositions étant démontrées, il est évident que tout cylindre ayant pour base le grand cercle d'une sphère et une hauteur égale au diamètre de cette sphère est équivalent aux trois demis de la sphère et que sa surface, bases comprises, est équivalente aux trois demis de la surface de la sphère.

Le cylindre indiqué est en effet équivalent au sextuple du cône ayant la même base et une hauteur égale au rayon de la sphère[5] alors que la sphère, comme nous l'avons démontré, est équivalente au quadruple du même cône[6]. Il est donc évident que le cylindre est équivalent aux trois demis de la sphère. D'autre part, puisqu'on a démontré que la surface du cylindre, sans les bases, est équivalente à un cercle dont le rayon est la moyenne proportionnelle entre la génératrice du cylindre et le diamètre de la base[7], que la génératrice du cylindre indiqué, circonscrit à la sphère, est égale au diamètre de la base, ce qui est évident en vertu de l'égalité entre la moyenne proportionnelle de ces segments et le diamètre de la base, que le cercle dont le rayon est égal au diamètre de la base a une aire quadruple de celle de la base[8], c'est-à-dire quadruple du grand cercle de la sphère, la surface du cylindre sans les bases sera équivalente au quadruple du grand cercle. Il s'ensuit que la surface totale du cylindre, bases comprises, sera équivalente au sextuple du grand cercle.

1-8. Cf. les notes complémentaires à la fin de ce volume.

πρὸς τὴν σφαῖραν· ὅπερ ἀδύνατον· τὸ μὲν γὰρ ἐγγεγραμμένον ἔλασσόν ἐστι τῆς σφαίρας, τὸ δὲ περιγεγραμμένον μεῖζον τοῦ Ξ κώνου. Οὐκ ἄρα οὐδὲ ἐλάσσων ἐστὶν ἡ τετραπλασία ἡ σφαῖρα τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ ΑΒΓΔ κύκλῳ, ὕψος δὲ τὴν ἴσην τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. Ἐδείχθη δὲ, ὅτι οὐδὲ μείζων· τετραπλασία ἄρα.

[ΠΟΡΙΣΜΑ.]

Προδεδειγμένων δὲ τούτων φανερὸν ὅτι πᾶς κύλινδρος βάσιν μὲν ἔχων τὸν μέγιστον κύκλον τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας, ἡμιόλιός ἐστι τῆς σφαίρας καὶ ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ μετὰ τῶν βάσεων ἡμιολία τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

Ὁ μὲν γὰρ κύλινδρος ὁ προειρημένος ἑξαπλάσιός ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὴν αὐτήν, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, ἡ δὲ σφαῖρα δέδεικται τοῦ αὐτοῦ κώνου τετραπλασία οὖσα· δῆλον οὖν ὅτι ὁ κύλινδρος ἡμιόλιός ἐστι τῆς σφαίρας. Πάλιν, ἐπεὶ ἡ ἐπειφάνεια τοῦ κυλίνδρου χωρὶς τῶν βάσεων ἴση δέδεικται κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέση ἀνάλογόν ἐστι τῆς τοῦ κυλίνδρου πλευρᾶς καὶ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως, τοῦ δὲ εἰρημένου κυλίνδρου τοῦ περὶ τὴν σφαῖραν ἡ πλευρὰ ἴση ἐστὶ τῇ διαμέτρῳ τῆς βάσεως [δῆλον ὅτι ἡ μέση αὐτῶν ἀνάλογον ἴση γίνεται τῇ διαμέτρῳ τῆς βάσεως], ὁ δὲ κύκλος ὁ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου ἔχων ἴσην τῇ διαμέτρῳ τῆς βάσεως τετραπλάσιός ἐστι τῆς βάσεως, τουτέστι τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ἔσται ἄρα καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου χωρὶς τῶν βάσεων τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου· ὅλη ἄρα μετὰ τῶν βάσεων ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ἑξαπλασία

8 πόρισμα om. BDEGH ‖ 24 γίνεται Basil. : γὰρ BDEGH ‖ 26 τουτέστι Torellius : τῆς DEGH om. B.

Mais la surface de la sphère est, elle aussi, équivalente au quadruple du grand cercle[1]. La surface totale du cylindre est par conséquent égale aux trois demis de la surface de la sphère.

35.

La surface d'une figure inscrite dans un segment de sphère est équivalente à un cercle tel que le carré de son rayon soit équivalent au rectangle ayant pour côtés un des côtés du polygone inscrit dans le segment du grand cercle et la somme des cordes parallèles à la base de ce segment et de la moitié de cette base.

Soit une sphère et dans cette sphère un segment ayant pour base le cercle de diamètre AH ; inscrivons dans le segment une figure, comme nous venons de l'indiquer, limitée par des surfaces coniques ; soit AHΘ le grand cercle et ΑΓΕΘΖΔΗ un polygone régulier et d'un nombre pair de côtés, hormis le côté AH ; prenons le cercle Λ dont le carré du rayon est équivalent au rectangle compris entre le côté ΑΓ et la somme des cordes EZ, ΓΔ augmentée de la moitié de la base, c'est-à-dire de AK ; il faut montrer que le cercle est équivalent à la surface de la figure.

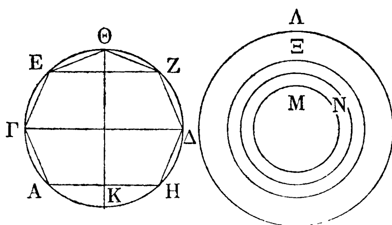


Fig. 36.

1. Cf. prop. 33.

ἔσται τοῦ μεγίστου κύκλου. Ἔστιν δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου. Ὅλη ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ἡμιολία ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

λε'.

Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος εἰς τὸ τμῆμα τῆς σφαίρας ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου ἐν τῷ τμήματι τοῦ μεγίστου κύκλου καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς παραλλήλοις τῇ βάσει τοῦ τμήματος σὺν τῇ ἡμισείᾳ τῆς τοῦ τμήματος βάσεως.

Ἔστω σφαῖρα καὶ ἐν αὐτῇ τμῆμα, οὗ βάσις ὁ περὶ τὴν ΑΗ κύκλος [ἐγγεγράφθω σχῆμα εἰς αὐτό, οἷον εἴρηται, περιεχόμενον ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν], καὶ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΗΘ καὶ ἀρτιόπλευρον πολύγωνον τὸ ΑΓΕΘΖΔΗ χωρὶς τῆς ΑΗ πλευρᾶς, καὶ εἰλήφθω κύκλος ὁ Λ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τῆς ΑΓ πλευρᾶς καὶ ὑπὸ πασῶν τῶν ΕΖ, ΓΔ καὶ ἔτι τῆς ἡμισείας τῆς βάσεως, τουτέστι τῆς ΑΚ· δεικτέον ὅτι ὁ κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ τοῦ σχήματος ἐπιφανείᾳ.

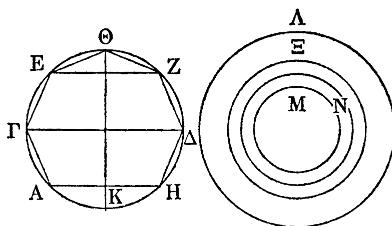


Fig. 36.

8 τῷ ΕΗ : τὸ DG || 17 τῷ ΕΗ : τὸ DG.

Prenons en effet le cercle M dont le carré du rayon est équivalent au rectangle ayant pour côtés EΘ et la moitié de EZ ; le cercle M est donc équivalent à la surface du cône ayant pour base le cercle de diamètre EZ et pour sommet le point Θ[1]. Prenons encore un autre cercle N, dont le carré du rayon est équivalent au rectangle compris entre EΓ et la moitié de la somme de EZ et ΓΔ ; ce cercle N est équivalent à la surface de cône comprise entre les plans parallèles passant par EZ et ΓΔ[2]. Prenons de même un troisième cercle Ξ dont le carré du rayon est équivalent au rectangle compris entre AΓ et la moitié de la somme de ΓΔ et AH ; ce troisième cercle est équivalent à la surface conique comprise entre les plans parallèles passant par AH et ΓΔ. La somme des cercles sera donc équivalente à la surface totale de la figure, et la somme des carrés sur leurs rayons sera équivalente au rectangle compris entre un des côtés, AΓ, et un segment égal à la somme de EZ, ΓΔ et de la moitié de la base, soit AK. Mais le carré sur le rayon du cercle Λ était équivalent à la même aire ; le cercle Λ sera donc équivalent à la somme des cercles M, N, Ξ et, partant, aussi à la surface de la figure inscrite.

36.

Qu'une sphère soit coupée par un plan ne passant pas par le centre ; soit AEZ un grand cercle de la sphère, coupant à angle droit le plan sécant ; inscrivons dans le segment ABΓ un polygone équilatéral d'un nombre pair de côtés hormis la base AB. Comme antérieurement[3], si, ΓZ restant en place, la figure tourne, les sommets Δ, E, A et B décriront les cercles de diamètres ΔE et AB, et les côtés du segment des

1. Cf. prop. 14.
2. Cf. prop. 16.
3. Cf. prop. 23.

Εἰλήφθω γὰρ κύκλος ὁ Μ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ΕΘ πλευρᾶς καὶ τῆς ἡμισείας τῆς ΕΖ· γίνεται δὴ ὁ Μ κύκλος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, οὗ βάσις μὲν ὁ περὶ τὴν ΕΖ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον. Εἰλήφθω δὲ καὶ ἄλλος ὁ Ν, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τῆς ΕΓ καὶ τῆς ἡμισείας συναμφοτέρου τῆς ΕΖ, ΓΔ· ἔσται οὖν οὗτος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ΕΖ, ΓΔ. Καὶ ἄλλος ὁμοίως ὁ Ξ εἰλήφθω κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ΑΓ καὶ τῆς ἡμισείας συναμφοτέρων τῶν ΓΔ, ΑΗ· καὶ αὐτὸς οὖν ἴσος ἐστὶ τῇ κωνικῇ ἐπιφανείᾳ τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ΑΗ, ΓΔ. Πάντες οὖν οἱ κύκλοι ἴσοι ἔσονται τῇ ὅλῃ τοῦ σχήματος ἐπιφανείᾳ, καὶ αἱ ἐκ τῶν κέντρων αὐτῶν ἴσον δυνήσονται τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ μιᾶς πλευρᾶς τῆς ΑΓ καὶ τῆς ἴσης ταῖς ΕΖ, ΓΔ καὶ τῇ ἡμισείᾳ τῆς βάσεως τῇ ΑΚ. Ἐδύνατο δὲ καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Λ κύκλου ἴσον τῷ αὐτῷ χωρίῳ· ὁ ἄρα Λ κύκλος ἴσος ἔσται τοῖς Μ, Ν, Ξ κύκλοις· ὥστε καὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος.

λϛ'.

Τετμήσθω σφαῖρα μὴ διὰ τοῦ κέντρου ἐπιπέδῳ, καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΕΖ τέμνων πρὸς ὀρθὰς τὸ ἐπίπεδον τὸ τέμνον, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸ ΑΒΓ τμῆμα πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόγωνον χωρὶς τῆς βάσεως τῆς ΑΒ. Ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον, ἐὰν μενούσης τῆς ΓΖ περιενεχθῇ τὸ σχῆμα, αἱ μὲν Δ, Ε, Α, Β γωνίαι κατὰ κύκλων οἰσθήσονται, ὧν διάμετροι αἱ ΔΕ, ΑΒ, αἱ δὲ

7 οὖν add. Heiberg ‖ 15 αἱ B : om. DEGH ‖ 21 post λϛ' Stamatis restituit enuntiationem theorematis XXXVI ab Archimede scriptam ; u. Appendicem.

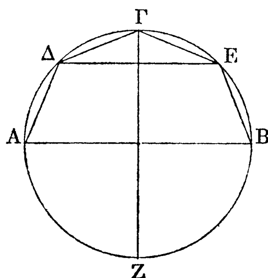


Fig. 37.

surfaces coniques, et la figure solide ainsi engendrée sera limitée par des surfaces coniques et aura pour base le cercle de diamètre AB et pour sommet le point Γ. Comme antérieurement, elle aura une surface inférieure à celle du segment de sphère qui l'entoure ; car la limite commune de ces deux surfaces, du segment et de la figure, est, dans le plan (sc. sécant), la circonférence du cercle de diamètre AB, chacune des deux tourne sa concavité du même côté, et l'une comprend l'autre[1].

37.

La surface de la figure inscrite dans le segment de la sphère est inférieure au cercle dont le rayon est égal au segment de droite joignant le sommet du segment à un point de la périphérie du cercle de base du segment.

Soit une sphère et dans cette sphère le grand cercle ABEZ ; soit dans la sphère un segment ayant pour base le cercle de diamètre AB ; qu'y soit inscrit la figure indiquée, et que dans le segment (sc. correspondant) du (sc. grand) cercle soit inscrit un polygone ; mêmes

1. Cf. postulat 4.

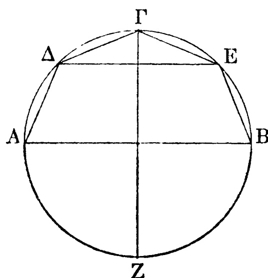


Fig. 37.

πλευραὶ τοῦ τμήματος κατὰ κωνικῆς ἐπιφανείας, καὶ ἔσται τὸ γενηθὲν σχῆμα στερεὸν ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενον βάσιν μὲν ἔχον κύκλον, οὗ διάμετρος ἡ ΑΒ, κορυφὴν δὲ τὸ Γ. Ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον τὴν ἐπιφάνειαν ἐλάσσονα ἕξει τῆς τοῦ τμήματος ἐπιφανείας τοῦ περιλαμβάνοντος· τὸ γὰρ αὐτὸ πέρας αὐτῶν ἐστιν ἐν ἐπιπέδῳ τοῦ τε τμήματος καὶ τοῦ σχήματος ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου, οὗ διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι ἀμφότεραί εἰσιν αἱ ἐπιφάνειαι, καὶ περιλαμβάνεται ἡ ἑτέρα ὑπὸ τῆς ἑτέρας.

λζ′.

Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐν τῷ τμήματι τῆς σφαίρας ἐλάσσων ἐστὶ τοῦ κύκλου, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἠγμένῃ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος.

Ἔστω σφαῖρα καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΕΖ, καὶ ἔστω τμῆμα ἐν τῇ σφαίρᾳ, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΑΒ [καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸ τὸ εἰρημένον σχῆμα, καὶ ἐν τῷ τμήματι τοῦ κύκλου πολύγωνον], καὶ τὰ λοιπὰ τὰ αὐτὰ

3 ἔχον E : ἔχων DGH ‖ 4 κορυφὴν Barrowius : κορυφὴ BDEGH.

conditions pour le reste, le diamètre de la sphère étant ΘΛ et les cordes ΛΕ et ΘΑ étant tracées ; soit un cercle M dont le rayon soit égal à ΑΘ ; il faut démontrer que le cercle M est supérieur à la surface du segment.

Fig. 38.

On a en effet démontré que la surface de la figure est équivalente à un cercle tel que le carré sur son rayon est équivalent au rectangle ayant pour côtés ΕΘ et la somme des cordes ΕΖ et ΓΔ et du segment ΚΑ[1] ; mais on a montré aussi que le rectangle ayant pour côtés ΕΘ et la somme de ΕΖ, ΓΔ et ΚΑ est équivalent au rectangle de côtés ΕΛ et ΚΘ[2] ; mais le rectangle de côtés ΕΛ et ΚΘ est inférieur au carré sur ΑΘ, du moment qu'il est inférieur au rectangle de côtés ΛΘ et ΚΘ[3] ; il apparaît donc que le rayon du cercle équivalent à la figure est inférieur au rayon du cercle M ; il est, par conséquent, évident que le cercle M est supérieur à la surface de la figure[4].

38.

La figure inscrite dans un segment (sc. de sphère inférieur à l'hémisphère), limitée par des surfaces coniques, augmentée du cône ayant la même base que

1-4. Cf. les notes complémentaires.

διαμέτρου μὲν τῆς σφαίρας οὔσης τῆς ΘΛ, ἐπεζευγμένων δὲ τῶν ΛΕ, ΘΑ, καὶ ἔστω κύκλος ὁ Μ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἔστω τῇ ΑΘ · δεικτέον ὅτι ὁ Μ κύκλος μείζων ἐστὶ τῆς τοῦ σχήματος ἐπιφανείας.

Fig. 38.

Ἡ γὰρ ἐπιφάνεια τοῦ σχήματος δέδεικται ἴση οὖσα κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τῆς ΕΘ καὶ τῶν ΕΖ, ΓΔ, ΚΑ · τὸ δὲ ὑπὸ τῆς ΕΘ καὶ τῶν ΕΖ, ΓΔ, ΚΑ δέδεικται ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΕΛ, ΚΘ περιεχομένῳ · τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΕΛ, ΚΘ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΘ [καὶ γὰρ τοῦ ΛΘ, ΚΘ] · φανερὸν οὖν ὅτι ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ὅς ἐστιν ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Μ · δῆλον ἄρα ὅτι ὁ Μ κύκλος μείζων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ σχήματος.

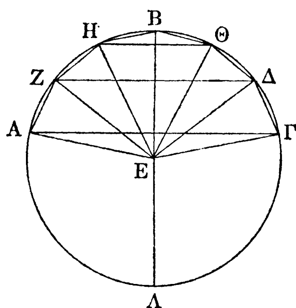
λη'.

Τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῷ τμήματι ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενον σὺν τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν τὴν αὐτὴν ἔχοντι τῷ σχήματι, κορυφὴν δὲ τὸ κέντρον τῆς

3 ἔστω BG : ὥστε DEH ‖ 12 Μ mss. BG : ΛΜ mss. DEH.

la figure et pour sommet le centre de la sphère est équivalente au cône ayant une base équivalente à la surface de la figure et une hauteur égale à la perpendiculaire abaissée du centre de la sphère sur un des côtés du polygone (sc. engendrant la figure).

Soit en effet une sphère, et dans cette sphère un grand cercle et un segment ΑΒΓ inférieur à l'hémisphère ; soit Ε le centre ; inscrivons dans le segment ΑΒΓ un polygone (sc. équilatéral et) d'un nombre pair de côtés, sans ΑΓ, comme précédemment ; que, ΒΛ restant en place, la sphère engendre en tournant une figure limitée par des surfaces coniques ; sur le cercle de diamètre ΑΓ construisons un cône ayant pour sommet le centre ; prenons un cône Κ ayant sa base égale à la surface de la figure et sa hauteur égale à la perpendiculaire abaissée du centre Ε sur un des côtés du polygone ; il faut démontrer que le cône Κ est équivalent à la figure limitée (sc. par les surfaces coniques), augmentée du cône ΑΕΓ.



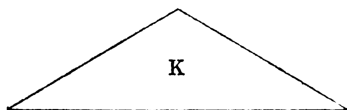
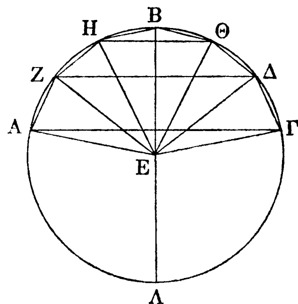


Fig. 39.

Construisons donc des cônes aussi sur les cercles de diamètres ΘΗ et ΔΖ, avec le point Ε comme sommet ; dès lors, le rhombe solide ΗΒΘΕ est équivalent au cône dont la base est équivalente à la surface du cône ΗΒΘ et la

σφαίρας, ἴσον ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν ἔχοντι ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ὕψος δὲ τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ μίαν πλευρὰν τῶν τοῦ πολυγώνου καθέτῳ ἠγμένῃ.

Ἔστω γὰρ σφαῖρα καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος καὶ τμῆμα ἔλασσον ἡμικυκλίου τὸ ΑΒΓ καὶ κέντρον τὸ Ε, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸ ΑΒΓ τμῆμα πολύγωνον ἀρτιόπλευρον χωρὶς τῆς ΑΓ ὁμοίως τοῖς πρότερον, καὶ μενούσης τῆς ΒΛ περιενεχθεῖσα ἡ σφαῖρα ποιείτω σχῆμά τι ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενον, καὶ ἀπὸ τοῦ κύκλου τοῦ περὶ διάμετρον τὴν ΑΓ κῶνος ἀναγεγράφθω κορυφὴν ἔχων τὸ κέντρον, καὶ εἰλήφθω κῶνος ὁ Κ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ὕψος δὲ τῇ ἀπὸ τοῦ Ε κέντρου ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καθέτῳ ἠγμένῃ· δεικτέον ὅτι ὁ Κ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ περιεχομένῳ σχήματι σὺν τῷ κώνῳ τῷ ΑΕΓ.



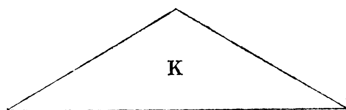


Fig. 39.

Ἀναγεγράφθωσαν δὴ καὶ κῶνοι ἀπὸ τῶν κύκλων τῶν περὶ διαμέτρους τὰς ΘΗ, ΔΖ κορυφὴν ἔχοντες τὸ Ε σημεῖον· οὐκοῦν ὁ μὲν ΗΒΘΕ ῥόμβος στερεὸς ἴσος ἐστὶ κώνῳ, οὗ ἡ μὲν βάσις ἴση ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ

2 τῇ B : τὴν DEGH ‖ 8 ΒΛ ms. B : BA mss. CDEGH ‖ 16 τῇ BG : τὴν CDEH ‖ 21 σχήματι B : τμήματι CDEGH ‖ 23 δὴ Heiberg : δὲ BCDEGH ‖ 26 τὰς BG : τῆς CDEH ‖ ΘΗ, ΔΖ ms. B : ΘΖ, ΚΙ mss. CDEGH.

hauteur égale à la perpendiculaire abaissée du point E sur HB[1], et la figure de reste, limitée par la surface comprise entre les plans parallèles passant par HΘ et ZΔ et par les surfaces coniques ZEΔ et HEΘ, est équivalente au cône, dont la base est équivalente à la surface comprise entre les plans parallèles passant par HΘ et ZΔ et la hauteur égale à la perpendiculaire abaissée du point E sur ZH[2]. Mais à son tour la figure de reste limitée par la surface comprise entre les plans parallèles passant par ZΔ et AΓ et par les surfaces coniques AEΓ et ZEΔ est équivalente au cône dont la base est équivalente à la surface comprise entre les plans parallèles passant par ZΔ et AΓ et la hauteur égale à la perpendiculaire abaissée du point E sur ZA[2] ; la somme des cônes indiqués sera donc équivalente à la somme de la figure et du cône AEΓ. Leur hauteur est égale à la perpendiculaire abaissée du point E sur un des côtés du polygone, et leurs bases sont équivalentes à la surface de la figure AZHBΘΔΓ ; mais le cône K a la même hauteur et une base équivalente, elle aussi, à la surface de la figure ; le cône K est donc équivalent à la somme des cônes indiqués. Or on a démontré que la somme des cônes indiqués est équivalente à la somme de la figure et du cône AEΓ ; il s'ensuit que le cône K est équivalent à la somme de la figure et du cône AEΓ.

Corollaire.

D'après cela il est évident que le cône ayant pour base le cercle, dont le rayon est égal au segment de droite joignant le sommet du segment de sphère à un point de la périphérie du cercle de base du segment, et dont la

1. Cf. prop. 18.
2. Cf. prop. 20

ΗΒΘ κώνου, τὸ ὕψος δὲ τῇ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὴν ΗΒ ἀγομένῃ καθέτῳ, τὸ δὲ περίλειμμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ΗΘ, ΖΔ καὶ τῶν κωνικῶν τῶν ΖΕΔ, ΗΕΘ ἴσον ἐστὶ κώνῳ, οὗ ἡ βάσις μέν ἐστιν ἴση τῇ ἐπιφανείᾳ τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ΗΘ, ΖΔ, ὕψος δὲ τῇ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὴν ΖΗ καθέτῳ ἠγμένῃ. Πάλιν τὸ περίλειμμα τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ΖΔ, ΑΓ καὶ τῶν κωνικῶν τῶν ΑΕΓ, ΖΕΔ ἴσον ἐστὶ κώνῳ, οὗ ἡ μὲν βάσις ἴση ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ΖΔ, ΑΓ, ὕψος δὲ τῇ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὴν ΖΑ καθέτῳ ἠγμένῃ· οἱ οὖν εἰρημένοι κῶνοι ἴσοι ἔσονται τῷ σχήματι μετὰ τοῦ ΑΕΓ κώνου. Καὶ ὕψος μὲν ἴσον ἔχουσιν τῇ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καθέτῳ ἠγμένῃ, τὰς δὲ βάσεις ἴσας τῇ ἐπιφανείᾳ του ΑΖΗΒΘΔΓ σχήματος· ἔχει δὲ καὶ ὁ Κ κῶνος τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ βάσιν ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ κῶνος τοῖς εἰρημένοις κώνοις. Οἱ δὲ εἰρημένοι κῶνοι ἐδείχθησαν ἴσοι τῷ σχήματι καὶ τῷ ΑΕΓ κώνῳ· καὶ ὁ Κ ἄρα κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ τε σχήματι καὶ τῷ ΑΕΓ κώνῳ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν ὅτι ὁ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἠγμένῃ τοῦ κύκλου, ὅς

2 περίλειμμα Heiberg : περίλειμα C περίλημμα BDEH περίλιμμα G || 4 ΖΔ ms. B : ΖΛ mss. CDEGH || ἴσον B : ἴση CDEGH || 6 ΖΔ ms. B : ΖΛ mss. CDEGH || τῇ B : τὴν CDEGH || 7 περίλειμμα C : περίλημμα BDEH περίλιμμα G || 9 ΖΔ ms. B : ΖΛ mss. CDEGH || 12 ΖΔ ms. B : ΖΛ mss. CDEGH || 14 μετὰ Heiberg : καὶ μετὰ CDEGH || 17 ΑΖΗΒΘΔΓ ms. B : ΑΖΗΒΛΓ mss. CDEGH.

hauteur est égale au rayon de la sphère, est supérieur à la figure inscrite augmentée du cône ; car ce cône est supérieur au cône équivalent à la somme de la figure et du cône ayant pour base la base du segment et son sommet au centre, c'est-à-dire au cône ayant sa base équivalente à la surface de la figure et sa hauteur égale à la perpendiculaire abaissée du centre sur un des côtés du polygone[1], du moment que la base de l'un est supérieure à la base de l'autre, comme on l'a montré, et que la hauteur de l'un est supérieure à la hauteur de l'autre.

39.

Soit une sphère, et dans cette sphère le grand cercle ΑΒΓ ; découpons par AB un segment inférieur au demi-cercle ; soit Δ le centre ; joignons le centre Δ aux points A et B par les droites AΔ et BΔ et autour du secteur engendré circonscrivons un polygone et autour du polygone un cercle, qui aura ainsi le même centre que le cercle ΑΒΓ. Dès lors, si, EK restant en place, le polygone tourne et revient à sa place initiale, le cercle circonscrit décrira une surface sphérique, et les sommets du polygone décriront des cercles, dont les diamètres, parallèles à AB, joignent les sommets du polygone ; quant aux points où les côtés du polygone sont tangents au cercle plus petit, ils décrivent dans la sphère plus petite des cercles dont les cordes joignant les points de contact, parallèles à AB, seront des diamètres, et les côtés se déplaceront sur des surfaces coniques, la figure circonscrite étant ainsi limitée par des surfaces coniques et ayant pour base le cercle

1. Cf. prop. 38.

ἐστι βάσις τοῦ τμήματος, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, μείζων ἐστὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος σὺν τῷ κώνῳ· ὁ γὰρ προειρημένος κῶνος μείζων ἐστὶ τοῦ κώνου τοῦ ἴσου τῷ σχήματι σὺν τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν βάσιν τοῦ τμήματος, τὴν δὲ κορυφὴν πρὸς τῷ κέντρῳ, τουτέστι τοῦ τὴν βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ὕψος δὲ τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καθέτῳ ἠγμένῃ· ἥ τε γὰρ βάσις τῆς βάσεως μείζων ἐστὶ [δέδεικται γὰρ τοῦτο] καὶ τὸ ὕψος τοῦ ὕψους.

λθ′.

Ἔστω σφαῖρα καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ τετμήσθω ἔλασσον ἡμικυκλίου, ὃ ἀποτέμνει ἡ ΑΒ, καὶ κέντρον τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ Δ ἐπὶ τὰ Α, Β ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΔΒ, καὶ περὶ τὸν γεννηθέντα τομέα περιγεγράφθω πολύγωνον καὶ περὶ αὐτὸ κύκλος· ἕξει δὴ τὸ αὐτὸ κέντρον τῷ ΑΒΓ κύκλῳ. Ἐὰν δὴ μενούσης τῆς ΕΚ περιενεχθὲν τὸ πολύγωνον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὁ περιγεγραμμένος κύκλος κατὰ ἐπιφανείας οἰσθήσεται σφαίρας, καὶ αἱ γωνίαι τοῦ πολυγώνου κύκλους γράψουσιν, ὧν αἱ διάμετροι ἐπιζευγνύουσιν τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου οὖσαι παράλληλοι τῇ ΑΒ, τὰ δὲ σημεῖα, καθ' ἃ ἅπτονται τοῦ ἐλάσσονος κύκλου αἱ τοῦ πολυγώνου πλευραί, κύκλους γράφουσιν ἐν τῇ ἐλάσσονι σφαίρᾳ, ὧν διάμετροι ἔσονται αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς ἁφὰς παράλληλοι οὖσαι τῇ ΑΒ, αἱ δὲ πλευραὶ κατὰ κωνικῶν ἐπιφανειῶν οἰσθήσονται, καὶ ἔσται τὸ περιγραφὲν σχῆμα ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενον, οὗ βάσις ὁ περὶ τὴν ΖΗ κύκλος·

4-5 τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι BG : τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος CDEH || 6 τοῦ add. Heiberg || 11 post λθ′ Stamatis restituit enuntiationem theorematis XXXIX ; u. Appendicem.

de diamètre ZH ; la surface de la figure indiquée est donc supérieure à celle du segment plus petit dont la base est le cercle de diamètre AB.

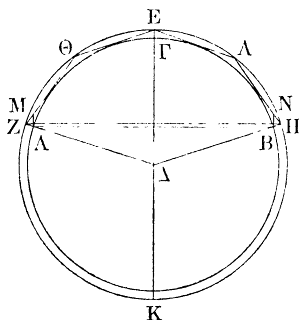


Fig. 40.

Menons en effet les tangentes AM et BN ; elles se déplaceront ainsi sur une surface conique, et la figure engendrée par le polygone AMΘEΛNB aura une surface supérieure à celle du segment de la sphère dont la base est le cercle de diamètre AB ; car les deux surfaces ont pour limite dans le même plan le cercle de diamètre AB, et le segment est compris dans la figure[1]. Mais la surface conique engendrée par ZM et HN est supérieure à celle qui est engendrée par MA, NB, du moment que ZM est supérieur à MA, comme sous-tendant un angle droit, et que NH est supérieur à NB[2] ; dans ces conditions, la première surface est supérieure à la seconde, comme on l'a démontré dans les lemmes. Il est donc évident que la surface de la figure circonscrite est elle aussi supérieure à la surface du segment de la sphère plus petite.

1. Cf. postulat 4.
2. Cf. Eucl. III, 18 et I, 19.

ἡ δὴ τοῦ εἰρημένου σχήματος ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ τῆς τοῦ ἐλάσσονος τμήματος ἐπιφανείας, οὗ βάσις ὁ περὶ τὴν ΑΒ κύκλος.

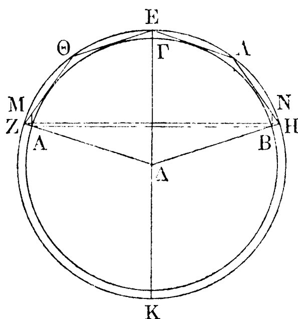


Fig. 40.

Ἤχθωσαν γὰρ ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΜ, ΒΝ· κατὰ κωνικῆς ἄρα ἐπιφανείας οἰσθήσονται, καὶ τὸ σχῆμα τὸ γενηθὲν ὑπὸ τοῦ πολυγώνου τοῦ ΑΜΘΕΛΝΒ μείζονα ἕξει τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας, οὗ βασις ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΑΒ κύκλος [πέρας γὰρ ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ τὸ αὐτὸ ἔχουσιν τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΑΒ κύκλον, καὶ περιλαμβάνεται τὸ τμῆμα ὑπὸ τοῦ σχήματος]. Ἀλλ' ἡ γεγενημένη ὑπὸ τῶν ΖΜ, ΗΝ ἐπιφάνεια κώνου μείζων ἐστὶ τῆς γεγενημένης ὑπὸ τῶν ΜΑ, ΝΒ· ἡ μὲν γὰρ ΖΜ τῆς ΜΑ μείζων ἐστὶ [ὑπὸ γὰρ ὀρθὴν ὑποτείνει], ἡ δὲ ΝΗ τῆς ΝΒ, ὅταν δὲ τοῦτο ᾖ, μείζων γίνεται ἡ ἐπιφάνεια τῆς ἐπιφανείας [ταῦτα γὰρ δέδεικται ἐν τοῖς λήμμασιν]. Δῆλον οὖν ὅτι καὶ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος ἡ ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ τῆς τοῦ τμήματος ἐπιφανείας τῆς ἐλάσσονος σφαίρας.

1 δὴ Heiberg : δὲ BCDEGH ‖ 6 ΑΜΘΕΛΝΒ ms. B : ΑΜΘΕΝΒ mss. CDEGH ‖ 8 τὸ αὐτὸ C : τῷ αὐτῷ BDEGH ‖ 14 γίνεται BCG : γάρ ἐστι DEH ‖ ἡ G : om. CDEH.

Corollaire.

Il devient ainsi clair que la surface circonscrite au secteur est équivalente au cercle dont le carré du rayon est équivalent au rectangle ayant pour côtés un des côtés du polygone et la somme des cordes joignant les sommets du polygone, augmentée de la moitié de la base du polygone indiqué[1], du moment que la figure décrite par le polygone est inscrite dans le segment de la sphère plus grande. Cette proposition est évidente d'après ce qui a été écrit plus haut.

40.

La surface d'une figure circonscrite à un secteur est supérieure au cercle, dont le rayon est égal au segment de droite menée du sommet du segment sphérique à un point de la périphérie du cercle de base du segment.

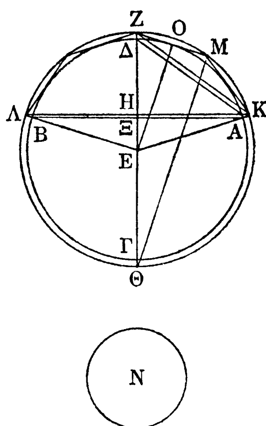


Fig. 41.

1. Cf. prop. 35.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Καὶ φανερὸν ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος τοῦ περὶ τὸν τομέα ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ πολυγώνου καὶ τῶν ἐπιζευγνυουσῶν πασῶν τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου καὶ ἔτι τῆς ἡμισείας τῆς βάσεως τοῦ εἰρημένου πολυγώνου [τὸ γὰρ ὑπὸ τοῦ πολυγώνου γεγραμμένον σχῆμα ἐγγεγραμμένον ἐστὶν εἰς τὸ τμῆμα τῆς μείζονος σφαίρας, τοῦτο δὲ δῆλον διὰ τὸ προγεγραμμένον].

μ′.

Τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος τῷ τομεῖ ἡ ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ κύκλου, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἠγμένῃ ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος.

Fig. 41.

2 περιγεγραμμένου BDEGH : ἐγγεγραμμένου C ‖ 6 ἔτι B : ἐπὶ CDEGH ‖ 7 τὸ γὰρ ὑπὸ τοῦ πολυγώνου add. Heiberg ‖ γεγραμμένον Heiberg : ἐγγεγραμμένον BCDEGH.

Soit en effet une sphère et sur cette sphère le grand cercle ΑΒΓΔ ; soit Ε le centre ; circonscrivons au secteur le polygone ΛΚΖ et circonscrivons au polygone un cercle ; qu'une figure soit engendrée, comme antérieurement ; soit un cercle Ν tel que le carré sur son rayon soit équivalent au rectangle ayant pour côtés un des côtés du polygone et la somme des cordes joignant (sc. les sommets du polygone), augmentée de la moitié de ΚΛ. Mais l'aire indiquée est équivalente au rectangle ayant pour côtés les segments ΜΘ et ΖΗ, hauteur de la sphère plus grande ; ceci a en effet été démontré plus haut[1] ; le carré sur le rayon du cercle Ν est donc équivalent au rectangle de côtés ΜΘ et ΗΖ. Or ΗΖ est supérieur à ΔΞ, hauteur (sc. du segment) de la sphère plus petite ; car si nous joignons Κ à Ζ, ΚΖ sera parallèle à ΔΑ ; mais ΑΒ et ΚΛ sont aussi parallèles, et le segment ΖΕ est en commun, ce qui fait que le triangle ΖΚΗ est semblable au triangle ΔΑΞ[2] ; de plus, ΖΚ est supérieur à ΑΔ ; ΖΗ est par conséquent supérieur à ΔΞ ; en outre ΜΘ est égal au diamètre ΓΔ ; car si on mène ΕΟ, du moment que ΜΟ est égal à ΟΖ[3] et ΘΕ égal à ΕΖ, ΕΟ est parallèle à ΜΘ[4] ; ΜΘ est donc le double de ΕΟ ; mais ΓΔ est à son tour double de ΕΟ, ce qui fait que ΜΘ est égal à ΓΔ ; d'autre part, le rectangle de côtés ΓΔ et ΔΞ est équivalent au carré sur ΑΔ[5] ; il s'ensuit que la surface de la figure ΚΖΛ est supérieure au cercle dont le rayon est égal au segment de droite mené du sommet du segment sphérique à un point de la périphérie du cercle de diamètre ΑΒ, base de ce segment ; car le cercle Ν est équivalent à la surface de la figure circonscrite au secteur[6].

1. Cf. prop. 22 et Eucl. VI, 16.
2. Cf. Eucl. I, 29 ; VI, 4 ; V, 16 ; V, 14.
3. Cf. Eucl. III, 3.
4. Cf Eucl. VI, 2.
5. Cf. Eucl. III, 31 et VI, 8, coroll.
6. Cf. prop. 39, coroll., et Eucl. XII, 2.

Ἔστω γὰρ σφαῖρα καὶ μέγιστος κύκλος ἐπ᾽ αὐτῆς ὁ ΑΒΓΔ καὶ κέντρον τὸ Ε, καὶ περὶ τὸν τομέα περιγεγράφθω τὸ ΛΚΖ πολύγωνον, καὶ περὶ αὐτὸ κύκλος περιγεγράφθω, καὶ γεγενήσθω σχῆμα, καθάπερ πρότερον, καὶ ἔστω κύκλος ὁ Ν, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ πολυγώνου καὶ πασῶν τῶν ἐπιζευγνυουσῶν σὺν τῇ ἡμισείᾳ τῆς ΚΛ. Ἀλλὰ τὸ εἰρημένον χωρίον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς ΜΘ καὶ ΖΗ [ὅ δή ἐστιν ὕψος τοῦ τμήματος τῆς μείζονος σφαίρας · τοῦτο γὰρ προδέδεικται]. Τοῦ ἄρα Ν κύκλου ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ ὑπὸ ΜΘ, ΗΖ περιεχομένῳ. Ἀλλ᾽ ἡ μὲν ΗΖ μείζων ἐστὶ τῆς ΔΞ [ὅ ἐστιν ὕψος τοῦ ἐλάσσονος τμήματος · ἐὰν γὰρ ἐπιζεύξωμεν τὴν ΚΖ, ἔσται παράλληλος τῇ ΔΑ. Ἔστιν δὲ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΚΛ παράλληλος, καὶ κοινὴ ἡ ΖΕ · ὅμοιον ἄρα τὸ ΖΚΗ τρίγωνον τῷ ΔΑΞ τριγώνῳ. Καί ἐστιν μείζων ἡ ΖΚ τῆς ΑΔ · μείζων ἄρα καὶ ἡ ΖΗ τῆς ΔΞ], ἴση δὲ ἡ ΜΘ τῇ διαμέτρῳ τῇ ΓΔ [ἐὰν γὰρ ἐπιζευχθῇ ἡ ΕΟ, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΜΟ τῇ ΟΖ, ἡ δ ΘΕ τῇ ΕΖ, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΟ τῇ ΜΘ · διπλασία ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΘ τῇ ΕΟ. Ἀλλὰ καὶ ἡ ΓΔ διπλασία ἐστὶν τῆς ΕΟ · ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΘ τῇ ΓΔ], τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΔΞ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ · ἡ ἄρα τοῦ σχήματος τοῦ ΚΖΛ ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ τοῦ κύκλου, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἠγμένῃ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος, τοῦ περὶ διάμετρον τὴν ΑΒ · ὁ γὰρ Ν κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸν τομέα σχήματος.

3 ΛΚΖ mss. BDEGH : ΑΚΖ ms. C ∥ 17 ΕΟ mss. BCH : ΕΗ mss. DEG.

Corollaire 1.

Il s'ensuit aussi que la somme de la figure circonscrite au secteur et du cône, dont la base est le cercle de diamètre ΚΛ et le sommet le centre de la sphère, est équivalente au cône, dont la base est équivalente à la surface de la figure, et la hauteur égale à la perpendiculaire abaissée du centre sur le côté[1], laquelle est égale au rayon de la sphère ; car la figure circonscrite au secteur est inscrite dans le segment de la sphère plus grande ayant même centre ; la proposition est donc évidente d'après ce qui a été écrit plus haut.

Corollaire 2.

Il est évident d'après ce qui précède que la somme de la figure circonscrite et du cône est supérieure au cône ayant pour base le cercle, dont le rayon est égal à la droite menée du sommet du segment de la sphère plus petite à un point de la périphérie du cercle de base du segment, et la hauteur égale au rayon (sc. de la sphère plus petite) ; car le cône équivalent à la somme de la figure et du cône aura sa base plus grande que le cercle indiqué[2], et sa hauteur égale au rayon de la sphère plus petite[3].

41.

Soit encore une sphère, dans cette sphère un grand cercle et un segment inférieur à un demi-cercle, soit ΑΒΓ ; soit Δ le centre ; inscrivons dans le secteur ΑΒΓ un polygone d'un nombre pair de côtés, et circonscrivons-lui un polygone semblable ; que les côtés de ces polygones soient deux à deux parallèles ;

1. Cf. prop. 38.
2. Cf. prop. 40.
3. Cf. prop. 40, coroll. 1.

ΠΟΡΙΣΜΑ α′.

Γίνεται δὴ καὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα περὶ τὸν τομέα σὺν τῷ κώνῳ, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΚΛ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ κέντρον, ἴσον κώνῳ, οὗ ἡ μὲν βάσις ἴση ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ὕψος δὲ τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν πλευρὰν καθέτῳ ἠγμένῃ [ἣ δὴ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας· τὸ γὰρ περιγεγραμμένον σχῆμα τῷ τομεῖ ἐγγεγραμμένον ἐστὶν εἰς τὸ τμῆμα τῆς μείζονος σφαίρας, ἧς κέντρον ἐστὶ τὸ αὐτό· δῆλον οὖν τὸ λεγόμενόν ἐστιν ἐκ τοῦ προγεγραμμένου].

ΠΟΡΙΣΜΑ β′.

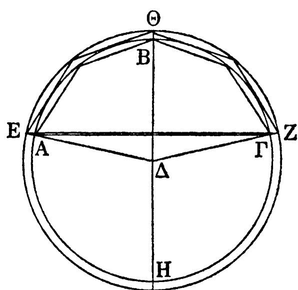
Ἐκ τούτου δὲ φανερὸν ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα σὺν τῷ κώνῳ μεῖζόν ἐστι κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος τῆς ἐλάσσονος σφαίρας ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἠγμένῃ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος, ὕψος δὲ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου· ὁ γὰρ ἴσος κῶνος τῷ σχήματι σὺν τῷ κώνῳ τὴν μὲν βάσιν μείζονα ἕξει τοῦ εἰρημένου κύκλου, τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας.

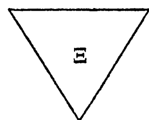
μα′.

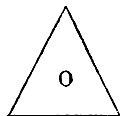
Ἔστω πάλιν σφαῖρα καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος καὶ τμῆμα ἔλασσον ἡμικυκλίου τὸ ΑΒΓ καὶ κέντρον τὸ Δ, καὶ εἰς τὸν ΑΒΓ τομέα ἐγγεγράφθω πολύγωνον ἀρτιόγωνον, καὶ τούτῳ ὅμοιον περιγεγράφθω, καὶ παράλληλοι ἔστωσαν αἱ πλευραὶ ταῖς πλευραῖς, καὶ κύκλος περιγεγράφθω περὶ

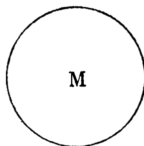
4 ἴσον E : ἴσος CDGH ‖ 20 post μα′ Stamatis restituit enuntiationem theorematis XLI ; u. Appendicem ‖ 24 τούτῳ B : τούτου CDEGH.

circonscrivons un cercle au polygone circonscrit ; que, comme dans les propositions qui précèdent, HB restant en place, les cercles tournent et engendrent ainsi des figures limitées par des surfaces coniques ; il faut démontrer que le rapport de la surface de la figure circonscrite à la surface de la figure inscrite est égal au carré du rapport entre le côté du polygone circonscrit et le côté du polygone inscrit, et que le rapport entre la somme de la figure (sc. circonscrite) et du cône, d'une part (sc. et la somme de la figure inscrite et du cône, d'autre part), est égal au cube du même rapport (sc. entre les côtés des deux polygones)[1].









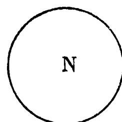
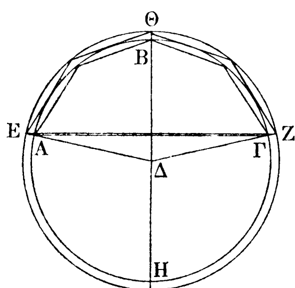


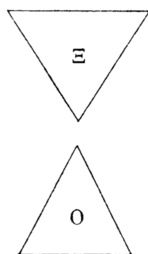
Fig. 42.

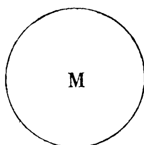
Soit en effet le cercle M tel que le carré sur son rayon est équivalent au rectangle ayant pour côtés un des côtés du polygone circonscrit et la somme des cordes joignant les sommets augmentée de la moitié de EZ ; le cercle M sera dès lors équivalent à la surface

1. Le texte accuse ici des lacunes.

τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον, καὶ ὁμοίως τοῖς πρότερον μενούσης τῆς ΗΒ περιενεχθέντες οἱ κύκλοι ποιείτωσαν σχήματα ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενα· δεικτέον ὅτι ἡ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐπιφάνειαν διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ ἡ πλευρὰ ἡ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, τὸ δὲ σχῆμα σὺν τῷ κώνῳ τριπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ αὐτοῦ.







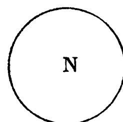


Fig. 42.

Ἔστω γὰρ ὁ Μ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου καὶ πασῶν τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰς γωνίας καὶ ἔτι τῆς ἡμισείας τῆς ΕΖ· ἔσται δὴ ὁ Μ κύκλος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ

6 ἢ pr. add. Heiberg.

de la figure circonscrite[1]. Prenons, de plus, le cercle N tel que le carré sur son rayon soit équivalent au rectangle ayant pour côtés un des côtés du polygone inscrit et la somme des cordes joignant les sommets augmentée de la moitié de ΑΓ ; à son tour donc ce cercle sera équivalent à la surface de la figure inscrite[2]. Mais les aires indiquées sont entre elles comme le carré sur le côté EK est au carré sur le côté ΑΛ, et par conséquent le polygone est au polygone comme le cercle M est au cercle N ; il est donc évident que le rapport entre la surface de la figure circonscrite et la surface de la figure inscrite est aussi égal au carré du rapport entre EK et ΑΛ, et le carré de ce rapport exprime aussi le rapport entre les deux polygones.

Soit de nouveau un cône Ξ ayant pour base un cercle égal au cercle M et pour hauteur le rayon de la sphère plus petite ; ce cône est donc équivalent à la somme de la figure circonscrite et du cône ayant pour base le cercle de diamètre EZ et pour sommet le point Δ[3]. Soit un autre cône O ayant pour base un cercle égal au cercle N et pour hauteur la perpendiculaire abaissée du point Δ sur ΑΛ ; à son tour ce cône sera équivalent à la somme de la figure inscrite et du cône ayant pour base le cercle de diamètre ΑΓ et pour sommet le centre Δ, propriétés qui ont toutes été notées antérieurement[4]. Et puisque EK est au rayon de la sphère plus petite comme ΑΛ est à la perpendiculaire abaissée du centre Δ sur ΑΛ, et qu'on a montré que EK est à ΑΛ comme le rayon du cercle M est au rayon du cercle N, rapport égal au rapport des diamètres, le diamètre du cercle de base du cône Ξ sera au diamètre du cercle de base du cône O comme la hauteur du cône Ξ est à la hauteur du cône O, de façon que ces

1. Cf. prop. 39, coroll.
2. Cf. prop. 35.
3. Cf. prop. 40, coroll. 1.
4. Cf. prop. 38.

τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος. Εἰλήφθω δὴ καὶ ὁ Ν κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου καὶ πασῶν τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰς γωνίας σὺν τῇ ἡμισείᾳ τῆς ΑΓ· ἔσται δὴ καὶ οὗτος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος. Ἀλλὰ τὰ εἰρημένα χωρία ἐστὶ πρὸς ἄλληλα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΚ πλευρᾶς πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΛ πλευρᾶς [καὶ ὡς ἄρα τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον, ὁ Μ κύκλος πρὸς τὸν Ν κύκλον]· φανερὸν οὖν ὅτι καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΚ πρὸς ΑΛ [τὸν δὲ αὐτόν, ὃν καὶ τὸ πολύγωνον].

Ἔστω πάλιν κῶνος ὁ Ξ βάσιν μὲν ἔχων τῷ Μ ἴσην, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας· ἴσος δὴ οὗτός ἐστιν ὁ κῶνος τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι σὺν τῷ κώνῳ, οὗ βάσις ὁ περὶ τὴν ΕΖ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Δ. Καὶ ἔστω ἄλλος κῶνος ὁ Ο βάσιν μὲν ἴσην ἔχων τῷ Ν, ὕψος δὲ τὴν ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὴν ΑΛ κάθετον ἠγμένην· ἔσται δὴ καὶ οὗτος ἴσος τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι σὺν τῷ κώνῳ, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΑΓ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Δ κέντρον· ταῦτα γὰρ πάντα προγέγραπται. Καὶ [ἐπεί] ἐστιν ὡς ἡ ΕΚ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας οὕτως ἡ ΑΛ πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου [τοῦ Δ] ἐπὶ τὴν ΑΛ κάθετον ἠγμένην, ἐδείχθη δε ὡς ἡ ΕΚ πρὸς τὴν ΑΛ οὕτως ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Μ κύκλου πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Ν κύκλου [καὶ ἡ διάμετρος πρὸς τὴν διάμετρον]· ἔσται ἄρα ὡς ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ Ξ, πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ Ο, οὕτως τὸ ὕψος τοῦ Ξ κώνου πρὸς τὸ ὕψος τοῦ

1 Ν ms. B : Μ mss. CDEGH ‖ 10-11 πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος om. C ‖ 16 κύκλος BCEG : κύκλον DH ‖ 17 τῷ BCG : τὸ DEH ‖ 25-26 πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Ν κύκλου om. C.

cônes sont semblables. Le rapport du cône Ξ au cône O est donc égal au cube du rapport des diamètres[1]. Il est donc évident que le rapport de la somme de la figure circonscrite et du cône à la somme de la figure inscrite et du cône est égal au cube du rapport de EK à ΑΛ.

42.

De tout segment de sphère inférieur à l'hémisphère la surface est équivalente au cercle dont le rayon est égal à la droite menée du sommet du segment à un point de la périphérie du cercle de base du segment de la sphère[2].

Soit une sphère et dans cette sphère un grand cercle ΑΒΓ et un segment, inférieur à l'hémisphère et admettant comme base le cercle, de diamètre ΑΓ, perpendiculaire au cercle ΑΒΓ ; prenons un cercle Z, d'un rayon égal à AB ; il faut démontrer que la surface du segment ΑΒΓ est équivalente au cercle Z.

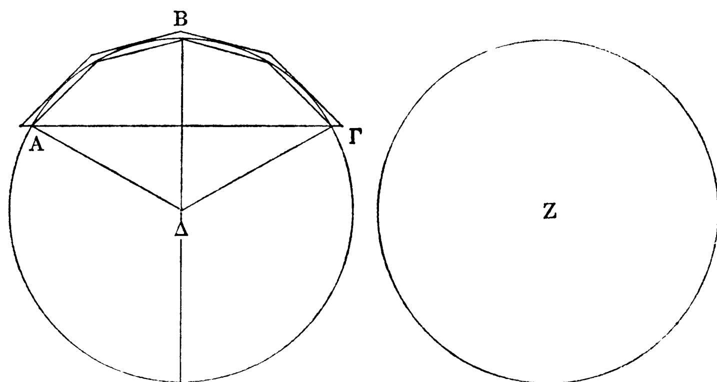


Fig. 43.

1. Cf. Eucl. XII, 12.
2. Les propositions 42 et 43 sont citées par Héron, *Metr.*, p. 88.

Ο κώνου [ὅμοιοι ἄρα εἰσὶν οἱ κῶνοι]. Ὁ Ξ ἄρα κῶνος πρὸς τὸν Ο κῶνον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ διάμετρος πρὸς τὴν διάμετρον· φανερὸν οὖν ὅτι καὶ τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον σὺν τῷ κώνῳ πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον σὺν τῷ κώνῳ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΚ πρὸς ΑΛ.

μβ'.

Παντὸς τμήματος σφαίρας ἐλάσσονος ἡμισφαιρίου ἡ ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἠγμένῃ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας.

Ἔστω σφαῖρα καὶ μέγιστος ἐν αὐτῇ κύκλος ὁ ΑΒΓ καὶ τμῆμα ἐν αὐτῇ ἔλασσον ἡμισφαιρίου, οὗ βάσις ὁ περὶ τὴν ΑΓ κύκλος πρὸς ὀρθὰς ὢν τῷ ΑΒΓ κύκλῳ, καὶ εἰλήφθω κύκλος ὁ Ζ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ΑΒ· δεῖ δὴ δεῖξαι ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ΑΒΓ τμήματος ἴση ἐστὶ τῷ Ζ κύκλῳ.

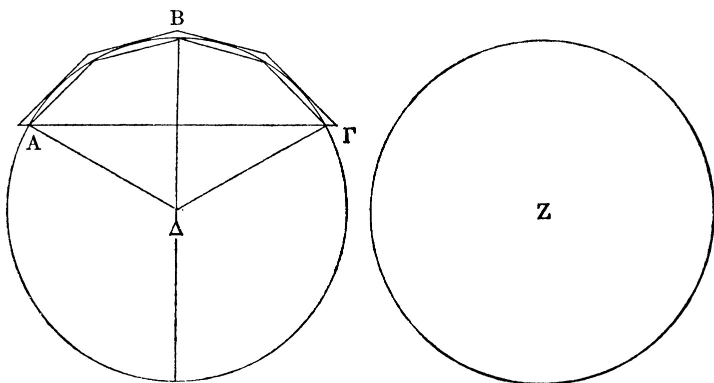


Fig. 43.

14 τῷ CG : τὸ DEH.

S'il n'en était pas ainsi, que cette surface soit supérieure au cercle Z ; prenons le centre Δ et joignons Δ à A et Γ par des droites ; comme on a deux grandeurs inégales, la surface du segment et le cercle Z, inscrivons dans le secteur ABΓ un polygone régulier d'un nombre pair de côtés, et circonscrivons un autre polygone, semblable au polygone inscrit, de telle manière que le rapport du polygone circonscrit au polygone inscrit soit inférieur au rapport entre la surface du segment sphérique et le cercle Z[1] ; si le cercle tourne, comme dans les propositions antérieures, il se produira deux figures limitées par des surfaces coniques, l'une circonscrite, l'autre inscrite, et la surface de la figure circonscrite sera à la surface de la figure inscrite comme le polygone circonscrit est au polygone inscrit ; car chacun de ces rapports est égal au carré du rapport entre le côté du polygone circonscrit et le côté du polygone inscrit. Mais le rapport du polygone circonscrit au polygone inscrit est inférieur au rapport de la surface du segment indiqué au cercle Z, et, d'autre part, la surface de la figure circonscrite est supérieure à la surface du segment[2] ; il s'ensuit que la surface de la figure inscrite est, elle aussi, supérieure au cercle Z, ce qui est impossible, du moment qu'on a démontré que la surface indiquée de la figure est inférieure à un cercle de cette grandeur[3].

Que ce soit donc le cercle qui soit plus grand que la surface ; circonscrivons et inscrivons des polygones semblables ; que le rapport du polygone circonscrit au polygone inscrit soit inférieur au rapport entre le cercle et la surface du segment[4]. La surface n'est donc[5] pas supérieure[6] au cercle Z. Or on a montré qu'elle n'est pas, non plus, inférieure[6] ; elle est donc égale.

1. Cf. prop. 6.
2. Cf. prop. 39.
3. Cf. prop. 37.
4. Cf. prop. 6.
5. Cf. les notes complémentaires.
6. La logique exige l'échange de ces deux termes.

Εἰ γὰρ μή, ἔστω μείζων ἡ ἐπιφάνεια τοῦ Ζ κύκλου, καὶ εἰλήφθω τὸ Δ κέντρον, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὰ Α, Γ ἐπιζευχθεῖσαι ἐκβεβλήσθωσαν· καὶ δύο μεγεθῶν ἀνίσων ὄντων, τῆς τε ἐπιφανείας τοῦ τμήματος καὶ τοῦ Ζ κύκλου, ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΑΒΓ τομέα πολύγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἀρτιογώνιον, καὶ ἄλλο τούτῳ ὅμοιον περιγεγράφθω, ὥστε τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας πρὸς τὸν Ζ κύκλον, περιενεχθέντος δὲ τοῦ κύκλου, ὡς καὶ πρότερον, ἔσται δύο σχήματα ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενα, ὧν τὸ μὲν περιγεγραμμένον, τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον, καὶ ἡ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου ἔσται ὡς τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον· ἑκάτερος γὰρ τῶν λόγων διπλάσιός ἐστι τοῦ ὃν ἔχει ἡ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου πλευράν. Ἀλλὰ τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ τοῦ εἰρημένου τμήματος ἐπιφάνεια πρὸς τὸν Ζ κύκλον, μείζων δέ ἐστιν ἡ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος ἐπιφάνεια τῆς ἐπιφανείας τοῦ τμήματος· καὶ ἡ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐπιφάνεια ἄρα μείζων ἐστὶ τοῦ Ζ κύκλου· ὅπερ ἀδύνατον· δέδεικται γὰρ ἡ εἰρημένη τοῦ σχήματος ἐπιφάνεια ἐλάσσων οὖσα τοῦ τηλικούτου κύκλου.

Ἔστω πάλιν ὁ κύκλος μείζων τῆς ἐπιφανείας, καὶ περιγεγράφθω καὶ ἐγγεγράφθω ὅμοια πολύγωνα, καὶ τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω τοῦ ὃν ἔχει ὁ κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τμήματος. Οὐκ ἄρα μείζων ἡ ἐπιφάνεια τοῦ Ζ κύκλου. Ἐδείχθη δὲ ὡς οὐδὲ ἐλάσσων· ἴση ἄρα.

2 τὰ BC : τὸ DEGH ‖ 6 τούτῳ BCEGH : τοῦτο D ‖ 15 ἡ CG : om. DEH ‖ 29 τμήματος Nizzius : σχήματος BCDEGH.

43.

Même dans le cas où le segment est plus grand que l'hémisphère, sa surface n'en est pas moins équivalente au cercle, dont le rayon est égal à la droite menée du sommet à un point de la périphérie du cercle de base du segment.

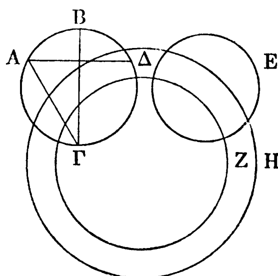


Fig. 44.

Soit en effet une sphère et dans cette sphère un grand cercle ; imaginons-la coupée par un plan perpendiculaire suivant ΑΔ ; soit ΑΒΔ le segment inférieur à l'hémisphère, et ΒΓ un diamètre perpendiculaire à ΑΔ ; joignons Β et Γ à Α par les droites ΒΑ et ΑΓ ; soit un cercle Ε, d'un rayon égal à ΑΒ, un cercle Ζ, d'un rayon égal à ΑΓ, et un cercle Η, d'un rayon égal à ΒΓ ; le cercle Η est donc équivalent à la somme des deux cercles Ε et Ζ[1]. Or le cercle Η est équivalent à la surface totale de la sphère[2], puisque chacune de ces deux aires est quadruple du cercle de diamètre ΒΓ, et le cercle Ε est équivalent à la surface du segment ΑΒΔ[3] ; ceci a en effet été démontré pour le cas d'un segment inférieur à l'hémisphère ; il s'ensuit que l'aire qui reste, le cercle Ζ, est équivalente à la surface du segment ΑΓΔ, qui est supérieur à l'hémisphère.

1. Cf. Eucl. III, 31 et I, 47.
2. Cf. prop. 33.
3. Cf. prop. 42.

μγ′.

Καὶ ἐὰν μεῖζον ἡμισφαιρίου ᾖ τμῆμα, ὁμοίως αὐτοῦ ἡ ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἔσται τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἠγμένῃ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος.

Fig. 44.

Ἔστω γὰρ σφαῖρα καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος, καὶ νοείσθω τετμημένη ἐπιπέδῳ ὀρθῷ τῷ κατὰ τὴν ΑΔ, καὶ τὸ ΑΒΔ ἔλασσον ἔστω ἡμισφαιρίου, καὶ διάμετρος ἡ ΒΓ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΔ, καὶ ἀπὸ τῶν Β, Γ ἐπὶ τὸ Α ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΑ, ΑΓ, καὶ ἔστω ὁ μὲν Ε κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ΑΒ, ὁ δὲ Ζ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ΑΓ, ὁ δὲ Η κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ΒΓ · καὶ ὁ Η ἄρα κύκλος ἴσος ἐστὶ τοῖς δυσὶ κύκλοις τοῖς Ε, Ζ. Ὁ δὲ Η κύκλος ἴσος ἐστὶν ὅλῃ τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας [ἐπειδήπερ ἑκατέρα τετραπλασία ἐστὶ τοῦ περὶ διάμετρον τὴν ΒΓ κύκλου], ὁ δὲ Ε κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΑΒΔ τμήματος [δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐπὶ τοῦ ἐλάσσονος ἡμισφαιρίου] · λοιπὸς ἄρα ὁ Ζ κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ τοῦ ΑΓΔ τμήματος ἐπιφανείᾳ, ὅ δή ἐστι μεῖζον ἡμισφαιρίου.

12 ΒΓ mss. CG : AB mss. DEH ‖ 19 μεῖζον GH : μείζων DE.

44.

Tout secteur de sphère est équivalent à un cône ayant une base équivalente à la surface du segment sphérique compris dans le secteur et une hauteur égale au rayon de la sphère.

Soit une sphère, et dans cette sphère un grand cercle ΑΒΔ et le centre Γ ; soit aussi un cône ayant pour base le cercle équivalent à la surface limitée par la circonférence ΑΒΔ, et une hauteur égale à ΒΓ ; il faut démontrer que le secteur ΑΒΓΔ est équivalent au cône indiqué.

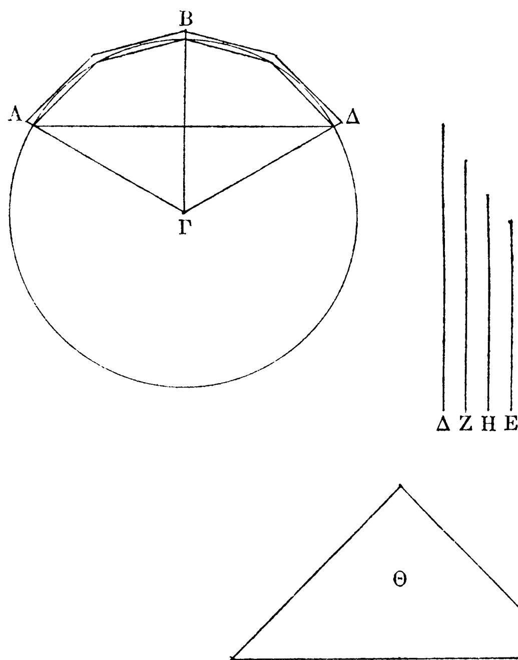
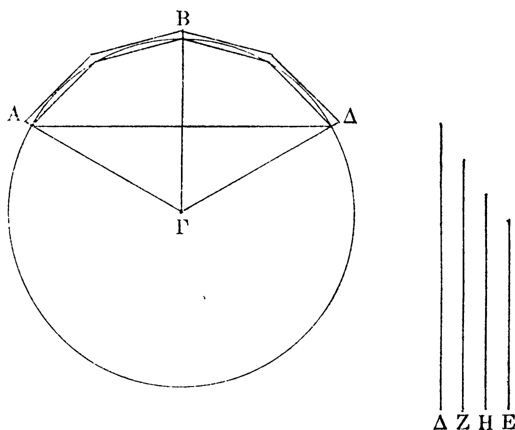


Fig. 45.

μδ'.

Παντὶ τομεῖ σφαίρας ἴσος ἐστὶ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας τοῦ κατὰ τὸν τομέα, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας.

Ἔστω σφαῖρα καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΔ καὶ κέντρον τὸ Γ καὶ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν ἴσον τῇ κατὰ τὴν ΑΒΔ περιφέρειαν ἐπιφανείᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ΒΓ· δεικτέον ὅτι ὁ τομεὺς ὁ ΑΒΓΔ ἴσος ἐστὶ τῷ εἰρημένῳ κώνῳ.



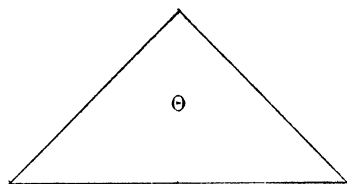


Fig. 45.

4 τῆς σφαίρας om. B.

S'il n'en était pas ainsi, que le secteur soit plus grand que le cône ; donnons-nous un cône, comme il a été indiqué, soit Θ ; dès lors, puisque nous avons deux grandeurs inégales, le secteur et le cône Θ, trouvons deux segments de droite Δ et E tels que Δ soit supérieur à E, et que le rapport de Δ à E soit inférieur au rapport entre le secteur et le cône[1] ; prenons deux autres segments de droite Z et H tels que l'excès de Δ sur Z soit égal à l'excès de Z sur H et de H sur E ; circonscrivons au secteur plan du cercle un polygone équilatéral d'un nombre pair de côtés, et inscrivons-y un polygone semblable, de manière que le rapport du côté du polygone circonscrit au côté du polygone inscrit soit inférieur au rapport de Δ à Z[2] ; que, comme antérieurement, la révolution du cercle engendre deux figures limitées par des surfaces coniques ; le rapport de la somme de la figure circonscrite et du cône de sommet Γ à la somme de la figure inscrite et du cône est ainsi égal au cube du rapport entre le côté du polygone circonscrit et le côté du polygone inscrit[3]. Mais le rapport du côté du polygone circonscrit (sc. au côté du polygone inscrit) est inférieur au rapport de Δ à Z ; il s'ensuit que le rapport de la figure solide indiquée (sc. circonscrite, augmentée du cône, à la figure inscrite, augmentée du cône) est inférieur au cube du rapport de Δ à Z. Mais le rapport de Δ à E est supérieur au cube du rapport de Δ à Z ; par conséquent, le rapport de la figure solide circonscrite au secteur à la figure inscrite est inférieur au rapport de Δ à E. Or le rapport de Δ à E est inférieur au rapport du secteur solide au cône Θ[4] ; il s'ensuit que le rapport du secteur solide au cône Θ est supérieur au rapport entre la figure circonscrite au secteur et la figure inscrite, et par permutation[5] ; mais la figure solide circonscrite est supérieure au secteur[6] ; la figure

1. Cf. prop. 2.
2. Cf. prop. 4.
3. Cf. prop. 41.
4. Par hypothèse.
5. Cf. Eucl. V, 16.
6. Par une erreur d'un copiste, le texte dit « au segment ».

Εἰ γὰρ μή, ἔστω μείζων ὁ τομεὺς τοῦ κώνου, καὶ κείσθω ὁ Θ κῶνος, οἷος εἴρηται · δύο δὴ μεγεθῶν ἀνίσων ὄντων, τοῦ τομέως καὶ τοῦ Θ κώνου, εὑρήσθωσαν δύο γραμμαὶ αἱ Δ, Ε, μείζων δὲ ἡ Δ τῆς Ε, καὶ ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω ἡ Δ πρὸς Ε ἤπερ ὁ τομεὺς πρὸς τὸν κῶνον, καὶ εἰλήφθωσαν δύο γραμμαὶ αἱ Ζ, Η, ὅπως τῷ ἴσῳ ὑπερέχῃ ἡ Δ τῆς Ζ καὶ ἡ Ζ τῆς Η καὶ ἡ Η τῆς Ε, καὶ περὶ τὸν ἐπίπεδον τομέα τοῦ κύκλου περιγεγράφθω πολύγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἀρτιογώνιον, καὶ τούτῳ ὅμοιον ἐγγεγράφθω, ὅπως ἡ τοῦ περιγεγραμμένου πλευρὰ ἐλάσσονα λόγον ἔχῃ πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου τοῦ ὃν ἔχει ἡ Δ πρὸς Ζ, καὶ ὁμοίως τοῖς πρότερον περιενεχθέντος τοῦ κύκλου γεγενήσθω δύο σχήματα ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενα · τὸ ἄρα περιγεγραμμένον σὺν τῷ κώνῳ τῷ κορυφὴν ἔχοντι τὸ Γ σημεῖον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον σὺν τῷ κώνῳ τριπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου. Ἀλλὰ ἡ τοῦ περιγεγραμμένου ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Δ πρὸς Ζ · ἐλάσσονα λόγον ἄρα ἕξει ἢ τριπλάσιον τὸ εἰρημένον στερεὸν σχῆμα τοῦ τῆς Δ πρὸς Ζ. Ἡ δὲ Δ πρὸς Ε μείζονα λόγον ἔχει ἢ τριπλάσιον τοῦ τῆς Δ πρὸς Ζ · τὸ ἄρα περιγεγραμμένον σχῆμα στερεὸν τῷ τομεῖ πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐλάσσονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει ἡ Δ πρὸς Ε. Ἡ δὲ Δ πρὸς Ε ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ὁ στερεὸς τομεὺς πρὸς τὸν Θ κῶνον · μείζονα ἄρα λόγον ἔχει ὁ στερεὸς τομεὺς πρὸς τὸν Θ κῶνον ἢ τὸ περιγεγραμμένον τῷ τομεῖ σχῆμα πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον. Καὶ ἐναλλάξ · μεῖζον δέ ἐστι τὸ περιγεγραμμένον στερεὸν σχῆμα τοῦ τμήματος · καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον ἄρα σχῆμα ἐν τῷ τομεῖ

9 τούτῳ BCG : τοῦτο DEH || 18 περιγεγραμμένου ἐλάσσονα CDEGH : περιγεγραμμένου <πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμένου> ἐλάσσονα Stamatis || 25-26 μείζονα ἄρα λόγον ἔχει ὁ στερεὸς τομεὺς πρὸς τὸν Θ κῶνον add. Heiberg.

inscrite dans le secteur est donc, elle aussi, supérieure au cône Θ, ce qui est impossible ; car on a démontré plus haut qu'elle est inférieure à un cône de cette grandeur[1], c'est-à-dire à un cône ayant pour base un cercle, dont le rayon est égal à la droite menée du sommet du segment à un point de la circonférence du cercle de base du segment, et pour hauteur le rayon de la sphère ; or ce cône n'est autre que le cône Θ indiqué ; car il a pour base un cercle équivalent à la surface du segment, c'est-à-dire égal au cercle indiqué, et une hauteur égale au rayon de la sphère ; le secteur solide n'est donc pas supérieur au cône Θ.

Que le cône Θ soit donc supérieur au secteur solide. Que, de nouveau, le segment de droite Δ, supérieur à E, ait à E un rapport inférieur au rapport du cône au secteur[2] ; prenons comme antérieurement Z et H tels que les différences (sc. entre les segments de droite) soient égales ; que le rapport entre le côté du polygone, d'un nombre pair de côtés, circonscrit au secteur plan, et le côté du polygone inscrit soit inférieur au rapport de Δ à Z[3] ; que soient engendrées les figures solides circonscrites au secteur solide ; nous démontrerons donc de la même manière que le rapport entre la figure circonscrite au secteur solide et la figure inscrite est inférieur au rapport de Δ à E et au rapport du cône Θ au secteur, de façon que le rapport du secteur au cône est inférieur au rapport entre la figure solide inscrite dans le secteur[4] et la figure circonscrite. Mais le secteur est supérieur à la figure qui y est inscrite ; il s'ensuit que le cône Θ est supérieur à la figure circonscrite, ce qui est impossible, du moment qu'on a démontré qu'un cône de cette grandeur est inférieur à la figure circonscrite au secteur ; le secteur est, par conséquent, équivalent au cône Θ.

1. Cf. prop. 38.
2. Cf. prop. 2.
3. Cf. prop. 4.
4. Même confusion qu'à la p. préc., cf. n. 6.

μεῖζόν ἐστι τοῦ Θ κώνου· ὅπερ ἀδύνατον· δέδεικται γὰρ ἐν τοῖς ἄνω ἔλασσον ὂν τοῦ τηλικούτου κώνου [τουτέστι τοῦ ἔχοντος βάσιν μὲν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἐπιζευγνυμένῃ εὐθείᾳ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας· οὗτος δέ ἐστιν ὁ εἰρημένος κῶνος ὁ Θ· βάσιν τε γὰρ ἔχει κύκλον ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ τμήματος, τουτέστι τῷ εἰρημένῳ κύκλῳ, καὶ ὕψος ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας]· οὐκ ἄρα ὁ στερεὸς τομεὺς μείζων ἐστὶ τοῦ Θ κώνου.

Ἔστω δὴ πάλιν ὁ Θ κῶνος τοῦ στερεοῦ τομέως μείζων. Πάλιν δὴ ὁμοίως ἡ Δ πρὸς τὴν Ε μείζων αὐτῆς οὖσα ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω τοῦ ὃν ἔχει ὁ κῶνος πρὸς τὸν τομέα, καὶ ὁμοίως εἰλήφθωσαν αἱ Ζ, Η, ὥστε εἶναι τὰς διαφορὰς τὰς αὐτάς, καὶ τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸν ἐπίπεδον τομέα πολυγώνου ἀρτιογώνου ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω τοῦ ὃν ἔχει ἡ Δ πρὸς Ζ [καὶ γεγενήσθω τὰ περὶ τὸν στερεὸν τομέα στερεὰ σχήματα]· ὁμοίως οὖν δείξομεν ὅτι τὸ περιγεγραμμένον περὶ τὸν τομέα στερεὸν σχῆμα πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει ἡ Δ πρὸς Ε καὶ τοῦ ὃν ἔχει ὁ Θ κῶνος πρὸς τὸν τομέα [ὥστε καὶ ὁ τομεὺς πρὸς τὸν κῶνον ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἐγγεγραμμένον στερεὸν ἐν τῷ τμήματι πρὸς τὸ περιγεγραμμένον]. Μείζων δέ ἐστιν ὁ τομεὺς τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸν σχήματος· μείζων ἄρα ὁ Θ κῶνος τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος· ὅπερ ἀδύνατον [δέδεικται γὰρ τοῦτο ὅτι ὁ τηλικοῦτος κῶνος ἐλάσσων ἐστὶ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὸν τομέα]· ἴσος ἄρα ὁ τομεὺς τῷ Θ κώνῳ.

12 τομέως G : τομεὺς DEH ‖ 16 διαφορὰς Heiberg : δύο πλευρὰς DEGH excessus B ‖ 22 ἔχει alt. BC : om. DEGH ‖ 25 πρὸς DEGH : τῆς πρὸς C.

Livre II

Archimède à Dosithée, joie !

Tu m'avais invité autrefois par lettre à rédiger les démonstrations des problèmes, dont j'avais moi-même adressé les énoncés à Conon. Or il se trouve que la plupart d'entre elles se rédigent au moyen des théorèmes que voici, dont je t'avais envoyé antérieurement[1] les démonstrations : la surface de toute sphère est équivalente au quadruple du grand cercle de la sphère[2] ; la surface de tout segment de sphère est équivalente au cercle, dont le rayon est égal au segment de droite mené du sommet du segment (sc. de sphère) à un point de la périphérie de la base[3] ; pour toute sphère, le cylindre ayant pour base le grand cercle de la sphère et une hauteur égale au diamètre de la sphère est lui-même équivalent aux trois demis de la sphère, et sa surface est équivalente aux trois demis de la surface de la sphère[4] ; tout secteur solide est équivalent au cône ayant pour base un cercle équivalent à l'aire du segment de la sphère qui est dans le secteur et une hauteur égale au rayon de la sphère[5]. Tous les théorèmes et problèmes qui sont rédigés au moyen de ces théorèmes, je te les envoie, écrits dans ce livre ; quant à tous ceux qui sont découverts par d'autres considérations, à savoir ceux qui concernent les spirales et les conoïdes, je tâcherai de te les envoyer au plus tôt.

1. Dans le Ier livre de ce traité.
2. Cf. I, 33.
3. Cf. I, 42 et 43.
4. Cf. I, 34, coroll.
5. Cf. I, 44.

B

Ἀρχιμήδης Δοσιθέῳ χαίρειν.

Πρότερον μὲν ἐπέστειλάς μοι γράψαι τῶν προβλημάτων τὰς ἀποδείξεις, ὧν αὐτὸς τὰς προτάσεις ἀπέστειλα Κόνωνι· συμβαίνει δὲ αὐτῶν τὰ πλεῖστα γράφεσθαι διὰ τῶν θεωρημάτων, ὧν πρότερον ἀπέστειλά σοι τὰς ἀποδείξεις, ὅτι τε πάσης σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐστὶ τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, καὶ δὴ ὅτι παντὸς τμήματος σφαίρας τῇ ἐπιφανείᾳ ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ εὐθείᾳ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως ἀγομένῃ, καὶ διότι πάσης σφαίρας ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν μέγιστον κύκλον τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας, αὐτός τε ἡμιόλιός ἐστι τῷ μεγέθει τῆς σφαίρας καὶ ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ ἡμιολία τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, καὶ διότι πᾶς τομεὺς στερεὸς ἴσος ἐστὶ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὸν κύκλον τὸν ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας τοῦ ἐν τῷ τομεῖ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. Ὅσα μὲν οὖν τῶν θεωρημάτων καὶ προβλημάτων γράφεται διὰ τούτων τῶν θεωρημάτων, ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ γράψας ἀπέσταλκά σοι, ὅσα δὲ δι' ἄλλης εὑρίσκονται θεωρίας, τά τε περὶ ἑλίκων καὶ τὰ περὶ τῶν κωνοειδῶν, πειράσομαι διὰ τάχους ἀποστεῖλαι.

4 ὧν BDEGH : ὃν C || 8 δὴ ὅτι BCDEGH : διότι Heiberg || 9 τμήματος BC : om. DEGH.

Le premier des problèmes était le suivant :

Une sphère étant donnée, trouver une aire plane équivalente à la surface de la sphère[1]. Or la solution de ce problème est clairement démontrée en vertu des théorèmes indiqués ci-dessus ; car le quadruple du grand cercle de la sphère est une aire à la fois plane et équivalente à la surface de la sphère[2].

1.

Le second problème était le suivant : étant donné un cône ou un cylindre, trouver une sphère équivalente au cône ou au cylindre.

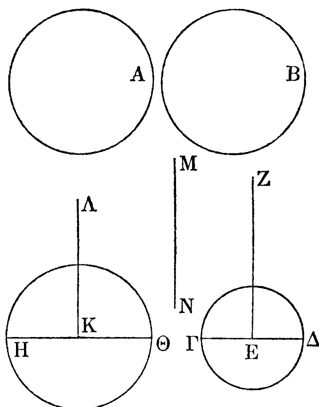


Fig. 46.

Soit A le cône ou le cylindre donné, et B la sphère équivalente à A ; donnons-nous un cylindre ΓΖΔ équivalent aux trois demis du cône ou du cylindre A, et un autre cylindre, équivalent aux trois demis de la sphère B, ayant pour base le cercle de diamètre ΗΘ et un axe ΚΛ égal au diamètre de la sphère B[3] ; le

1-3. Cf. les notes complémentaires.

Τὸ δὲ πρῶτον ἦν τῶν προβλημάτων τόδε· Σφαίρας δοθείσης ἐπίπεδον χωρίον εὑρεῖν ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας. Ἔστιν δὲ τοῦτο φανερὸν δεδειγμένον ἐκ τῶν προειρημένων θεωρημάτων· τὸ γὰρ τετραπλάσιον τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ ἐπίπεδόν τε χωρίον ἐστὶ καὶ ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας.

α′.

Τὸ δεύτερον ἦν· Κώνου δοθέντος ἢ κυλίνδρου σφαῖραν εὑρεῖν τῷ κώνῳ ἢ τῷ κυλίνδρῳ ἴσην.

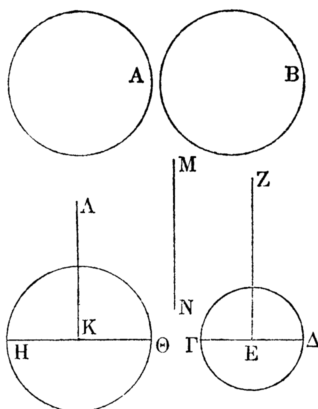


Fig. 46.

Ἔστω διδόμενος κῶνος ἢ κύλινδρος ὁ Α καὶ τῷ Α ἴση ἡ Β σφαῖρα, καὶ κείσθω τοῦ Α κώνου ἢ κυλίνδρου ἡμιόλιος κύλινδρος ὁ ΓΖΔ, τῆς δὲ Β σφαίρας ἡμιόλιος κύλινδρος, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΗΘ κύκλος, ἄξων δὲ ὁ ΚΛ ἴσος τῇ διαμέτρῳ τῆς Β σφαίρας· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ Ε

14 E mss. BCG : B mss. DEH.

cylindre E est donc équivalent au cylindre K ; dans des cylindres équivalents, les bases ont le rapport inverse des hauteurs ; il s'ensuit que le rapport du cercle E au cercle K, c'est-à-dire le rapport du carré sur ΓΔ au carré sur HΘ[1], est égal au rapport de KΛ à EZ[2]. Or KΛ est égal à HΘ[3], du moment que le cylindre valant les trois demis de la sphère a son axe égal au diamètre de la sphère et que K est un grand cercle de la sphère ; par conséquent, le rapport du carré sur ΓΔ au carré sur HΘ est égal au rapport de HΘ à EZ. Soit un rectangle de côtés ΓΔ et MN, équivalent au carré sur HΘ ; ΓΔ est donc à MN comme le carré sur ΓΔ est au carré sur HΘ, c'est-à-dire comme HΘ est à EZ, et par permutation, ΓΔ est à HΘ comme HΘ est à MN et comme MN est à EZ[4]. De plus, chacun des segments de droite ΓΔ et EZ est donné ; entre les deux segments de droite ΓΔ et EZ les deux segments de droite HΘ et MN sont donc des moyennes proportionnelles ; chacun des deux segments de droite HΘ et MN est donc donné.

Le problème à résoudre se posera donc en ces termes :

Soit A un cône ou un cylindre donné ; à trouver une sphère équivalente au cône ou cylindre A.

Soit un cylindre valant les trois demis du cône ou cylindre A ; qu'il ait pour base le cercle de diamètre ΓΔ et pour axe EZ ; prenons entre ΓΔ et EZ les deux moyennes proportionnelles HΘ et MN de façon que ΓΔ soit à HΘ comme HΘ est à MN et comme MN est à EZ ; imaginons un cylindre ayant pour base le cercle de diamètre HΘ et un axe KΛ égal au diamètre HΘ ; je dis que le cylindre E est équivalent au cylindre K.

En effet, du moment que ΓΔ est à HΘ comme MN est à EZ, et par permutation, et que HΘ est égal à KΛ, ΓΔ est à MN, c'est-à-dire le carré sur ΓΔ est au carré sur HΘ, comme le cercle E est au cercle K, et le cercle E est au cercle K comme KΛ est à EZ, ce qui fait que

1. Cf. Eucl. XII, 2.
2. Cf. Eucl. XII, 15, et I, lemmes 3 et 4, p. 48.
3. Cf. I, 34, coroll.
4. Cf. Eucl. V, 16.

κύλινρδος τῷ Κ κυλίνδρῳ [τῶν δὲ ἴσων κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν]· ὡς ἄρα ὁ Ε κύκλος πρὸς τὸν Κ κύκλον, τουτέστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ, οὕτως ἡ ΚΛ πρὸς ΕΖ. Ἴση δὲ ἡ ΚΛ τῇ ΗΘ [ὁ γὰρ ἡμιόλιος κύλινδρος τῆς σφαίρας ἴσον ἔχει τὸν ἄξονα τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας, καὶ ὁ Κ κύκλος μέγιστός ἐστι τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ]· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΘ, οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΕΖ. Ἔστω τῷ ἀπὸ ΗΘ ἴσον τὸ ὑπὸ ΓΔ, ΜΝ· ὡς ἄρα ἡ ΓΔ πρὸς ΜΝ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΘ, τουτέστιν ἡ ΗΘ πρὸς ΕΖ, καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΗΘ, οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΜΝ καὶ ἡ ΜΝ πρὸς τὴν ΕΖ. Καί ἐστιν δοθεῖσα ἑκατέρα τῶν ΓΔ, ΕΖ· δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΓΔ, ΕΖ δύο μέσαι ἀνάλογόν εἰσιν αἱ ΗΘ, ΜΝ· δοθεῖσα ἄρα ἑκατέρα τῶν ΗΘ, ΜΝ.

Συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως· ἔστω δὴ ὁ δοθεὶς κῶνος ἢ κύλινδρος ὁ Α· δεῖ δὴ τῷ Α κώνῳ ἢ κυλίνδρῳ ἴσην σφαῖραν εὑρεῖν.

Ἔστω τοῦ Α κώνου ἢ κυλίνδρου ἡμιόλιος κύλινδρος, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΓΔ κύκλος, ἄξων δὲ ὁ ΕΖ, καὶ εἰλήφθω τῶν ΓΔ, ΕΖ δύο μέσαι ἀνάλογον αἱ ΗΘ, ΜΝ, ὥστε εἶναι ὡς τὴν ΓΔ πρὸς τὴν ΗΘ, τὴν ΗΘ πρὸς τὴν ΜΝ καὶ τὴν ΜΝ πρὸς τὴν ΕΖ, καὶ νοείσθω κύλινδρος, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΗΘ κύκλος, ἄξων δὲ ὁ ΚΛ ἴσος τῇ ΗΘ διαμέτρῳ· λέγω δὴ ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ Ε κύλινδρος τῷ Κ κυλίνδρῳ.

Καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΗΘ, ἡ ΜΝ πρὸς ΕΖ, καὶ ἐναλλάξ, καὶ ἴση ἡ ΗΘ τῇ ΚΛ [ὡς ἄρα ἡ ΓΔ πρὸς ΜΝ, τουτέστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΘ, οὕτως ὁ Ε κύκλος πρὸς τὸν Κ κύκλον], ὡς ἄρα ὁ Ε κύκλος πρὸς τὸν Κ κύκλον, οὕτως ἡ ΚΔ πρὸς τὴν ΕΖ [τῶν ἄρα Ε, Κ κυλίν-

12 τὴν C : om. DEGH ‖ 14 τῶν Bas. : τῶν τῆς DEGH τῆς C ‖ 16 τῷ CEGH τὸ D ‖ 30 ΕΖ mss. BDEGH : ΒΖ ms. C.

dans les cylindres E et K les bases sont dans le rapport inverse des hauteurs ; le cylindre E est donc équivalent au cylindre K[1]. Or le cylindre K vaut les trois demis de la sphère de diamètre HΘ ; il s'ensuit que la sphère, dont le diamètre est égal à HΘ, c'est-à-dire la sphère B, est équivalente au cône ou cylindre A.

2.

Tout segment de sphère est équivalent à un cône ayant la même base que le segment et pour hauteur un segment de droite tel que son rapport à la hauteur du segment soit égal au rapport entre la somme du rayon de la sphère et de la hauteur du segment qui reste et la hauteur du segment qui reste.

Soit une sphère, et dans cette sphère un grand cercle de diamètre ΑΓ ; que la sphère soit coupée par le plan passant par BZ perpendiculairement à ΑΓ ; soit Θ le centre ; que le rapport de la somme de ΘΑ et de ΑΕ à ΑΕ soit égal au rapport de ΔΕ à ΓΕ, et que, d'un autre côté, le rapport de la somme de ΘΓ et de ΓΕ à ΓΕ soit égal au rapport de KE à EA ; construisons sur le cercle de diamètre BZ des cônes ayant pour sommets les points K et Δ ; je dis que le cône BΔZ est équivalent au segment de la sphère situé du côté de Γ, et que le cône BKZ est équivalent au segment sphérique situé du côté du point A.

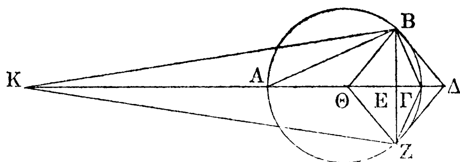


Fig. 47.

1. Cf. Eucl. XII, 15.

δρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν]· ἴσος ἄρα ὁ Ε κύλινδρος τῷ Κ κυλίνδρῳ. Ὁ δὲ Κ κύλινδρος τῆς σφαίρας, ἧς διάμετρος ἡ ΗΘ, ἡμιόλιός ἐστιν· καὶ ἡ σφαῖρα ἄρα, ἧς ἡ διάμετρος ἴση ἐστὶ τῇ ΗΘ, τουτέστιν ἡ Β, ἴση ἐστὶ τῷ Α κώνῳ ἢ κυλίνδρῳ.

β′.

Παντὶ τμήματι τῆς σφαίρας ἴσος ἐστὶ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι, ὕψος δὲ εὐθεῖαν, ἥτις πρὸς τὸ ὕψος τοῦ τμήματος τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει, ὃν συναμφότερος ἥ τε ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας καὶ τὸ ὕψος τοῦ λοιποῦ τμήματος πρὸς τὸ ὕψος τοῦ λοιποῦ τμήματος.

Ἔστω σφαῖρα, ἐν ᾗ μέγιστος κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ΑΓ, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ ἡ σφαῖρα τῷ διὰ τῆς ΒΖ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΓ, καὶ ἔστω κέντρον τὸ Θ, καὶ πεποιήσθω, ὡς συναμφότερος ἡ ΘΑ, ΑΕ πρὸς τὴν ΑΕ, οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς ΓΕ, καὶ πάλιν πεποιήσθω, ὡς συναμφότερος ἡ ΘΓ, ΓΕ πρὸς ΓΕ, οὕτως ἡ ΚΕ πρὸς ΕΑ, καὶ ἀναγεγράφθωσαν κῶνοι ἀπὸ τοῦ κύκλου τοῦ περὶ διάμετρον τὴν ΒΖ κορυφὰς ἔχοντες τὰ Κ, Δ σημεῖα· λέγω ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ μὲν ΒΔΖ κῶνος τῷ κατὰ τὸ Γ τμήματι τῆς σφαίρας, ὁ δὲ ΒΚΖ τῷ κατὰ τὸ Α σημεῖον.

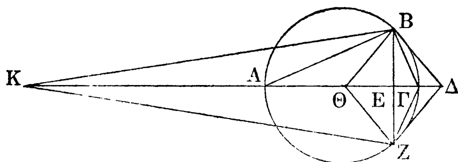


Fig. 47.

4 ἡ pr. om. C ‖ B mss. BCG : HB mss. DEH ‖ 14 τῷ CG : τῶν DEH ‖ τῆς Nizzius : τῶν BCDEGH ‖ 15 τὸ DEGH : τῷ C ‖ 20 ἔχοντες CG : ἔχοντα DEH ‖ 22 σημεῖον BDEGH : σημείῳ C.

Menons en effet BΘ et ΘZ et imaginons un cône ayant pour base le cercle de diamètre BZ et pour sommet le point Θ ; soit, de plus, un cône M ayant pour base le cercle équivalent à la surface du segment BΓZ de la sphère, c'est-à-dire le cercle d'un rayon égal à BΓ[1], et une hauteur égale au rayon de la sphère ; le cône M sera dès lors équivalent au secteur solide BΓΘZ, ce qui a été démontré dans le premier livre[2]. Mais comme ΔE est à EΓ comme la somme de ΘA et AE est à AE, par décomposition[3] ΓΔ sera à ΓE comme ΘA est à AE, c'est-à-dire comme ΓΘ est à AE, et, par permutation[4], ΔΓ est à ΓΘ comme ΓE est à EA, et, par composition[5], ΘΔ est à ΓΘ comme ΓA est à AE, c'est-à-dire comme le carré sur ΓB est au carré sur BE ; ΔΘ est donc à ΓΘ comme le carré sur ΓB est au carré sur BE. Mais ΓB est

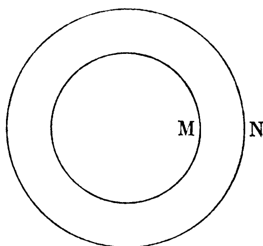


Fig. 48.

égal au rayon du cercle M, et BE est rayon du cercle de diamètre BZ ; il s'ensuit que ΔΘ est à ΓΘ comme le cercle M est au cercle de diamètre BZ. De plus, ΘΓ est égal à l'axe du cône M ; ΔΘ est donc à l'axe du cône M comme le cercle M est au cercle de diamètre BZ ; il s'ensuit que le cône ayant pour base le cercle M et pour hauteur le rayon de la sphère est équivalent au

1. Cf. prop. I, 42.
2. Cf. prop. I, 44.
3. Cf. Eucl. V, 17.
4. Cf. Eucl. V, 16.
5. Cf. Eucl. V, 18.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΘ, ΘΖ, καὶ νοείσθω κῶνος βάσιν μὲν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΒΖ κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ Θ σημεῖον, καὶ ἔστω κῶνος ὁ Μ βάσιν ἔχων κύκλον ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΒΓΖ τμήματος τῆς σφαίρας, τουτέστιν οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ΒΓ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας· ἔσται δὴ ὁ Μ κῶνος ἴσος τῷ ΒΓΘΖ στερεῷ τομεῖ· τοῦτο γὰρ δέδεικται ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ. Ἐπεὶ δέ ἐστιν, ὡς ἡ ΔΕ πρὸς ΕΓ, οὕτως συναμφότερος ἡ ΘΑ, ΑΕ πρὸς ΑΕ, διελόντι ἔσται, ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΓΕ, οὕτως ἡ ΘΑ πρὸς ΑΕ, τουτέστιν ἡ ΓΘ πρὸς ΑΕ, καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ ΔΓ πρὸς ΓΘ ἐστίν, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς ΕΑ, καὶ συνθέντι, ὡς ἡ ΘΔ πρὸς ΘΓ, ἡ ΓΑ πρὸς ΑΕ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΕ· ὡς ἄρα ἡ ΔΘ πρὸς

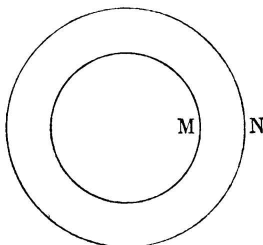


Fig. 48.

ΓΘ, τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΕ. Ἴση δέ ἐστιν ἡ ΓΒ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Μ κύκλου, ἡ δὲ ΒΕ ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶ τοῦ περὶ διάμετρον τὴν ΒΖ κύκλου· ὡς ἄρα ἡ ΔΘ πρὸς ΘΓ, ὁ Μ κύκλος πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΒΖ κύκλον. Καί ἐστιν ἴση ἡ ΘΓ τῷ ἄξονι του Μ κώνου· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΔΘ πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ Μ κώνου, οὕτως ὁ Μ κύκλος πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΒΖ κύκλον· ἴσος ἄρα ὁ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν Μ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν ἐκ

9 ΑΕ pr. BDEGH : ΘΕ ms. C.

rhombe solide BΔZΘ[1] ; ceci a en effet été démontré dans les lemmes du premier livre. Autre démonstration : du moment que ΔΘ est à la hauteur du cône M comme le cercle M est au cercle de diamètre BZ, le cône M est équivalent au cône ayant pour base le cercle de diamètre BZ et pour hauteur ΔΘ, puisque les bases y sont dans le rapport inverse des hauteurs. Mais le cône ayant pour base le cercle de diamètre BZ et pour hauteur ΔΘ est équivalent au rhombe solide BΔZΘ. Mais le cône M est équivalent au secteur solide BΓZΘ ; le secteur solide BΓZΘ est donc lui aussi équivalent au rhombe solide BΔZΘ. Si on retranche de part et d'autre le cône ayant pour base le cercle de diamètre BZ et pour hauteur EΘ, le cône qui reste, à savoir BΔZ, est équivalent au segment BZΓ de la sphère. On démontrera de la même manière que le cône BKZ est équivalent au segment BAZ de la sphère. Puisque, en effet, la somme de ΘΓ et ΓE est à ΓE comme KE est à EA, par décomposition[2] KA est à AE comme ΘΓ est à ΓE. Le segment de droite ΘΓ est donc égal à ΘA ; il s'ensuit que par permutation[3] KA est à AΘ comme AE est à EΓ, de façon que par composition[4] KΘ est à ΘA comme AΓ est à ΓE, c'est-à-dire comme le carré sur BA est au carré sur BE. Donnons-nous donc encore un cercle N ayant un rayon égal à AB ; il sera par conséquent équivalent à la surface du segment BAZ. Imaginons un cône (sc. sur) N ayant une hauteur égale au rayon de la sphère ; il est donc équivalent au secteur solide BΘZA, ce qui a été démontré dans le premier livre. Comme on a démontré que KΘ est à ΘA comme le carré sur AB est au carré sur BE, c'est-à-dire comme le carré sur le rayon du cercle N est au carré sur le rayon du cercle de diamètre BZ, c'est-à-dire comme le cercle N est au cercle de diamètre BZ, et que AΘ

1. Cf. I, lemme 4.
2. Cf. Eucl. V, 17.
3. Cf. Eucl. V, 16.
4. Cf. Eucl. V, 18.

τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, τῷ ΒΔΖΘ στερεῷ ῥόμβῳ [τοῦτο γὰρ ἐν τοῖς λήμμασι τοῦ πρώτου βιβλίου δέδεικται. Ἢ οὕτως· Ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΔΘ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ Μ κώνου, οὕτως ὁ Μ κύκλος πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΒΖ κύκλον, ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ Μ κῶνος τῷ κώνῳ, οὗ βάσις μὲν ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΒΖ κύκλος, ὕψος δὲ ἡ ΔΘ· ἀντιπεπόνθασι γὰρ αὐτῶν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. Ἀλλ' ὁ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΒΖ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν ΔΘ, ἴσος ἐστὶ τῷ ΒΔΖΘ στερεῷ ῥόμβῳ]. Ἀλλ' ὁ Μ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ ΒΓΖΘ στερεῷ τομεῖ· καὶ ὁ ΒΓΖΘ στερεὸς τομεὺς ἄρα ἴσος ἐστὶ τῷ ΒΔΖΘ στερεῷ ῥόμβῳ. Κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ κώνου, οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΒΖ κύκλος, ὕψος δὲ ἡ ΕΘ, λοιπὸς ἄρα ὁ ΒΔΖ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ ΒΖΓ τμήματι τῆς σφαίρας. Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ ὁ ΒΚΖ κῶνος ἴσος τῷ ΒΑΖ τμήματι τῆς σφαίρας. Ἐπεὶ γάρ ἐστιν, ὡς συναμφότερος ἡ ΘΓΕ πρὸς ΓΕ, οὕτως ἡ ΚΕ πρὸς ΕΑ, διελόντι ἄρα, ὡς ἡ ΚΑ πρὸς ΑΕ, οὕτως ἡ ΘΓ πρὸς ΓΕ. Ἴση δὲ ἡ ΘΓ τῇ ΘΑ· καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ἐστίν, ὡς ἡ ΚΑ πρὸς ΑΘ, οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς ΕΓ· ὥστε καὶ συνθέντι, ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΑ, ἡ ΑΓ πρὸς ΓΕ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΕ. Κείσθω δὴ πάλιν κύκλος ὁ Ν ἴσην ἔχων τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῇ ΑΒ· ἴσος ἄρα ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΒΑΖ τμήματος. Καὶ νοείσθω [ὁ] κῶνος ὁ Ν ἴσον ἔχων τὸ ὕψος τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας· ἴσος ἄρα ἐστὶ τῷ ΒΘΖΑ στερεῷ τομεῖ· τοῦτο γὰρ ἐν τῷ πρώτῳ δέδεικται. Καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη, ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΑ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΕ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Ν κύκλου πρὸς

2 λήμμασι BDEGH : λείμμασι C ‖ 6 κύκλος BH : κύκλον CDEG ‖ 15 ΒΚΖ mss. BDEGH : ΒΓΖ ms. C ‖ 16 ὡς BC : ὁ DEGH ‖ 17 ΘΓΕ mss. DEGH : ΘΓ ms. C ‖ 23 ΑΒ· ἴσος ἄρα ἐστὶ τῇ B : om. CDEGH ‖ 24 ὁ del. Heiberg ‖ 26 ἐπεὶ BDEGH : ἐπὶ C.

est égal à la hauteur du cône N, KΘ est à la hauteur du cône N comme le cercle N est au cercle de diamètre BZ ; il s'ensuit que le cône N, c'est-à-dire le secteur BΘZA, est équivalent à la figure BΘZK. Ajoutons de part et d'autre le cône ayant pour base le cercle de diamètre BZ et pour hauteur EΘ ; il s'ensuit que le segment tout entier, ABZ, de la sphère est équivalent au cône BZK, ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire[1].

Il devient clair que, d'une façon générale, le rapport d'un segment de sphère à un cône ayant même base que le segment et une hauteur égale est égal au rapport de la somme du rayon de la sphère et de la hauteur du segment de reste à la hauteur du segment de reste ; car ΔE est à EΓ comme le cône ΔZB, c'est-à-dire le segment BΓZ[2], est au cône BΓZ[3].

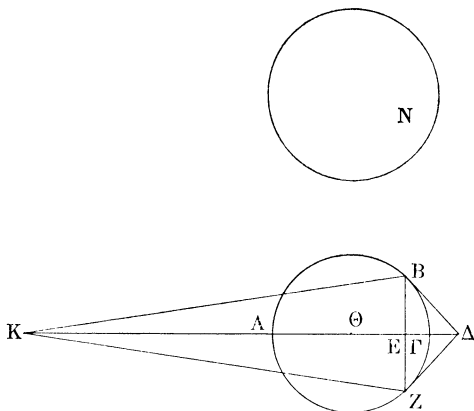


Fig. 49.

1. Cité par Héron, *Metr.*, p. 122.
2. Cf. prop. II, 2.
3. Cf. I, lemme 1.

τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ περὶ διάμετρον τὴν ΒΖ κύκλου, τουτέστιν ὁ Ν κύκλος πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΒΖ κύκλον, ἴση δὲ ἡ ΑΘ τῷ ὕψει τοῦ Ν κώνου, ὡς ἄρα ἡ ΚΘ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ Ν κώνου, οὕτως ὁ Ν κύκλος πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΒΖ κύκλον· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ Ν κῶνος, τουτέστιν ὁ ΒΘΖΑ τομεύς, τῷ ΒΘΖΚ σχήματι. Κοινὸς προσκείσθω ὁ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ περὶ τὴν ΒΖ κύκλος, ὕψος δὲ ἡ ΕΘ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΒΖ τμῆμα τῆς σφαίρας ἴσον ἐστὶν τῷ ΒΖΚ κώνῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Καὶ φανερὸν ὅτι γίγνεται καθόλου τμῆμα σφαίρας πρὸς κῶνον τὸν βάσιν μὲν ἔχοντα τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι καὶ ὕψος ἴσον, ὡς συναμφότερος ἥ τε ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας καὶ ἡ κάθετος τοῦ λοιποῦ τμήματος πρὸς τὴν κάθετον τοῦ λοιποῦ τμήματος· ὡς γὰρ ἡ ΔΕ πρὸς ΕΓ, οὕτως ὁ ΔΖΒ κῶνος, τουτέστι τὸ ΒΓΖ τμῆμα, πρὸς τὸν ΒΓΖ κῶνον.

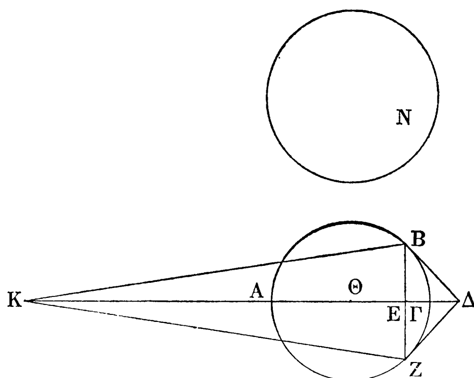


Fig. 49.

6 ΒΘΖΑ mss. BC : ΒΘΖΔ mss. DEGH ‖ 9 ΒΖΚ Basil. : bkz ms. B ΒΖ mss. CDEGH ‖ 13 ὡς BCEG : ᾧ DH ‖ 14-15 πρὸς τὴν κάθετον τοῦ λοιποῦ τμήματος om. C.

Dans les mêmes conditions, on démontre que le cône KBZ est équivalent au segment BAZ de la sphère. Soit en effet le cône N ayant une base équivalente à la surface de la sphère et pour hauteur le rayon de la sphère ; ce cône est donc équivalent à la sphère ; car on a démontré que la sphère vaut le quadruple du cône ayant pour base un grand cercle et pour hauteur le rayon[1]. Mais le cône N est lui aussi le quadruple du même cône[2], puisque la base est quadruple de la base et la surface de la sphère quadruple de son grand cercle. De plus, comme la somme de ΘA et AE est à AE comme ΔE est à EΓ, par décomposition et par permutation ΘΓ est à ΓΔ comme AE est à EΓ. Comme, en outre, KE est à EA comme la somme de ΘΓ et ΓE est à ΓE, par décomposition et par permutation KA est à ΓΘ, c'est-à-dire à ΘA, comme AE est à EΓ, c'est-à-dire comme ΘΓ est à ΓΔ, aussi par composition[3] ; AΘ est donc égal à ΘΓ ; il s'ensuit que KΘ est à ΘΓ comme ΘΔ est à ΔΓ et que KΔ est à ΔΘ comme ΔΘ est à ΔΓ, c'est-à-dire comme KΘ est à ΘA ; le rectangle de côtés ΔK et ΘA est donc équivalent au rectangle de côtés ΔΘ et ΘK. Comme, de plus, KΘ est à ΘΓ comme ΘΔ est à ΓΔ, par permutation, et qu'on a démontré que ΘΓ est à ΓΔ comme AE est à EΓ, KΘ est à ΘΔ comme AE est à EΓ, et le carré sur KΔ est au rectangle de côtés KΘ et ΘΔ comme le carré sur AΓ est au rectangle de côtés AE et EΓ. Mais on a démontré que le rectangle de côtés KΘ et ΘΔ est équivalent au rectangle de côtés KΔ et AΘ ; il s'ensuit que le carré sur KΔ est au rectangle de côtés KΔ et AΘ, c'est-à-dire que KΔ est à AΘ, comme le carré sur AΓ est au rectangle de côtés AE et EΓ, c'est-à-dire au carré sur EB[4]. En outre, AΓ est égal au rayon du cercle N ; il s'ensuit que le carré sur le rayon du cercle N est au carré sur BE, c'est-à-dire que le cercle N est au cercle de diamètre

1. Cf. prop. I, 34.
2. Cf. prop. I, 33.
3. Cf. Eucl. V, 18.
4. Cf. Eucl. VI, 17.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, ὅτι καὶ ὁ ΚΒΖ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ ΒΑΖ τμήματι τῆς σφαίρας. Ἔστω γὰρ ὁ Ν κῶνος βάσιν μὲν ἔχων [τὴν] ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ κῶνος τῇ σφαίρᾳ [ἡ γὰρ σφαῖρα δέδεικται τετραπλασία τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν μέγιστον κύκλον καὶ ὕψος τὴν ἐκ τοῦ κέντρου. Ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Ν κῶνος τοῦ αὐτοῦ ἐστι τετραπλάσιος, ἐπεὶ καὶ ἡ βάσις τῆς βάσεως καὶ ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν αὐτῇ]. Καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς συναμφότερος ἡ ΘΑ, ΑΕ πρὸς ΑΕ, ἡ ΔΕ πρὸς ΕΓ, διελόντι καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ ΘΓ πρὸς ΓΔ, ἡ ΑΕ πρὸς ΕΓ. Πάλιν, ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΚΕ πρὸς ΕΑ, συναμφότερος ἡ ΘΓΕ πρὸς ΓΕ, διελόντι καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ ΚΑ πρὸς ΓΘ, τουτέστι πρὸς ΘΑ, οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς ΕΓ, τουτέστιν ἡ ΘΓ πρὸς ΓΔ. Καὶ συνθέντι· ἴση δὲ ἡ ΑΘ τῇ ΘΓ· ὡς ἄρα ἡ ΚΘ πρὸς ΘΓ, ἡ ΘΔ πρὸς ΔΓ, καὶ ὅλη ἡ ΚΔ πρὸς ΔΘ ἐστίν, ὡς ἡ ΔΘ πρὸς ΔΓ, τουτέστιν ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΑ· ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΔΚ, ΘΑ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΘΚ. Πάλιν, ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΓ, ἡ ΘΔ πρὸς ΓΔ, ἐναλλάξ· ὡς δὲ ἡ ΘΓ πρὸς ΓΔ, ἐδείχθη ἡ ΑΕ πρὸς ΕΓ· ὡς ἄρα ἡ ΚΘ πρὸς ΘΔ, ἡ ΑΕ πρὸς ΕΓ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΚΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΘΔ, τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕΓ. Τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΚΘΔ ἴσον ἐδείχθη τῷ ὑπὸ ΚΔ, ΑΘ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΚΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΚΔ, ΑΘ, τουτέστιν ἡ ΚΔ πρὸς ΑΘ, τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΕΓ, τουτέστι πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΒ. Καί ἐστιν ἴση ἡ ΑΓ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Ν κύκλου· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Ν κύκλου πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΕ, τουτέστιν ὁ Ν κύκλος πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΒΖ κύκλον, οὕτως ἡ

3 τὴν del. Heiberg || 5 τῇ σφαίρᾳ DEGH : τῆς σφαίρας C || 20 ΑΕ ms. B : ΔΕ mss. CDEGH || 21 ΑΕ ms. B : ΘΕ mss. CDEGH || 27 ἄρα om. C.

BZ, comme KΔ est à AΘ, c'est-à-dire comme KΔ est à la hauteur du cône N ; le cône N, c'est-à-dire la sphère, est donc équivalent au rhombe solide[1] BΔZK. Autre démonstration : le cercle N est donc au cercle de diamètre BZ comme ΔK est à la hauteur du cône N ; le cône N est donc équivalent au cône ayant pour base le cercle de diamètre BZ et pour hauteur ΔK, puisque les bases y sont dans le rapport inverse des hauteurs ; mais ce dernier cône est équivalent au rhombe solide BKZΔ ; le cône N, c'est-à-dire la sphère, est donc équivalent au rhombe solide BZKΔ. Des cônes (sc. composant le rhombe) on a montré que le cône BΔZ est équivalent au segment BΓZ de la sphère[2] ; par conséquent, le reste, à savoir le cône BKZ, est équivalent au segment BAZ de la sphère.

3.

Le troisième problème était : couper une sphère donnée par un plan de manière que les surfaces des segments aient entre elles un rapport égal à un rapport donné[3].

Que la section soit faite ; soit AΔBE un grand cercle de la sphère et AB son diamètre ; construisons un plan perpendiculaire à AB ; soit ΔE la trace faite par ce plan dans le cercle AΔBE ; menons les cordes AΔ et BΔ.

Comme le rapport de la surface du segment ΔAE à la surface du segment ΔBE est (sc. donné), mais que la surface du segment ΔAE est équivalente à un cercle de rayon AΔ[4] et la surface du segment ΔBE équivalente à un cercle de rayon ΔB[5], et que les cercles indiqués ont entre eux le rapport qu'a le carré sur AΔ au carré sur ΔB, c'est-à-dire le rapport de AΓ à ΓB, le rapport de AΓ à ΓB est donné, de façon que le point Γ est donné. En outre ΔE est perpendiculaire à AB ; il

1. Cf. I, lemme 4.
2. Cf. prop. II, 2.
3. Cité par Héron, *Metr.*, p. 172.
4. Cf. prop. I, 43.
5. Cf. prop. I, 42.

ΚΔ πρὸς ΑΘ, τουτέστιν ἡ ΚΔ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ Ν κώνου· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ Ν κῶνος, τουτέστιν ἡ σφαῖρα, τῷ ΒΔΖΚ στερεῷ ῥόμβῳ [ἢ οὕτως· ἔστιν ἄρα, ὡς ὁ Ν κύκλος πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΒΖ κύκλον, οὕτως ἡ ΔΚ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ Ν κώνου· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ Ν κῶνος τῷ κώνῳ, οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΒΖ κύκλος, ὕψος δὲ ἡ ΔΚ· ἀντιπεπόνθασιν γὰρ αὐτῶν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. Ἀλλ᾽ οὗτος ὁ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ ΒΔΖΚ στερεῷ ῥόμβῳ· καὶ ὁ Ν ἄρα κῶνος, τουτέστιν ἡ σφαῖρα, ἴση ἐστὶ τῷ ΒΖΚΔ στερεῷ ῥόμβῳ]. Ὧν ὁ ΒΔΖ κῶνος ἴσος ἐδείχθη τῷ ΒΓΖ τμήματι τῆς σφαίρας· λοιπὸς ἄρα ὁ ΒΚΖ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ ΒΑΖ τμήματι τῆς σφαίρας.

γ′.

Τρίτον ἦν πρόβλημα τόδε· Τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν ἐπιπέδῳ τεμεῖν, ὅπως αἱ τῶν τμημάτων ἐπιφάνειαι πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχωσιν τὸν αὐτὸν τῷ δοθέντι.

Γεγονέτω, καὶ ἔστω τῆς σφαίρας μέγιστος κύκλος ὁ ΑΔΒΕ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΒ, καὶ ἐκβεβλήσθω πρὸς τὴν ΑΒ ἐπίπεδον ὀρθόν, καὶ ποιείτω τὸ ἐπίπεδον ἐν τῷ ΑΔΒΕ κύκλῳ τομὴν τὴν ΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΒΔ.

Ἐπεὶ οὖν λόγος ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ΔΑΕ τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ΔΒΕ τμήματος, ἀλλὰ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΔΑΕ τμήματος ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ΑΔ, τῇ δὲ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΔΒΕ τμήματος ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ΔΒ, ὡς δὲ οἱ εἰρημένοι κύκλοι πρὸς ἀλλήλους, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΒ, τουτέστιν ἡ ΑΓ πρὸς ΓΒ, λόγος ἄρα τῆς ΑΓ πρὸς ΓΒ δοθείς· ὥστε δοθέν ἐστι τὸ Γ σημεῖον.

24-25 ΑΔ — τῇ Β : om. DEGH.

s'ensuit que le plan passant par ΔE est lui aussi donné par la position.

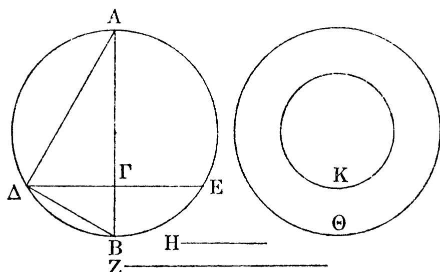


Fig. 50.

Le problème sera donc composé de la manière que voici : soit une sphère dont le grand cercle est ABΔE et le diamètre AB ; que le rapport donné soit celui de Z à H ; coupons AB par un point Γ tel que AΓ soit à BΓ comme Z est à H[1] ; coupons la sphère par un plan perpendiculaire à AB au point Γ ; soit ΔE l'intersection (sc. du plan perpendiculaire à AB et du plan du grand cercle) ; menons les cordes AΔ et ΔB et donnons-nous deux cercles Θ et K dont l'un, Θ, a un rayon égal à AΔ, et dont l'autre, K, a un rayon égal à ΔB ; dès lors, le cercle Θ est équivalent à la surface du segment ΔAE[2], et le cercle K est équivalent à la surface du segment ΔBE[3] ; car ceci a été démontré dans le premier livre. De plus, comme l'angle AΔB est droit[4] et que ΓΔ est perpendiculaire (sc. à AB), AΓ est à ΓB, c'est-à-dire Z est à H, comme le carré sur AΔ est au carré sur ΔB, c'est-à-dire comme le carré sur le rayon du cercle Θ est au carré sur le rayon du cercle K, c'est-à-dire comme le cercle Θ est au cercle K, c'est-à-dire comme la surface du segment ΔAE est à la surface du segment ΔBE de la sphère.

1. Cf. Eucl. VI, 10.
2. Cf. prop. I, 43.
3. Cf. prop. I, 42.
4. Cf. Eucl. III, 31.

Καί ἐστι τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΕ· θέσει ἄρα καὶ τὸ διὰ τῆς ΔΕ ἐπίπεδον.

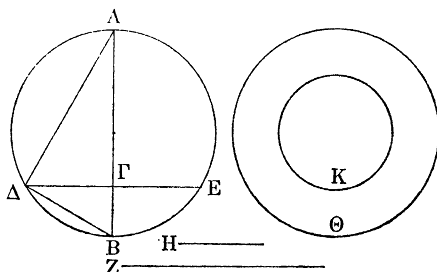


Fig. 50.

Συντεθήσεται δὴ οὕτως· ἔστω σφαῖρα, ἧς μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΔΕ καὶ διάμετρος ἡ ΑΒ, ὁ δὲ δοθεὶς λόγος ὁ τῆς Ζ πρὸς Η, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΒ κατὰ τὸ Γ, ὥστε εἶναι, ὡς τὴν ΑΓ πρὸς ΒΓ, οὕτως τὴν Ζ πρὸς Η, καὶ διὰ τοῦ Γ ἐπιπέδῳ τετμήσθω ἡ σφαῖρα πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ, καὶ ἔστω κοινὴ τομὴ ἡ ΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΔΒ, καὶ ἐκκείσθωσαν δύο κύκλοι οἱ Θ, Κ, ὁ μὲν Θ ἴσην ἔχων τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῇ ΑΔ, ὁ δὲ Κ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου ἴσην ἔχων τῇ ΔΒ· ἔστιν ἄρα ὁ μὲν Θ κύκλος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΔΑΕ τμήματος, ὁ δὲ Κ τοῦ ΔΒΕ τμήματος· τοῦτο γὰρ προδέδεικται ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ. Καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΔΒ καὶ κάθετος ἡ ΓΔ, ἔστιν, ὡς ἡ ΑΓ πρὸς ΓΒ, τουτέστιν ἡ Ζ πρὸς Η, τὸ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΒ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Θ κύκλου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Κ κύκλου, τουτέστιν ὁ Θ κύκλος πρὸς τὸν Κ κύκλον, τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ΔΑΕ τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ΔΒΕ τμήματος τῆς σφαίρας.

3 δὴ Heiberg : δὲ BCDEGH ‖ 8-9 αἱ ΑΔ, ΔΒ, καὶ ἐκκείσθωσαν om. C ‖ 14 ὀρθή B : δοθεῖσα CDEGH.

4.

Couper une sphère donnée de manière que le rapport entre les segments de la sphère soit égal à un rapport donné[1].

Soit ΑΒΓΔ la sphère donnée ; il faut la couper par un plan de manière que les segments de la sphère aient entre eux un rapport donné.

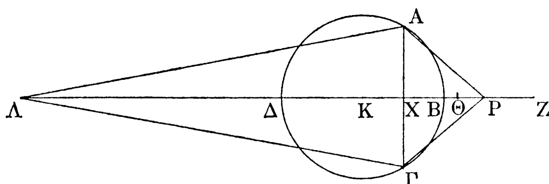


Fig. 51.

Qu'elle soit coupée par un plan passant par ΑΓ ; le rapport du segment ΑΔΓ au segment ΑΒΓ de la sphère est donc donné. Que la sphère soit coupée par (sc. un plan perpendiculaire au plan de trace ΑΓ et passant par) ce centre ; que la section soit le grand cercle ΑΒΓΔ, centre Κ et diamètre ΔΒ ; prenons (sc. les points Χ, Ρ et Λ) tels que la somme de ΚΔ et ΔΧ soit à ΔΧ comme ΡΧ est à ΧΒ, et que la somme de ΚΒ et ΒΧ soit à ΒΧ comme ΛΧ est à ΧΔ ; menons les droites ΑΛ, ΛΓ, ΑΡ et ΡΓ ; dès lors le cône ΑΛΓ est équivalent au segment ΑΔΓ de la sphère, et le cône ΑΡΓ est équivalent au segment ΑΒΓ[2] ; il s'ensuit que le rapport du cône ΑΛΓ au cône ΑΡΓ est à son tour donné[3]. Mais le cône est au cône comme ΛΧ est à ΧΡ, puisque ces cônes ont la même base, à savoir le cercle de diamètre ΑΓ ; le rapport de ΛΧ à ΧΡ est donc lui aussi donné. En outre, pour les mêmes raisons que plus haut, par construction, ΛΔ est à ΚΔ comme ΚΒ est à ΒΡ et comme ΔΧ est à ΧΒ ; et puisque ΡΒ est à ΒΚ

1. Cité par Héron, *Metr.*, p. 184.
2. Cf. prop. II, 2.
3. Cf. I, lemme 1.

δ'.

Τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν τεμεῖν, ὥστε τὰ τμήματα τῆς σφαίρας πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχειν τὸν αὐτὸν τῷ δοθέντι.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα σφαῖρα ἡ ΑΒΓΔ· δεῖ δὴ αὐτὴν τεμεῖν ἐπιπέδῳ, ὥστε τὰ τμήματα τῆς σφαίρας πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχειν τὸν δοθέντα.

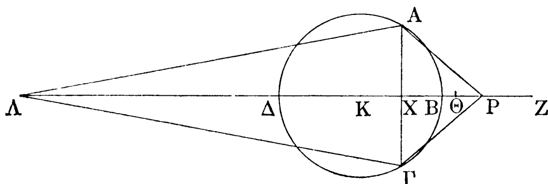


Fig. 51.

Τετμήσθω διὰ τῆς ΑΓ ἐπιπέδῳ· λόγος ἄρα τοῦ ΑΔΓ τμήματος τῆς σφαίρας πρὸς τὸ ΑΒΓ τμῆμα τῆς σφαίρας δοθείς. Τετμήσθω δὲ ἡ σφαῖρα διὰ τοῦ κέντρου, καὶ ἔστω ἡ τομὴ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, κέντρον δὲ τὸ Κ καὶ διάμετρος ἡ ΔΒ, καὶ πεποιήσθω, ὡς μὲν συναμφότερος ἡ ΚΔΧ πρὸς ΔΧ, οὕτως ἡ ΡΧ πρὸς ΧΒ, ὡς δὲ συναμφότερος ἡ ΚΒΧ πρὸς ΒΧ, οὕτως ἡ ΛΧ πρὸς ΧΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΛ, ΛΓ, ΑΡ, ΡΓ· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΛΓ κῶνος τῷ ΑΔΓ τμήματι τῆς σφαίρας, ὁ δὲ ΑΡΓ τῷ ΑΒΓ· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΑΛΓ κώνου πρὸς τὸν ΑΡΓ κῶνον δοθείς.

Ὡς δὲ ὁ κῶνος πρὸς τὸν κῶνον, οὕτως ἡ ΛΧ πρὸς ΧΡ [ἐπείπερ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχουσιν τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΑΓ κύκλον]· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΛΧ πρὸς ΧΡ δοθείς. Καὶ διὰ ταὐτὰ τοῖς πρότερον διὰ τῆς κατασκευῆς, ὡς ἡ ΛΔ πρὸς ΚΔ, ἡ ΚΒ πρὸς ΒΡ καὶ ἡ ΔΧ πρὸς ΧΒ. Καὶ ἐπεί

18-19 ἐπείπερ — ΧΡ mss. BGH : bis DE.

comme KΔ est à ΛΔ[1], par composition[2] comme PK est à KB, c'est-à-dire à KΔ, KΛ est à ΛΔ ; le segment de droite entier PΛ est donc au segment de droite entier KΛ comme KΛ est à ΛΔ[3]. Le rectangle de côtés PΛ et ΛΔ est donc équivalent au carré sur ΛK[4]. PΛ est donc à ΛΔ comme le carré sur KΛ est au carré sur ΛΔ. De plus, du moment que ΛΔ est à ΔK comme ΔX est à XB, par inversion[5] et par composition KΛ sera à ΛΔ comme BΔ est à ΔX et, par conséquent, le carré sur KΛ sera au carré sur ΛΔ comme le carré sur BΔ est au carré sur ΔX ; et du moment que ΛX est à ΔX comme la somme de KB et BX est à BX, par décomposition ΛΔ est à ΔX comme KB est à BX. Donnons-nous BZ égal à KB ; il est évident que (sc. l'extrémité de) ce segment de droite tombera au-delà du point P, et ΛΔ sera à ΔX comme ZB est à BX, de façon qu'aussi ΔΛ est à ΛX comme BZ est à ZX. Mais puisque le rapport de ΔΛ à ΛX est donné, le rapport de PΛ à ΛX est, lui aussi, donné. Du moment donc que le rapport de PΛ à ΛX est composé du rapport de PΛ à ΛΔ et du rapport de ΔΛ à ΛX, que PΛ est à ΛΔ comme le carré sur ΔB est au carré sur ΔX, et que ΔΛ est à ΛX comme BZ est à ZX, le rapport de PΛ à ΛX est composé du rapport du carré sur BΔ au carré sur ΔX et du rapport de BZ à ZX. Faisons en sorte que PΛ soit à ΛX comme BZ est à ZΘ ; or le rapport de PΛ à ΛX est donné ; le rapport de ZB à ZΘ est donc aussi donné. Mais BZ est donné comme étant égal au rayon ; ZΘ est donc aussi donné[6]. De plus, le rapport de BZ à ZΘ est composé du rapport du carré sur BΔ au carré sur ΔX et du rapport de BZ à ZX. Mais le rapport de BZ à ZΘ est composé du rapport de BZ à ZX et du rapport de ZX à ZΘ ; divisons de part et d'autre par le rapport de BZ à ZX ; il reste que le carré

1. Cf. Eucl. V 7. coroll.
2. Cf. Eucl. V, 18.
3. Cf. Eucl. V, 12.
4. Cf. Eucl. VI, 17.
5. Cf. Eucl. V, 7, coroll.
6. Cf. Eucl., *Data* 2.

ἐστιν, ὡς ἡ ΡΒ πρὸς ΒΚ, ἡ ΚΔ πρὸς ΛΔ, συνθέντι, ὡς ἡ ΡΚ πρὸς ΚΒ, τουτέστι πρὸς ΚΔ, οὕτως ἡ ΚΛ πρὸς ΛΔ· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΡΛ πρὸς ὅλην τὴν ΚΛ ἐστίν, ὡς ἡ ΚΛ πρὸς ΛΔ. Ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΡΛΔ τῷ ἀπὸ ΛΚ. Ὡς ἄρα ἡ ΡΛ πρὸς ΛΔ, τὸ ἀπὸ ΚΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΔ. Καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΛΔ πρὸς ΔΚ, οὕτως ἡ ΔΧ πρὸς ΧΒ, ἔσται ἀνάπαλιν καὶ συνθέντι, ὡς ἡ ΚΛ πρὸς ΛΔ, οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς ΔΧ [καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΚΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΧ. Πάλιν, ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΛΧ πρὸς ΔΧ, συναμφότερος ἡ ΚΒ, ΒΧ πρὸς ΒΧ, διελόντι, ὡς ἡ ΛΔ πρὸς ΔΧ, οὕτως ἡ ΚΒ πρὸς ΒΧ]. Καὶ κείσθω τῇ ΚΒ ἴση ἡ ΒΖ· ὅτι γὰρ ἐκτὸς τοῦ Ρ πεσεῖται δῆλον [καὶ ἔσται, ὡς ἡ ΛΔ πρὸς ΔΧ, οὕτως ἡ ΖΒ πρὸς ΒΧ· ὥστε καί, ὡς ἡ ΔΛ πρὸς ΛΧ, ἡ ΒΖ πρὸς ΖΧ]. Ἐπεὶ δὲ λόγος ἐστὶ τῆς ΔΛ πρὸς ΛΧ δοθείς, καὶ τῆς ΡΛ ἄρα πρὸς ΛΧ λόγος ἐστὶ δοθείς. Ἐπεὶ οὖν ὁ τῆς ΡΛ πρὸς ΛΧ λόγος συνῆπται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΡΛ πρὸς ΛΔ, καὶ ἡ ΔΛ πρὸς ΛΧ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΡΛ πρὸς ΛΔ, τὸ ἀπὸ ΔΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΧ, ὡς δὲ ἡ ΔΛ πρὸς ΛΧ, οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς ΖΧ, ὁ ἄρα τῆς ΡΛ πρὸς ΛΧ λόγος συνῆπται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΧ, καὶ ἡ ΒΖ πρὸς ΖΧ. Πεποιήσθω δέ, ὡς ἡ ΡΛ πρὸς ΛΧ, ἡ ΒΖ πρὸς ΖΘ· λόγος δὲ τῆς ΡΛ πρὸς ΛΧ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΖΒ πρὸς ΖΘ δοθείς. Δοθεῖσα δὲ ἡ ΒΖ· ἴση γάρ ἐστι τῇ ἐκ τοῦ κέντρου· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΖΘ. Καὶ ὁ τῆς ΒΖ ἄρα λόγος πρὸς ΖΘ συνῆπται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΧ, καὶ ἡ ΒΖ πρὸς ΖΧ. Ἀλλ' ὁ ΒΖ πρὸς ΖΘ λόγος συνῆπται ἔκ τε τοῦ τῆς ΒΖ πρὸς ΖΧ καὶ τοῦ τῆς ΖΧ πρὸς ΖΘ [κοινὸς ἀφῃρήσθω ὁ τῆς ΒΖ πρὸς ΖΧ]· λοιπὸν ἄρα ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ ΒΔ,

6 ΔΧ ms. B : ΒΧ mss. DEGH ‖ 7 ἡ pr. add. Heiberg ‖ 19 ΖΧ mss. BC : ΒΧ mss. DEGH ‖ 21 ἀπὸ om. C.

sur BΔ, c'est-à-dire une grandeur donnée, est au carré sur ΔX comme XZ est à ZΘ, c'est-à-dire à une grandeur donnée. En outre, le segment de droite ZΔ est donné. Il faut donc couper un segment de droite donné ΔZ par un point X et faire en sorte que XZ soit au segment donné ZΘ comme le carré donné, sur BΔ, est au carré sur ΔX. Ainsi énoncé sans conditions, le problème comporte une détermination ; mais si on ajoute les conditions présentes ici, à savoir celle que ΔB est double de BZ, et celle que ZB est plus grand que ZΘ, d'après l'analyse, il ne comporte pas de détermination. Le problème se posera donc ainsi : étant donnés deux segments de droite BΔ et BZ, BΔ étant double de BZ, et un point Θ sur BZ, couper ΔB par un point X de manière que le carré sur BΔ soit au carré sur ΔX comme XZ est à ZΘ ; chacun de ces problèmes sera analysé et composé à la fin[1].

Le problème sera donc composé de la manière que voici : que le rapport donné soit celui de Π à Σ, Π étant plus grand que Σ ; qu'une sphère donnée soit coupée par un plan passant par le centre ; soit ΑΒΓΔ le cercle d'intersection, ΒΔ le diamètre et K le centre ; donnons-nous un segment de droite BZ égal à KB et coupons BZ en Θ de manière que ΘZ soit à ΘB comme Π est à Σ ; coupons aussi BΔ en X de manière que XZ soit à ΘZ comme le carré sur BΔ est au carré sur ΔX, et faisons passer par X un plan perpendiculaire à BΔ ; je dis que ce plan coupera la sphère de manière que le segment plus grand soit au segment plus petit comme Π est à Σ.

Faisons, en effet, en sorte que la somme de KB et BX soit à BX comme ΛX est à ΔX et que la somme de KΔ et ΔX soit à XΔ comme PX est à XB, et menons les droites AΛ, ΛΓ, AP et PΓ ; dès lors, en vertu de la

1. La solution de ce problème, promise ici par l'auteur, avait disparu de l'œuvre d'Archimède déjà du temps de Dioclès. Eutocius nous a conservé les solutions de Dioclès et de Dionysodore.

τουτέστι δοθέν, πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΧ, οὕτως ἡ ΧΖ πρὸς ΖΘ, τουτέστι πρὸς δοθέν. Καί ἐστιν δοθεῖσα ἡ ΖΔ εὐθεῖα · εὐθεῖαν ἄρα δοθεῖσαν τὴν ΔΖ τεμεῖν δεῖ κατὰ τὸ Χ καὶ ποιεῖν, ὡς τὴν ΧΖ πρὸς δοθεῖσαν [τὴν ΖΘ], οὕτως τὸ δοθὲν [τὸ ἀπὸ ΒΔ] πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΧ. Τοῦτο οὕτως ἁπλῶς μὲν λεγόμενον ἔχει διορισμόν, προστιθεμένων δὲ τῶν προβλημάτων τῶν ἐνθάδε ὑπαρχόντων [τουτέστι τοῦ τε διπλασίαν εἶναι τὴν ΔΒ τῆς ΒΖ καὶ τοῦ μείζονα τῆς ΖΘ τὴν ΖΒ, ὡς κατὰ τὴν ἀνάλυσιν] οὐκ ἔχει διορισμόν · καὶ ἔσται τὸ πρόβλημα τοιοῦτον · δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΒΔ, ΒΖ καὶ διπλασίας οὔσης τῆς ΒΔ τῆς ΒΖ καὶ σημείου ἐπὶ τῆς ΒΖ τοῦ Θ τεμεῖν τὴν ΔΒ κατὰ τὸ Χ καὶ ποιεῖν, ὡς τὸ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΧ, τὴν ΧΖ πρὸς ΖΘ · ἑκάτερα δὲ ταῦτα ἐπὶ τέλει ἀναλυθήσεταί τε καὶ συντεθήσεται.

Συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως · ἔστω ὁ δοθεὶς λόγος ὁ τῆς Π πρὸς Σ μείζονος πρὸς ἐλάσσονα, καὶ δεδόσθω τις σφαῖρα καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ κέντρου, καὶ ἔστω τομὴ ὁ ΑΒΓΔ κύκλος, καὶ διάμετρος ἔστω ἡ ΒΔ, κέντρον δὲ τὸ Κ, καὶ τῇ ΚΒ ἴση κείσθω ἡ ΒΖ, καὶ τετμήσθω ἡ ΒΖ κατὰ τὸ Θ, ὥστε εἶναι, ὡς τὴν ΘΖ πρὸς ΘΒ, τὴν Π πρὸς Σ, καὶ ἔτι τετμήσθω ἡ ΒΔ κατὰ τὸ Χ, ὥστε εἶναι, ὡς τὴν ΧΖ πρὸς ΘΖ, τὸ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΧ, καὶ διὰ τοῦ Χ ἐπίπεδον ἐκβεβλήσθω ὀρθὸν πρὸς τὴν ΒΔ · λέγω ὅτι τὸ ἐπίπεδον τοῦτο τεμεῖ τὴν σφαῖραν, ὥστε εἶναι, ὡς τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλασσον, τὴν Π πρὸς Σ.

Πεποιήσθω γάρ, ὡς μὲν συναμφότερος ἡ ΚΒΧ πρὸς ΒΧ, οὕτως ἡ ΛΧ πρὸς ΔΧ, ὡς δὲ συναμφότερος ἡ ΚΔΧ πρὸς ΧΔ, ἡ ΡΧ πρὸς ΧΒ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΛ, ΛΓ, ΑΡ, ΡΓ·

3 εὐθεῖαν ἄρα Heiberg : παρὰ BDEG || 8-9 τῆς ΖΘ τὴν ΖΒ Heiberg : τὴν ΖΘ τῆς ΘΒ mss. BDEGH || 12 ΔΒ ms. B : ΑΒ mss. DEGH || 16 μείζονος BG : μεῖζον DEH || 23 τὴν Heiberg : τὸ DEGH.

Fig. 52.

construction, comme nous l'avons montré dans l'analyse[1], le rectangle de côtés PΛ et ΛΔ sera équivalent au carré sur ΛK, et KΛ sera à ΛΔ comme BΔ est à ΔX, de façon que le rapport du carré sur KΛ au carré sur ΛΔ est aussi égal au rapport du carré sur BΔ au carré sur ΔX ; et puisque le rectangle de côtés PΛ et ΛΔ est équivalent au carré sur ΛK, PΛ est à ΛΔ comme le carré sur ΛK est au carré sur ΛΔ, et PΛ est à ΛΔ aussi comme le carré sur BΔ est au carré sur ΔX, c'est-à-dire comme XZ est à ZΘ. Et comme la somme de KB et BX est à BX comme ΛX est à XΔ, et que KB est égal à BZ, on aura aussi ZX à XB, comme ΛX à XΔ. Par conversion[2], XZ sera à ZB comme XΛ est à ΛΔ, et par conséquent aussi ΛΔ à ΛX comme BZ à ZX[3]. Comme, de plus, PΛ est à ΛΔ comme XZ est à ZΘ, que ΔΛ est à ΛX comme BZ est à ZX, on aura par identité en proportion déréglée[4] PΛ à ΛX comme BZ à ZΘ ; il s'ensuit que ΛX est à XP comme ZΘ est à ΘB. Mais ZΘ est à ΘB comme Π est à Σ ; ΛX est donc à XP, c'est-à-dire le cône AΓΛ est au cône APΓ, c'est-à-dire le segment AΔΓ de la sphère est au segment ABΓ de la sphère[5], comme Π est à Σ.

1. Cf. plus haut, p. 113, l. 4.
2. Cf. Eucl. V, 19, coroll.
3. Cf. Eucl. V, 7, coroll.
4. Cf. Eucl. V, 21.
5. Cf. prop. II, 2.

Fig. 52.

ἔσται δὴ διὰ τὴν κατασκευήν, ὡς ἐδείξαμεν ἐν τῇ ἀναλύσει, ἴσον τὸ ὑπὸ ΡΛΔ τῷ ἀπὸ ΛΚ, καὶ ὡς ἡ ΚΛ πρὸς ΛΔ, ἡ ΒΔ πρὸς ΔΧ· ὥστε καί, ὡς τὸ ἀπὸ ΚΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΔ, τὸ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΧ. Καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΡΛΔ τῷ ἀπὸ ΛΚ ἐστὶν ἴσον [ἔστιν, ὡς ἡ ΡΛ πρὸς ΛΔ, τὸ ἀπὸ ΛΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΔ], ἔσται ἄρα καί, ὡς ἡ ΡΛ πρὸς ΛΔ, τὸ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΧ, τουτέστιν ἡ ΧΖ πρὸς ΖΘ. Καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς συναμφότερος ἡ ΚΒΧ πρὸς ΒΧ, οὕτως ἡ ΛΧ πρὸς ΧΔ, ἴση δέ ἐστιν ἡ ΚΒ τῇ ΒΖ, ἔσται ἄρα καί, ὡς ἡ ΖΧ πρὸς ΧΒ, οὕτως ἡ ΛΧ πρὸς ΧΔ. Ἀναστρέψαντι, ὡς ἡ ΧΖ πρὸς ΖΒ, οὕτως ἡ ΧΛ πρὸς ΛΔ· ὥστε καί, ὡς ἡ ΛΔ πρὸς ΛΧ, οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς ΖΧ. Καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΡΛ πρὸς ΛΔ, οὕτως ἡ ΧΖ πρὸς ΖΘ, ὡς δὲ ἡ ΔΛ πρὸς ΛΧ, οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς ΖΧ, καὶ δι᾽ ἴσου ἐν τῇ τεταραγμένῃ ἀναλογίᾳ, ὡς ἡ ΡΛ πρὸς ΛΧ, οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς ΖΘ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΛΧ πρὸς ΧΡ, οὕτως ἡ ΖΘ πρὸς ΘΒ. Ὡς δὲ ἡ ΖΘ πρὸς ΘΒ, οὕτως ἡ Π πρὸς Σ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΛΧ πρὸς ΧΡ, τουτέστιν ὁ ΑΓΛ κῶνος πρὸς τὸν ΑΡΓ κῶνον, τουτέστι τὸ ΑΔΓ τμῆμα τῆς σφαίρας πρὸς τὸ ΑΒΓ τμῆμα τῆς σφαίρας, οὕτως ἡ Π πρὸς Σ.

2 τὸ BG : τῷ DEH ‖ 10 ΛΧ ms. B : ΔΧ mss. DEGH ‖ 19 ΑΔΓ ms. B : ΑΛΓ mss. DEGH.

5.

Construire un segment de sphère semblable à un segment donné et équivalent à un autre segment donné.

Soient ΑΒΓ et ΕΖΗ les deux segments de sphère donnés ; que le segment ΑΒΓ ait pour base le cercle de diamètre ΑΒ et pour sommet le point Γ ; que le segment ΕΖΗ ait pour base le cercle de diamètre ΕΖ et pour sommet le point Η ; il faut donc trouver un segment de sphère équivalent au segment ΑΒΓ et semblable au segment ΕΖΗ.

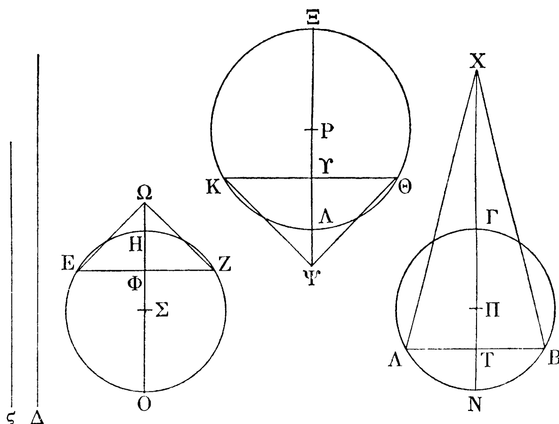


Fig. 53.

Que le segment à construire soit trouvé, soit ΘΚΛ ; qu'il ait pour base le cercle de diamètre ΘΚ et pour sommet le point Λ. Soient dans les sphères les (sc. grands) cercles ΑΝΒΓ, ΘΞΚΛ et ΕΟΖΗ, et soient ΓΝ, ΛΞ et ΗΟ leurs diamètres perpendiculaires aux bases des segments, Π, Ρ et Σ leurs centres ; faisons en sorte que la somme de ΠΝ et ΝΤ soit à ΝΤ comme

ε′.

Τῷ δοθέντι τμήματι σφαίρας ὅμοιον καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι ἴσον αὐτὸ συστήσασθαι.

Ἔστω τὰ δύο δοθέντα τμήματα σφαίρας τὰ ΑΒΓ, ΕΖΗ, καὶ ἔστω τοῦ μὲν ΑΒΓ τμήματος βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΑΒ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον, τοῦ δὲ ΕΖΗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΕΖ, κορυφὴ δὲ τὸ Η σημεῖον· δεῖ δὴ εὑρεῖν τμῆμα σφαίρας, ὃ ἔσται τῷ μὲν ΑΒΓ τμήματι ἴσον, τῷ δὲ ΕΖΗ ὅμοιον.

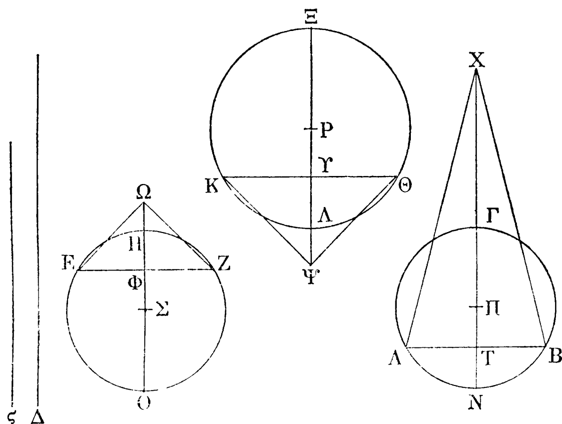


Fig. 53.

Εὑρήσθω καὶ ἔστω τὸ ΘΚΛ, καὶ ἔστω αὐτοῦ βάσις μὲν ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΘΚ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον· ἔστωσαν δὴ καὶ κύκλοι ἐν ταῖς σφαίραις οἱ ΑΝΒΓ, ΘΞΚΛ, ΕΟΖΗ, διάμετροι δὲ αὐτῶν πρὸς ὀρθὰς ταῖς βάσεσιν τῶν τμημάτων αἱ ΓΝ, ΛΞ, ΗΟ, καὶ ἔστω κέντρα τὰ Π, Ρ, Σ, καὶ πεποιήσθω, ὡς μὲν συναμφότερος ἡ ΠΝ, ΝΤ πρὸς τὴν

2 ἄλλῳ B : ἄλλο DEGH ‖ 14 ΗΟ ms. B : ΗΘ mss. DEGH.

XT est à TΓ, que la somme de PΞ et ΞΥ soit à ΞΥ comme ΨΥ est à ΥΛ et que la somme de ΣΟ et ΟΦ soit à ΟΦ comme ΩΦ est à ΦΗ ; imaginons des cônes ayant pour bases les cercles de diamètres AB, ΘK et EZ et pour sommets les points X, Ψ et Ω ; dès lors seront équivalents : le cône ABX au segment ABΓ de la sphère, le cône ΨΘK au segment ΘKΛ, et le cône EΩZ au segment EHZ ; car ceci a été démontré[1]. Du moment que le segment de sphère ABΓ est équivalent au segment ΘKΛ, le cône AXB sera à son tour équivalent au cône ΨΘK ; or dans les cônes équivalents les bases sont dans le rapport inverse des hauteurs ; le cercle de diamètre AB est donc au cercle de diamètre ΘK comme ΨΥ est à XT[2]. Mais le cercle est au cercle comme le carré sur AB est au carré sur ΘK ; le carré sur AB est donc au carré sur ΘK comme ΨΥ est à XT. De plus, puisque le segment EZH est semblable au segment ΘKΛ, le cône EZΩ est lui aussi semblable au cône ΨΘK, ce qui sera démontré ; ΩΦ est donc à EZ comme ΨΥ est à ΘK[3]. Or le rapport de ΩΦ à EZ est donné ; le rapport de ΨΥ à ΘK est donc aussi donné ; que ce rapport soit le même que celui de XT à Δ ; XT étant donné, Δ est aussi donné[4]. De plus, comme ΨΥ est à XT, c'est-à-dire comme le carré sur AB est au carré sur ΘK, comme ΘK est à Δ[5], donnons-nous un rectangle de côtés AB et ς équivalent au carré sur ΘK ; il en résulte que le rapport du carré sur AB au carré sur ΘK sera aussi égal au rapport de AB à ς. Mais on a aussi démontré que le carré sur AB est au carré sur ΘK comme ΘK est à Δ et que par permutation[6] AB est à ΘK comme ς est à Δ. Mais AB est à ΘK comme ΘK est à ς, puisque le carré sur ΘK est équivalent au rectangle de côtés AB et ς[7] ; il s'ensuit que AB est à ΘK

1. Cf. prop. II, 2.
2. Cf. I, lemme 4.
3. Cf. I, lemme 5.
4. Cf. Eucl., *Data*, 2.
5. Cf. Eucl. V, 16.
6. Cf. Eucl. V, 16.
7. Cf. Eucl. VI, 17.

ΝΤ, οὕτως ἡ ΧΤ πρὸς ΤΓ, ὡς δὲ συναμφότερος ἡ ΡΞ, ΞΥ πρὸς ΞΥ, οὕτως ἡ ΨΥ πρὸς ΥΛ, ὡς δὲ συναμφότερος ἡ ΣΟ, ΟΦ πρὸς ΟΦ, οὕτως ἡ ΩΦ πρὸς ΦΗ, καὶ νοείσθωσαν κῶνοι, ὧν βάσεις μέν εἰσιν οἱ περὶ διαμέτρους τὰς ΑΒ, ΘΚ, ΕΖ κύκλοι, κορυφαὶ δὲ τὰ Χ, Ψ, Ω σημεῖαι· ἔσται δὴ ἴσος ὁ μὲν ΑΒΧ κῶνος τῷ ΑΒΓ τμήματι τῆς σφαίρας, ὁ δὲ ΨΘΚ τῷ ΘΚΛ, ὁ δὲ ΕΩΖ τῷ ΕΗΖ· τοῦτο γὰρ δέδεικται. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τμῆμα τῆς σφαίρας τῷ ΘΚΛ τμήματι, ἴσος ἄρα καὶ ὁ ΑΧΒ κῶνος τῷ ΨΘΚ κώνῳ [τῶν δὲ ἴσων κώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν]· ἔστιν ἄρα, ὡς ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΑΒ πρὸς τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΘΚ, οὕτως ἡ ΨΥ πρὸς ΧΤ. Ὡς δὲ ὁ κύκλος πρὸς τὸν κύκλον, τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΚ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΚ, οὕτως ἡ ΨΥ πρὸς ΧΤ. Καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΕΖΗ τμῆμα τῷ ΘΚΛ τμήματι, ὅμοιος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ ΕΖΩ κῶνος τῷ ΨΘΚ κώνῳ [τοῦτὸ γὰρ δειχθήσεται]· ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΩΦ πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως ἡ ΨΥ πρὸς ΘΚ. Λόγος δὲ τῆς ΩΦ πρὸς τὴν ΕΖ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΨΥ πρὸς τὴν ΘΚ δοθείς. Ὁ αὐτὸς ἔστω ὁ τῆς ΧΤ πρὸς Δ· καί ἐστι δοθεῖσα ἡ ΧΤ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ Δ. Καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΨΥ πρὸς ΧΤ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΚ, οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς Δ, κείσθω τῷ ἀπὸ ΘΚ ἴσον τὸ ὑπὸ ΑΒ, ϛ· ἔσται ἄρα καί, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΚ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ϛ. Ἐδείχθη δὲ καί, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΚ, οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς Δ, καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΘΚ, οὕτως ἡ ϛ πρὸς Δ. Ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς ΘΚ, οὕτως ἡ

3 ΩΦ mss. BD : ΟΦ mss. EGH ‖ 6 δὴ B : δὲ DEGH ‖ 15 τῷ G : τὰ DEH ‖ 16 ὅμοιος B : ὁμοίως DEGH.

comme ΘK est à ϛ et comme ϛ est à Δ. Entre les deux grandeurs données AB et Δ, ΘK et ϛ sont donc les deux moyennes proportionnelles en proportion continue.

Le problème sera ainsi composé de la manière que voici : soit ABΓ le segment auquel le segment à construire doit être équivalent et EZH le segment auquel il doit être semblable ; soient, dans les sphères, les grands cercles ABΓN et EHZO ; soient ΓN et HO leurs diamètres, Π et Σ leurs centres ; faisons en sorte que la somme de ΠN et NT soit à NT comme XT est à TΓ, et que la somme de ΣO et OΦ soit à OΦ comme ΩΦ est à ΦH ; le cône XAB est donc équivalent au segment de sphère AΓB, et le cône ZΩE est équivalent au segment EHZ[1]. Faisons que ΩΦ soit à EZ comme XT est à Δ ; entre les deux segments de droite donnés AB et Δ prenons les deux moyennes proportionnelles ΘK et ϛ, de façon que AB est à ΘK comme ΘK est à ϛ et comme ϛ est à Δ, et sur le segment de droite ΘK construisons le segment de cercle ΘKΛ semblable au segment de cercle EZH[2] ; complétons le cercle[3] ; soit ΛΞ son diamètre ; imaginons une sphère de grand cercle ΛΘΞK et de centre P et faisons passer par ΘK un plan perpendiculaire à ΛΞ ; dès lors le segment de la sphère du côté de Λ sera semblable au segment de sphère EHZ, puisque les segments de cercle étaient eux aussi semblables. Je dis que ce segment (sc. sphérique, du côté de Λ) est aussi équivalent au segment de sphère ABΓ. Faisons que la somme de PΞ et ΞΥ soit à ΞΥ comme ΨΥ est à ΥΛ ; le cône ΨΘK est par conséquent équivalent au segment de sphère ΘKΛ[4]. De plus, comme le cône ΨΘK est semblable au cône ZΩE, ΩΦ est à EZ, c'est-à-dire XT est à Δ, comme ΨΥ est à ΘK ; et par permutation[5] et par inversion[6], ΨΥ est à XT comme ΘK

1. Cf. prop. II, 2.
2. Cf. Eucl. III, 33.
3. Cf. Eucl. III, 25.
4. Cf. prop. II, 2.
5. Cf. Eucl. V, 16.
6. Cf. Eucl. V, 7, coroll.

ΘΚ πρὸς ϛ [διὰ τὸ ἴσον εἶναι τὸ ἀπὸ ΘΚ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ϛ]· ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς ΘΚ, οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς ϛ καὶ ἡ ϛ πρὸς Δ. Δύο ἄρα δοθεισῶν τῶν ΑΒ, Δ δύο μέσαι κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ ΘΚ, ϛ.

Συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως· ἔστω, ᾧ μὲν δεῖ ἴσον τμῆμα συστήσαθαι, τὸ ΑΒΓ, ᾧ δὲ ὅμοιον, τὸ ΕΖΗ, καὶ ἔστωσαν μέγιστοι κύκλοι τῶν σφαιρῶν οἱ ΑΒΓΝ, ΕΗΖΟ› διάμετροι δὲ αὐτῶν αἱ ΓΝ, ΗΟ καὶ κέντρα τὰ Π, Σ, καὶ πεποιήσθω, ὡς μὲν συναμφότερος ἡ ΠΝ, ΝΤ πρὸς ΝΤ, οὕτως ἡ ΧΤ πρὸς ΤΓ, ὡς δὲ συναμφότερος ἡ ΣΟΦ πρὸς ΟΦ, ἡ ΩΦ πρὸς ΦΗ· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ μὲν ΧΑΒ κῶνος τῷ ΑΒΓ τμήματι τῆς σφαίρας, ὁ δὲ ΖΩΕ τῷ ΕΗΖ. Πεποιήσθω, ὡς ἡ ΩΦ πρὸς ΕΖ, οὕτως ἡ ΧΤ πρὸς Δ, καὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΑΒ, Δ δύο μέσαι ἀνάλογον εἰλήφθωσαν αἱ ΘΚ, ϛ, ὥστε εἶναι, ὡς τὴν ΑΒ πρὸς ΘΚ, οὕτως τὴν ΚΘ πρὸς ϛ καὶ τὴν ϛ πρὸς Δ, καὶ ἐπὶ τῆς ΘΚ κύκλου τμῆμα ἐπεστάσθω τὸ ΘΚΛ ὅμοιον τῷ ΕΖΗ κύκλου τμήματι, καὶ ἀναπεπληρώσθω ὁ κύκλος, καὶ ἔστω αὐτοῦ διάμετρος ἡ ΛΞ, καὶ νοείσθω σφαῖρα, ἧς μέγιστος κύκλος ἐστὶν ὁ ΛΘΞΚ, κέντρον δὲ τὸ Ρ, καὶ διὰ τῆς ΘΚ ἐπίπεδον ὀρθὸν ἐκβεβλήσθω πρὸς τὴν ΛΞ· ἔσται δὴ τὸ τμῆμα τῆς σφαίρας τὸ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ Λ ὅμοιον τῷ ΕΗΖ τμήματι τῆς σφαίρας, ἐπειδὴ καὶ τῶν κύκλων τὰ τμήματα ἦν ὅμοια. Λέγω δὲ ὅτι καὶ ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΒΓ τμήματι τῆς σφαίρας. Πεποιήσθω, ὡς συναμφότερος ἡ ΡΞ, ΞΥ πρὸς τὴν ΞΥ, οὕτως ἡ ΨΥ πρὸς ΥΛ· ἴσος ἄρα ὁ ΨΘΚ κῶνος τῷ ΘΚΛ τμήματι τῆς σφαίρας. Καὶ ἐπειδὴ ὅμοιός ἐστιν ὁ ΨΘΚ κῶνος τῷ ΖΩΕ κώνῳ, ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΦΩ πρὸς ΕΖ, τουτέστιν ἡ ΧΤ πρὸς Δ, οὕτως ἡ ΨΥ πρὸς ΘΚ· καὶ ἐναλλὰξ καὶ ἀνάπαλιν· ὡς ἄρα ἡ ΨΥ πρὸς ΧΤ,

7 ΕΗΖΟ mss. BC : ΕΗΖΩ mss. DEGH ‖ 8 ΗΟ mss. BG : ΗΘ mss. DEH ‖ 10 ΤΓ mss. BCEG : ΤΥ mss. DH ‖ 11 ΩΦ mss. BC : ΟΦ mss. DEGH ‖ 16 ἐπεστάσθω codd. (pro ἐφεστάσθω) ‖ 22 ΕΗΖ ms. C : ΕΖΗΘ mss. DEGH.

est à Δ. En outre, puisque AB, KΘ, ϛ et Δ forment une proportion (sc. continue), le carré sur AB est au carré sur ΘK comme ΘK est à Δ. Mais ΘK est à Δ comme ΨΥ est à XΤ ; il s'ensuit que le carré sur AB est au carré sur KΘ, c'est-à-dire que le cercle de diamètre AB est au cercle de diamètre ΘK, comme ΨΥ est à XΤ ; le cône XAB est donc équivalent au cône ΨΘK[1], de façon qu'aussi le segment de sphère ABΓ est équivalent au segment de sphère ΘKΛ. Le segment que nous venons de construire, ΘKΛ, est donc équivalent au segment donné AΓB et semblable à un autre segment donné EZH.

6.

Étant donnés deux segments de sphère, soit de la même sphère soit de sphères différentes, trouver un segment de sphère qui soit semblable à l'un des segments donnés et qui ait une surface équivalente à la surface de l'autre segment.

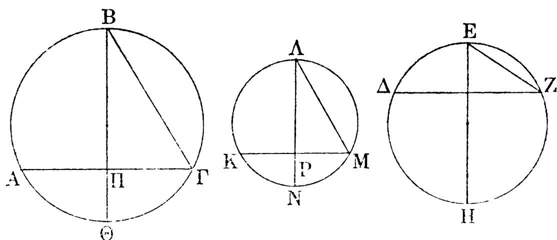


Fig. 54.

Soient les segments sphériques donnés, marqués par les arcs de cercle ABΓ et ΔEZ ; soit le segment marqué par l'arc ABΓ celui auquel le segment à trouver doit être semblable, et le segment marqué par l'arc ΔEZ celui, à la surface duquel la surface du segment à trouver doit être égale.

1. Cf. I, lemme 4.

ἡ ΘΚ πρὸς Δ. Καὶ ἐπειδὴ ἀνάλογόν εἰσιν αἱ ΑΒ, ΚΘ, ϛ, Δ, ἔστιν, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΚ, ἡ ΘΚ πρὸς Δ. Ὡς δὲ ἡ ΘΚ πρὸς Δ, ἡ ΨΥ πρὸς ΧΤ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΘ, τουτέστιν ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΑΒ κύκλος πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΘΚ κύκλον, οὕτως ἡ ΨΥ πρὸς τὴν ΧΤ· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ΧΑΒ κῶνος τῷ ΨΘΚ κώνῳ· ὥστε καὶ τὸ ΑΒΓ τμῆμα τῆς σφαίρας ἴσον ἐστὶ τῷ ΘΚΛ τμήματι τῆς σφαίρας. Τῷ δοθέντι ἄρα τμήματι τῷ ΑΓΒ ἴσον καὶ ἄλλῳ δοθέντι ὅμοιον τῷ ΕΖΗ τὸ αὐτὸ συνέσταται τὸ ΘΚΛ.

ϛ′.

Δύο δοθέντων σφαίρας τμημάτων εἴτε τῆς αὐτῆς εἴτε μὴ εὑρεῖν τμῆμα σφαίρας, ὃ ἔσται ἑνὶ μὲν τῶν δοθέντων ὅμοιον, τὴν δὲ ἐπιφάνειαν ἕξει ἴσην τῇ τοῦ ἑτέρου τμήματος ἐπιφανείᾳ.

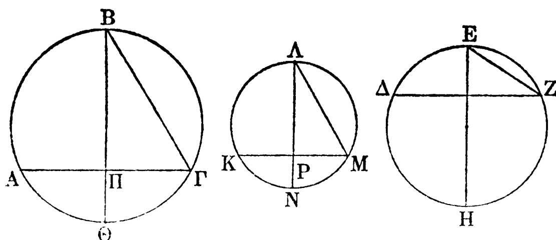


Fig. 54.

Ἔστω τὰ δοθέντα τμήματα σφαιρικὰ κατὰ τὰς ΑΒΓ, ΔΕΖ περιφερείας, καὶ ἔστω, ᾧ μὲν δεῖ ὅμοιον εὑρεῖν, τὸ κατὰ τὴν ΑΒΓ περιφέρειαν, οὗ δὲ τὴν ἐπιφάνειαν ἴσην ἔχειν τῇ ἐπιφανείᾳ, τὸ κατὰ τὴν ΔΕΖ.

1 ΑΒ ms. B : ΑΘ mss. CDEGH ‖ 4-5 τὴν ΑΒ κύκλος πρὸς τὸν περὶ διάμετρον B : om. CDEGH ‖ 5 κύκλον B : κύκλος CDEGH ‖ 9 ἄλλῳ BC : ἄλλο DEGH.

Que la construction soit faite ; que le segment de sphère ΚΛΜ soit semblable au segment ΑΒΓ et qu'il ait sa surface égale à la surface du segment ΔΕΖ ; imaginons les centres des sphères et faisons-y passer des plans perpendiculaires aux bases des segments ; que leurs intersections avec les sphères soient les grands cercles ΚΛΜΝ, ΒΑΓΘ et ΕΖΗΔ et leurs intersections avec les bases des segments les cordes ΚΜ, ΑΓ et ΔΖ ; que les diamètres des sphères perpendiculaires à ΚΜ, ΑΓ et ΔΖ soient ΛΝ, ΒΘ et ΕΗ ; menons les cordes ΛΜ, ΒΓ et ΕΖ. Puisque la surface du segment de sphère ΚΛΜ est équivalente à la surface du segment ΔΕΖ, le cercle dont le rayon est égal à ΛΜ est à son tour égal au cercle dont le rayon est égal à ΕΖ ; car on a démontré[1] que les surfaces des segments indiqués sont équivalentes à des cercles dont les rayons sont égaux aux segments de droites menés des sommets des segments aux (sc. circonférences des) bases ; par conséquent ΜΛ est aussi égal à ΕΖ. Mais puisque le segment ΚΛΜ est semblable au segment ΑΒΓ, ΛΡ est à ΡΝ comme ΒΠ est à ΠΘ ; et par inversion[2] et par composition[3] ΝΛ est à ΛΡ comme ΘΒ est à ΒΠ ; mais ΡΛ à ΛΜ est aussi comme ΒΠ est à ΓΒ[4], les triangles étant semblables ; il s'ensuit que ΝΛ est à ΛΜ, c'est-à-dire à ΕΖ, comme ΘΒ est à ΒΓ[5] ; et par permutation[6] ; mais le rapport de ΕΖ à ΒΓ est donné du moment que chacun de ces segments de droite est donné[7] ; le rapport de ΛΝ à ΒΘ est donc aussi donné ; en outre ΒΘ est donné, et par conséquent aussi ΛΝ[8], de façon que la sphère, elle aussi, est donnée[9].

Le problème sera donc composé ainsi. Soient ΑΒΓ et ΔΕΖ les deux segments de sphère donnés, ΑΒΓ

1. Cf. prop. I, 42 et 43.
2. Cf. Eucl. V, 7, coroll.
3. Cf. Eucl. V, 18.
4. Cf. Eucl. VI, 4
5. Cf. Eucl. V, 22.
6. Cf. Eucl. V, 16.
7. Cf. Eucl., *Data*, 1.
8. Cf. Eucl., *Data*, 2.
9. Cf. Eucl., *Data*, déf. 5.

Καὶ γεγενήσθω, καὶ ἔστω τὸ ΚΛΜ τμῆμα τῆς σφαίρας τῷ μὲν ΑΒΓ τμήματι ὅμοιον, τὴν δὲ ἐπιφάνειαν ἴσην ἐχέτω τῇ τοῦ ΔΕΖ τμήματος ἐπιφανείᾳ, καὶ νοείσθω τὰ κέντρα τῶν σφαιρῶν, καὶ δι' αὐτῶν ἐπίπεδα ἐκβεβλήσθω ὀρθὰ πρὸς τὰς τῶν τμημάτων βάσεις, καὶ ἐν μὲν ταῖς σφαίραις τομαὶ ἔστωσαν οἱ ΚΛΜΝ, ΒΑΓΘ, ΕΖΗΔ μέγιστοι κύκλοι, ἐν δὲ ταῖς βάσεσι τῶν τμημάτων αἱ ΚΜ, ΑΓ, ΔΖ εὐθεῖαι, διάμετροι δὲ τῶν σφαιρῶν πρὸς ὀρθὰς οὖσαι ταῖς ΚΜ, ΑΓ, ΔΖ ἔστωσαν αἱ ΛΝ, ΒΘ, ΕΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΜ, ΒΓ, ΕΖ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ τοῦ ΚΛΜ τμήματος τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια τῇ τοῦ ΔΕΖ τμήματος ἐπιφανείᾳ, ἴσος ἄρα ἐστὶν καὶ ὁ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ΛΜ, τῷ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ΕΖ [αἱ γὰρ ἐπιφάνειαι τῶν εἰρημένων τμημάτων ἴσαι ἐδείχθησαν κύκλοις, ὧν αἱ ἐκ τῶν κέντρων ἴσαι εἰσὶν ταῖς ἀπὸ τῶν κορυφῶν τῶν τμημάτων ἐπὶ τὰς βάσεις ἐπιζευγνυούσαις]· ὥστε καὶ ἡ ΜΛ τῇ ΕΖ ἴση ἐστίν. Ἐπεὶ δὲ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΚΛΜ τῷ ΑΒΓ τμήματι, ἔστιν, ὡς ἡ ΛΡ πρὸς ΡΝ, ἡ ΒΠ πρὸς ΠΘ· καὶ ἀνάπαλιν καὶ συνθέντι, ὡς ἡ ΝΛ πρὸς ΛΡ, οὕτως ἡ ΘΒ πρὸς ΒΠ. Ἀλλὰ καί, ὡς ἡ ΡΛ πρὸς ΛΜ, οὕτως ἡ ΒΠ πρὸς ΓΒ [ὅμοια γὰρ τὰ τρίγωνα]· ὡς ἄρα ἡ ΝΛ πρὸς ΛΜ, τουτέστι πρὸς ΕΖ, οὕτως ἡ ΘΒ πρὸς ΒΓ. Καὶ ἐναλλάξ· λόγος δὲ τῆς ΕΖ πρὸς ΒΓ δοθείς· δοθεῖσα γὰρ ἑκατέρα· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΛΝ πρὸς ΒΘ δοθείς. Καί ἐστι δοθεῖσα ἡ ΒΘ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΛΝ· ὥστε ἄρα καὶ ἡ σφαῖρα δοθεῖσά ἐστιν.

Συντεθήσεται δὴ οὕτως· ἔστω τὰ δοθέντα δύο τμήματα σφαίρας τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὸ μὲν ΑΒΓ, ᾧ δεῖ ὅμοιον, τὸ δὲ

1 τμῆμα B : om. CDEGH ‖ 20 ΒΠ ms. B : ΘΠ mss. CDEGH ‖ 23 δοθείς add. B ‖ 24 δοθείς add. B.

étant celui auquel le segment cherché doit être semblable, ΔEZ celui dont la surface doit être égale à la surface du segment cherché ; mêmes constructions que dans l'analyse ; faisons que BΓ soit à EZ comme BΘ est à ΛN ; autour de ΛN comme diamètre décrivons un cercle ; imaginons une sphère ayant pour grand cercle le cercle ΛKNM ; coupons NΛ en P de façon que ΘΠ soit à ΠB comme NP est à PΛ[1] ; coupons la surface par un plan passant par P et perpendiculaire à ΛN, et menons ΛM ; les segments de cercle sur les cordes KM et AΓ sont ainsi semblables, de façon que les segments des sphères sont aussi semblables. Et puisque ΘB est à BΠ comme NΛ est à ΛP, aussi par décomposition[2], et que, de plus, ΠB est à BΓ comme PΛ est à ΛM, ΘB est à NΛ comme BΓ est à ΛM. Mais on avait aussi ΘB à ΛN comme BΓ à EZ ; EZ est donc égal à ΛM[3], et par conséquent le cercle de rayon EZ est égal au cercle de rayon ΛM. Et le cercle ayant pour rayon EZ est équivalent à la surface du segment ΔEZ, et le cercle de rayon ΛM est équivalent à la surface du segment KΛM ; car ceci a été démontré dans le premier livre[4] ; il s'ensuit que la surface du segment KΛM est à son tour égale à la surface du segment de sphère ΔEZ ; de plus, le segment KΛM est semblable au segment ABΓ.

7.

Découper d'une sphère donnée, par un plan, un segment, de manière que le segment ait un rapport donné au cône ayant même base que le segment et une hauteur égale.

1. Cf. Eucl. VI, 10.
2. Cf. Eucl. V, 18.
3. Cf. Eucl. V, 9.
4. Cf. prop. I, 42 et 43.

ΔΕΖ, οὗ τὴν ἐπιφάνειαν ἴσην ἔχειν τῇ ἐπιφανείᾳ, καὶ τὰ αὐτὰ κατεσκευάσθω τοῖς ἐπὶ τῆς ἀναλύσεως, καὶ πεποιήσθω, ὡς [μὲν] ἡ ΒΓ πρὸς ΕΖ, οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς ΛΝ, καὶ περὶ διάμετρον τὴν ΛΝ κύκλος γεγράφθω, καὶ νοείσθω σφαῖρα, ἧς μέγιστος ἔστω κύκλος ὁ ΛΚΝΜ, καὶ τετμήσθω ἡ ΝΛ κατὰ τὸ Ρ, ὥστε εἶναι, ὡς τὴν ΘΠ πρὸς ΠΒ, τὴν ΝΡ πρὸς ΡΛ, καὶ διὰ τοῦ Ρ ἐπιπέδῳ τετμήσθω ἡ ἐπιφάνεια ὀρθῷ πρὸς τὴν ΛΝ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΛΜ· ὅμοια ἄρα ἐστὶν τὰ ἐπὶ τῶν ΚΜ, ΑΓ εὐθειῶν τῶν κύκλων τμήματα· ὥστε καὶ τὰ τμήματα τῶν σφαιρῶν ἐστιν ὅμοια. Καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΘΒ πρὸς ΒΠ, οὕτως ἡ ΝΛ πρὸς ΛΡ· καὶ γὰρ τὰ κατὰ διαίρεσιν· ἀλλὰ καί, ὡς ἡ ΠΒ πρὸς ΒΓ, οὕτως ἡ ΡΛ πρὸς ΛΜ, καὶ ὡς ἄρα ἡ ΘΒ πρὸς ΝΛ, ἡ ΒΓ πρὸς ΛΜ. Ἦν δὲ καί, ὥς ἡ ΘΒ πρὸς ΛΝ, ἡ ΒΓ πρὸς ΕΖ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΛΜ· ὥστε καὶ ὁ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶν ἡ ΕΖ, ἴσος ἐστὶ τῷ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ΛΜ. Καὶ ὁ μὲν τὴν ἐκ τοῦ κέντρου ἔχων τὴν ΕΖ κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΔΕΖ τμήματος, ὁ δὲ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ΛΜ, ἴσος ἐστὶ ἐπιφανείᾳ τῇ τοῦ ΚΛΜ τμήματος· τοῦτο γὰρ ἐν τῷ πρώτῳ δέδεικται· ἴση ἄρα καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ΚΛΜ τμήματος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΔΕΖ τμήματος τῆς σφαίρας. Καί ἐστιν ὅμοιον τὸ ΚΛΜ τῷ ΑΒΓ.

ζ'.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης σφαίρας τμῆμα τεμεῖν ἐπιπέδῳ, ὥστε τὸ τμῆμα πρὸς τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι καὶ ὕψος ἴσον τὸν δοθέντα λόγον ἔχειν.

3 μὲν del. Heiberg ‖ 8 ΛΝ mss. BG : ΑΝ mss. CDEH ‖ ΛΜ mss. BG : ΑΜ mss. CDEH ‖ 16-17 τῷ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ add. B ‖ 22 τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΔΕΖ τμήματος add. B ‖ 23 καί ἐστιν ὅμοιον τὸ ΚΛΜ τῷ ΑΒΓ add. Basil. ‖ 26 τὸν alt. Heiberg : τὴν DEGH.

Soit la sphère donnée, ΑΒΓΔ un grand cercle, et ΒΔ un diamètre ; il faut donc couper la sphère par un plan passant par ΑΓ de manière que le segment ΑΒΓ de la sphère ait au cône ΑΒΓ un rapport égal au rapport donné.

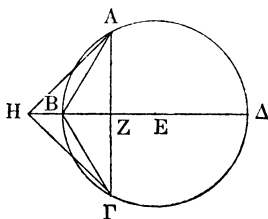


Fig. 55.

Que la construction soit faite ; soit E le centre de la sphère ; que la somme de ΕΔ et ΔΖ soit à ΔΖ comme ΗΖ est à ΖΒ ; le cône ΑΓΗ est donc équivalent[1] au segment ΑΒΓ. Le rapport du cône ΑΗΓ au cône ΑΒΓ est donc aussi donné[2] ; il s'ensuit que le rapport de ΗΖ à ΖΒ est donné. Mais ΗΖ est à ΖΒ comme la somme de ΕΔ et ΔΖ est à ΔΖ ; le rapport de la somme de ΕΔ et ΔΖ à ΔΖ est donc donné, et par conséquent aussi celui de ΕΔ à ΔΖ, ce qui fait que ΔΖ est aussi donné, et donc aussi ΑΓ. Puisque, d'autre part, le rapport de la somme de ΕΔ et ΔΖ à ΔΖ est supérieur au rapport de la somme de ΕΔ et ΔΖ à ΔΒ, et que la somme de ΕΔ et ΔΒ est le triple de ΕΔ, et ΒΔ le double de ΕΔ, le rapport de la somme de ΕΔ et ΔΖ à ΔΖ est supérieur au rapport de trois à deux. De plus, le rapport de la somme de ΕΔ et ΔΖ à ΖΔ est égal au rapport donné ; il faut donc que pour la construction le rapport donné soit supérieur au rapport de trois à deux.

Le problème sera donc composé ainsi : soit la sphère donnée, ΑΒΓΔ un grand cercle, ΒΔ un diamètre, E

1. Cf. prop. II, 2.
2. Cf. I, lemme 1.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα σφαῖρα, ἧς μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτῆς ἡ ΒΔ· δεῖ δὴ τὴν σφαῖραν ἐπιπέδῳ τεμεῖν τῷ διὰ τῆς ΑΓ, ὅπως τὸ ΑΒΓ τμῆμα τῆς σφαίρας πρὸς τὸν ΑΒΓ κῶνον λόγον ἔχῃ τὸν αὐτὸν τῷ δοθέντι.

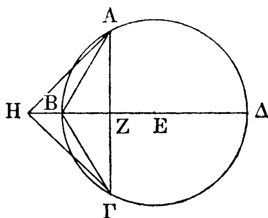


Fig. 55.

Γεγονέτω, καὶ ἔστω κέντρον τῆς σφαίρας τὸ Ε, καὶ ὡς συναμφότερος ἡ ΕΔΖ πρὸς ΔΖ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς ΖΒ· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΓΗ κῶνος τῷ ΑΒΓ τμήματι. Λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΑΗΓ κώνου πρὸς τὸν ΑΒΓ κῶνον δοθείς· λόγος ἄρα τῆς ΗΖ πρὸς ΖΒ δοθείς. Ὡς δὲ ἡ ΗΖ πρὸς ΖΒ, συναμφότερος ἡ ΕΔΖ πρὸς ΔΖ· λόγος ἄρα συναμφοτέρου τῆς ΕΔΖ πρὸς ΔΖ δοθείς [ὥστε καὶ τῆς ΕΔ πρὸς ΔΖ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΔΖ]· ὥστε καὶ ἡ ΑΓ. Καὶ ἐπεὶ συναμφότερος ἡ ΕΔΖ πρὸς ΔΖ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ συναμφότερος ἡ ΕΔΒ πρὸς ΔΒ, καί ἐστιν συναμφότερος μὲν ἡ ΕΔΒ τρὶς ἡ ΕΔ, ἡ δὲ ΒΔ δὶς ἡ ΕΔ, συναμφότερος ἄρα ἡ ΕΔΖ πρὸς ΔΖ μείζονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει τρία πρὸς δύο. Καί ἐστιν ὁ συναμφοτέρου τῆς ΕΔΖ πρὸς ΖΔ λόγος ὁ αὐτὸς τῷ δοθέντι· δεῖ ἄρα τὸν διδόμενον λόγον εἰς τὴν σύνθεσιν μείζονα εἶναι τοῦ ὃν ἔχει τρία πρὸς δύο.

Συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως· ἔστω ἡ δοθεῖσα σφαῖρα, ἧς μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ ἡ ΒΔ,

15 δὶς **Basil.** : δύο BCDEGH.

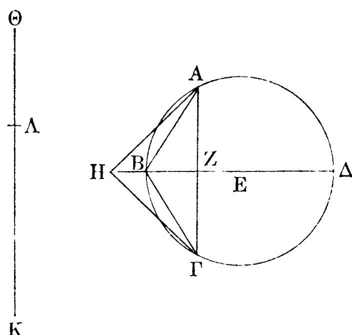


Fig. 56.

le centre ; que le rapport donné de ΘK à KΛ soit supérieur à celui de trois à deux. Or la somme de EΔ et ΔB est à ΔB comme trois est à deux ; il s'ensuit que le rapport de ΘK à KΛ est supérieur au rapport de la somme de EΔ et ΔB à ΔB ; par décomposition, le rapport de ΘΛ à ΛK est donc supérieur au rapport de EΔ à ΔB. Faisons que ΘΛ soit à ΛK comme EΔ est à ΔZ et menons AZΓ par Z perpendiculairement à BΔ ; faisons passer par ΓA un plan perpendiculaire à BΔ ; je dis que le rapport du segment ABΓ de la sphère au cône ABΓ est égal au rapport de ΘK à KΛ.

Faisons, en effet, que la somme de EΔ et ΔZ soit à ΔZ comme HZ est à ZB ; le cône ΓAH est donc équivalent au segment ABΓ de la sphère[1]. Et comme ΘK est à KΛ comme la somme de EΔ et ΔZ est à ΔZ[2], c'est-à-dire comme HZ est à ZB, c'est-à-dire comme le cône AHΓ est au cône ABΓ[3], et que le cône AHΓ est équivalent au segment ABΓ de la sphère, le segment ABΓ est au cône ABΓ comme ΘK est à KΛ.

1. Cf. prop. II, 2.
2. Cf. Eucl. V, 18.
3. Cf. I, lemme 1.

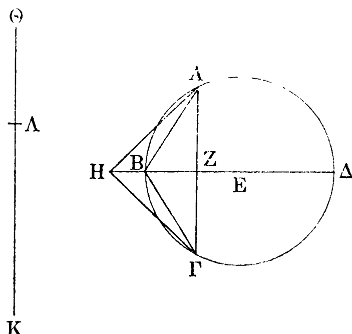


Fig. 56.

κέντρον δὲ τὸ Ε, ὁ δὲ δοθεὶς λόγος ὁ τῆς ΘΚ πρὸς ΚΛ μείζων τοῦ ὃν ἔχει τρία πρὸς δύο. Ἔστι δέ, ὡς τρία πρὸς δύο, συναμφότερος ἡ ΕΔΒ πρὸς ΔΒ · καὶ ἡ ΘΚ ἄρα πρὸς ΚΛ μείζονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει συναμφότερος ἡ ΕΔΒ πρὸς ΔΒ · διελόντι ἄρα ἡ ΘΛ πρὸς ΛΚ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΔ πρὸς ΔΒ. Καὶ πεποιήσθω, ὡς ἡ ΘΛ πρὸς ΛΚ, οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς ΔΖ, καὶ διὰ τοῦ Ζ τῇ ΒΔ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΑΖΓ, καὶ διὰ τῆς ΓΑ ἤχθω ἐπίπεδον ὀρθὸν πρὸς τὴν ΒΔ · λέγω ὅτι τὸ [ἀπὸ] ΑΒΓ τμῆμα τῆς σφαίρας πρὸς τὸν ΑΒΓ κῶνον λόγον ἔχει τὸν αὐτὸν τῷ ΘΚ πρὸς ΚΛ.

Πεποιήσθω γάρ, ὡς συναμφότερος ἡ ΕΔΖ πρὸς ΔΖ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς ΖΒ · ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ΓΑΗ κῶνος τῷ ΑΒΓ τμήματι τῆς σφαίρας. Καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΘΚ πρὸς ΚΛ, οὕτως συναμφότερος ἡ ΕΔΖ πρὸς ΔΖ, τουτέστιν ἡ ΗΖ πρὸς ΖΒ, τουτέστιν ὁ ΑΗΓ κῶνος πρὸς τὸν ΑΒΓ κῶνον, ἴσος δὲ ὁ ΑΗΓ κῶνος τῷ ΑΒΓ τμήματι τῆς σφαίρας, ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τμῆμα πρὸς τὸν ΑΒΓ κῶνον, οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς ΚΛ.

9 ἀπὸ BDEH : del. G ‖ 15 ΑΗΓ mss. BG : ΛΗΓ mss. DEH ‖ 16 τῷ ΑΒΓ add. Basil.

8.

Si une sphère est coupée par un plan ne passant pas par le centre, le rapport du plus grand des segments au plus petit est inférieur au carré du rapport entre la surface du plus grand des segments et la surface du plus petit, et supérieur à la puissance trois demis de ce rapport.

Soit une sphère et dans cette sphère un grand cercle ΑΒΓΔ, diamètre ΒΔ ; coupons la sphère par un plan passant par ΑΓ et perpendiculaire au cercle ΑΒΓΔ ; soit ΑΒΓ le plus grand des segments de la sphère ; je dis que le rapport du segment ΑΒΓ au segment ΑΔΓ est inférieur au carré du rapport entre la surface du plus grand des segments et la surface du plus petit, et supérieur à la puissance trois demis de ce rapport.

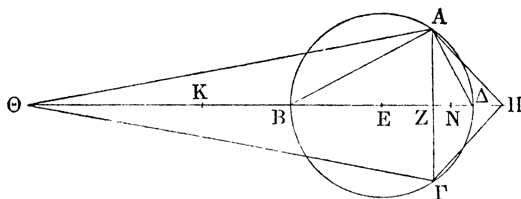


Fig. 57.

Menons les cordes ΑΒ et ΑΔ ; soit Ε le centre ; faisons que la somme de ΕΔ et ΔΖ soit à ΔΖ comme ΘΖ est à ΖΒ, et que la somme de ΕΒ et ΒΖ soit à ΒΖ comme ΗΖ est à ΖΔ, et imaginons des cônes ayant pour base le cercle de diamètre ΑΓ et pour sommets les points Θ et Η ; dès lors, le cône ΑΘΓ sera équivalent au segment ΑΒΓ de la sphère[1] et le cône ΑΓΗ équivalent au segment ΑΔΓ, et le carré sur ΒΑ sera au carré sur ΑΔ comme la surface du segment ΑΒΓ est à la surface du

1. Cf. prop. II, 2.

η′.

Ἐὰν σφαῖρα ἐπιπέδῳ τμηθῇ μὴ διὰ τοῦ κέντρου, τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλασσον ἐλάσσονα μὲν λόγον ἔχει ἢ διπλάσιον τοῦ ὃν ἔχει ἡ τοῦ μείζονος τμήματος ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ ἐλάσσονος ἐπιφάνειαν, μείζονα δὲ ἢ ἡμιόλιον.

Ἔστω σφαῖρα καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ καὶ διάμετρος ἡ ΒΔ, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τῆς ΑΓ ὀρθῷ πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τῆς σφαίρας τὸ ΑΒΓ· λέγω ὅτι τὸ ΑΒΓ τμῆμα πρὸς τὸ ΑΔΓ ἐλάσσονα μὲν ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐλάσσονος τμήματος, μείζονα δὲ ἢ ἡμιόλιον.

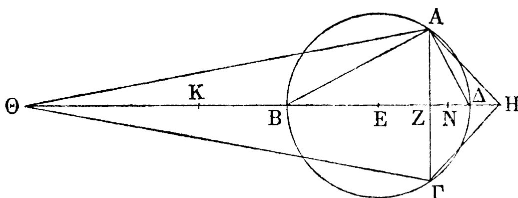


Fig. 57.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΑΔ, καὶ ἔστω κέντρον τὸ Ε, καὶ πεποιήσθω, ὡς μὲν συναμφότερος ἡ ΕΔΖ πρὸς ΔΖ, ἡ ΘΖ πρὸς ΖΒ, ὡς δὲ συναμφότερος ἡ ΕΒΖ πρὸς ΒΖ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς ΖΔ, καὶ νοείσθωσαν κῶνοι βάσιν ἔχοντες τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΑΓ κύκλον, κορυφὰς δὲ τὰ Θ, Η σημεῖα· ἔσται δὴ ἴσος ὁ μὲν ΑΘΓ κῶνος τῷ ΑΒΓ τμήματι τῆς σφαίρας, ὁ δὲ ΑΓΗ τῷ ΑΔΓ, καί ἐστιν, ὡς τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ, οὕτως ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ΑΒΓ τμήματος πρὸς

3 ἔλασσον BG : om. DEH ‖ 9 τὸ tert. Basil. : τὸν DEGH ‖ 20 ἀπὸ B : om. DEGH.

segment ΑΔΓ ; car ceci a été démontré antérieurement[1]. Il faut montrer que le rapport du plus grand des segments de la sphère au plus petit est inférieur au carré du rapport entre la surface du plus grand des segments et la surface du plus petit. Je dis que le rapport du cône ΑΘΓ au cône ΑΗΓ, c'est-à-dire de ΖΘ à ΖΗ[2], est lui aussi inférieur au carré du rapport entre le carré sur ΒΑ et le carré sur ΑΔ, c'est-à-dire entre ΒΖ et ΖΔ. Comme, d'autre part, la somme de ΕΔ et ΔΖ est à ΔΖ comme ΘΖ est à ΖΒ, et que la somme de ΕΒ et ΒΖ est à ΒΖ comme ΖΗ est à ΖΔ, ΒΖ sera à ΖΔ comme ΘΒ est à ΒΕ ; car ΒΕ est égal à ΔΕ, car ceci a été démontré, en passant, plus haut. Puisque, de plus, la somme de ΕΒ et ΒΖ est à ΒΖ comme ΗΖ est à ΖΔ, soit ΒΚ égal à ΒΕ ; il est en effet évident que ΘΒ est plus grand que ΒΕ du moment que, aussi, ΒΖ est plus grand que ΖΔ ; et ΚΖ sera à ΖΒ comme ΗΖ est à ΖΔ[3]. Mais on a démontré que ΖΒ est à ΖΔ comme ΘΒ est à ΒΕ ; ΒΕ est donc égal à ΚΒ ; il s'ensuit que ΘΒ est à ΒΚ comme ΚΖ est à ΖΗ. Et puisque le rapport de ΘΖ à ΖΚ est inférieur au rapport de ΘΒ à ΒΚ, et qu'on a démontré que ΘΒ est à ΒΚ comme ΚΖ est à ΖΗ, le rapport de ΘΖ à ΖΚ est inférieur au rapport de ΚΖ à ΖΗ ; il s'ensuit que le rectangle de côtés ΘΖ et ΖΗ est inférieur[4] au carré sur ΖΚ. Par conséquent le rapport du rectangle de côtés ΘΖ et ΖΗ au carré sur ΖΗ, c'est-à-dire de ΖΘ à ΖΗ, est inférieur[5] au rapport du carré sur ΚΖ au carré sur ΖΗ ; mais le rapport du carré sur ΚΖ au carré sur ΖΗ est égal au carré du rapport de ΚΖ à ΖΗ[5] ; le rapport de ΘΖ à ΖΗ est donc inférieur au carré du rapport de ΚΖ à ΖΗ ; le rapport de ΚΖ à ΖΗ est inférieur au carré du rapport de ΒΖ à ΖΔ ; c'est là ce que nous cherchions. Et comme ΒΕ est égal à ΕΔ, le rectangle de côtés ΒΖ et ΖΔ est inférieur[5]

1. Cf. prop. I, 42 et 43.
2. Cf. I, lemme 1.
3. Du moment que $EB+BZ = BK+BZ = KZ$; cf. Heiberg, I, p. 213.
4. Cf. Eutocius à ce passage.
5. Cf. Eutocius.

τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ΑΔΓ τμήματος· τοῦτο γὰρ προγέγραπται [δεικτέον ὅτι τὸ μεῖζον τμῆμα τῆς σφαίρας πρὸς τὸ ἔλασσον ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ διπλάσιον ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐλάσσονος τμήματος]. Λέγω ὅτι καὶ ὁ ΑΘΓ κῶνος πρὸς τὸν ΑΗΓ, τουτέστιν ἡ ΖΘ πρὸς ΖΗ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ διπλάσιον τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ, τουτέστιν ἡ ΒΖ πρὸς ΖΔ. Καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς [μὲν] συναμφότερος ἡ ΕΔΖ πρὸς ΔΖ, οὕτως ἡ ΘΖ πρὸς ΖΒ [ὡς δὲ συναμφότερος ἡ ΕΒΖ πρὸς ΒΖ, οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς ΖΔ], ἔσται καί, ὡς ἡ ΒΖ πρὸς ΖΔ, ἡ ΘΒ πρὸς ΒΕ· ἴση γὰρ ἡ ΒΕ τῇ ΔΕ [τοῦτο γὰρ ἐν τοῖς ἐπάνω συναποδέδεικται]. Πάλιν, ἐπεί ἐστιν, ὡς συναμφότερος ἡ ΕΒΖ πρὸς ΒΖ, ἡ ΗΖ πρὸς ΖΔ, ἔστω τῇ ΒΕ ἴση ἡ ΒΚ· δῆλον γὰρ ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΘΒ τῆς ΒΕ, ἐπεὶ καὶ ΒΖ τῆς ΖΔ· καὶ ἔσται, ὡς ἡ ΚΖ πρὸς ΖΒ, ἡ ΗΖ πρὸς ΖΔ. Ὡς δὲ ἡ ΖΒ πρὸς ΖΔ, ἐδείχθη ἡ ΘΒ πρὸς ΒΕ, ἴση δὲ ἡ ΒΕ τῇ ΚΒ· ὡς ἄρα ἡ ΘΒ πρὸς ΒΚ, οὕτως ἡ ΚΖ πρὸς ΖΗ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΘΖ πρὸς ΖΚ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΘΒ πρὸς ΒΚ, ὡς δὲ ἡ ΘΒ πρὸς ΒΚ, ἐδείχθη ἡ ΚΖ πρὸς ΖΗ, ἡ ΘΖ ἄρα πρὸς ΖΚ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΚΖ πρὸς ΖΗ· ἔλασσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΘΖΗ τοῦ ἀπὸ ΖΚ. Τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΘΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ [τουτέστιν ἡ ΖΘ πρὸς ΖΗ] ἐλάσσονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ [τὸ δὲ ἀπὸ ΚΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΚΖ πρὸς ΖΗ]· ἡ ἄρα ΘΖ πρὸς ΖΗ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ διπλασίονα τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΚΖ πρὸς ΖΗ [ἡ ΚΖ πρὸς ΖΗ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ διπλασίονα τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΒΖ πρὸς ΖΔ]· τοῦτο δὲ ἐζητοῦμεν. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΔ, ἔλασσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΒΖΔ τοῦ ὑπὸ

au rectangle de côtés BE et EΔ ; le rapport de ZB à BE est donc inférieur au rapport de EΔ à ΔZ, c'est-à-dire de ΘB à BZ ; le carré sur ZB est donc inférieur au rectangle de côtés ΘB et BE, c'est-à-dire au rectangle de côtés ΘB et BK. Que le carré sur BN soit équivalent au rectangle de côtés ΘB et BK ; ΘB est donc à BK comme le carré sur ΘN est au carré sur NK. Mais le rapport du carré sur ΘZ au carré sur ZK est supérieur au rapport du carré sur ΘN au carré sur NK, et par conséquent le rapport du carré sur ΘZ au carré sur ZK est supérieur au rapport de ΘB à BK, c'est-à-dire de ΘB à BE, c'est-à-dire de KZ à ZH ; le rapport de ΘZ à ZH est donc supérieur[1] à la puissance trois demis du rapport de KZ à ZH, ce qui sera démontré à la fin. De plus, ΘZ est à ZH comme le cône AΘΓ est au cône AHΓ, c'est-à-dire comme le segment ABΓ est au segment AΔΓ ; mais KZ est à ZH comme BZ est à ZΔ, c'est-à-dire comme le carré sur BA est au carré sur AΔ, c'est-à-dire comme la surface du segment ABΓ est à la surface du segment AΔΓ ; ainsi le plus grand des segments a au plus petit un rapport inférieur au carré du rapport entre la surface du plus grand des segments et la surface du plus petit, et supérieur à la puissance trois demis de ce rapport.

Autre démonstration.

Soit une sphère et dans cette sphère un grand cercle ABΓΔ ; soit AΓ le diamètre, E le centre ; coupons la sphère par un plan perpendiculaire à AΓ et passant par BΔ ; je dis que le rapport du plus grand des segments, ΔAB, au plus petit segment, BΓΔ, est inférieur au carré du rapport entre la surface du segment ABΔ et la surface du segment BΓΔ, et supérieur à la puissance trois demis de ce rapport.

Menons AB et BΓ ; or le rapport de la surface à la surface est celui du cercle de rayon AB au cercle de

1. Cf. Eutocius.

τῶν ΒΕΔ· ἡ ΖΒ ἄρα πρὸς ΒΕ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΔ πρὸς ΔΖ, τουτέστιν ἡ ΘΒ πρὸς ΒΖ· ἔλασσον ἄρα τὸ ἀπὸ ΖΒ τοῦ ὑπὸ τῶν ΘΒΕ, τουτέστι τοῦ ὑπὸ τῶν ΘΒΚ. Ἔστω ἴσον τὸ ἀπὸ ΒΝ τῷ ὑπὸ ΘΒΚ· ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΘΒ πρὸς ΒΚ, τὸ ἀπὸ ΘΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΚ. Τὸ δὲ ἀπὸ ΘΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΚ μείζονα λόγον ἔχει ἢ τὸ ἀπὸ ΘΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΚ [καὶ τὸ ἀπὸ ΘΖ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΚ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΘΒ πρὸς ΒΚ, τουτέστιν ἡ ΘΒ πρὸς ΒΕ, τουτέστιν ἡ ΚΖ πρὸς ΖΗ]· ἡ ἄρα ΘΖ πρὸς ΖΗ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ἡμιόλιον τοῦ τῆς ΚΖ πρὸς ΖΗ [τοῦτο γὰρ ἐπὶ τέλει]. Καί ἐστιν, ὡς μὲν ἡ ΘΖ πρὸς ΖΗ, ὁ ΑΘΓ κῶνος πρὸς τὸν ΑΗΓ κῶνον, τουτέστι τὸ ΑΒΓ τμῆμα πρὸς τὸ ΑΔΓ τμῆμα, ὡς δὲ ἡ ΚΖ πρὸς ΖΗ, ἡ ΒΖ πρὸς ΖΔ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ, τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ΑΒΓ τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ΑΔΓ τμήματος· ὥστε τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλασσον ἐλάσσονα μὲν ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐλάσσονος τμήματος, μείζονα δὲ ἢ ἡμιόλιον.

ΑΛΛΩΣ.

Ἔστω σφαῖρα, ἐν ᾗ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ ἡ ΑΓ, κέντρον δὲ τὸ Ε, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ ὀρθῷ διὰ τῆς ΒΔ πρὸς τὴν ΑΓ· λέγω ὅτι τὸ μεῖζον τμῆμα τὸ ΔΑΒ πρὸς τὸ ἔλασσον τὸ ΒΓΔ ἐλάσσονα ἢ διπλάσιον λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ΑΒΔ τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ΒΓΔ τμήματος, μείζονα δὲ ἢ ἡμιόλιον.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΒ, ΒΓ· ὁ δὲ τῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν λόγος ὁ τοῦ κύκλου ἐστίν, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἡ ΑΒ, πρὸς τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου

6 ἀπὸ tert. B : om. DEGH ‖ 16 ὥστε B : ἀλλ' ὅτε DEGH.

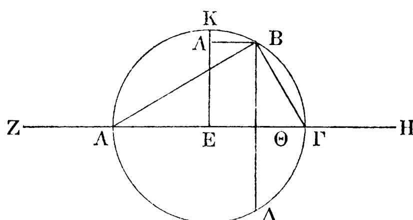


Fig. 58.

rayon BΓ[1], c'est-à-dire celui de AΘ à ΘΓ. Soient AZ et ΓH deux segments de droite égaux chacun au rayon du cercle. Dès lors, le rapport du segment BAΔ au segment BΓΔ est composé du rapport entre le segment BAΔ et le cône ayant pour base le cercle de diamètre BΔ et pour sommet le point A, du rapport entre le même cône et le cône ayant la même base et pour sommet le point Γ, et du rapport entre le cône indiqué (sc. en dernier lieu) et le segment BΓΔ. Mais le rapport du segment BAΔ au cône BAΔ est celui de HΘ à ΘΓ[2], le rapport du cône au cône est celui de AΘ à ΘΓ[3], et le rapport du cône BΓΔ au segment BΓΔ est celui de AΘ à ΘZ[4] ; or le rapport composé du rapport de HΘ à ΘΓ et du rapport de AΘ à ΘΓ est le rapport du rectangle de côtés HΘ et ΘA au carré sur ΘΓ, le rapport composé du rapport du rectangle de côtés HΘ et ΘA au carré sur ΘΓ et du rapport de AΘ à ΘZ est celui du produit du rectangle de côtés HΘ et ΘA par ΘA au produit du carré sur ΘΓ par ΘZ, où le produit du rectangle de côtés HΘ et ΘA par ΘA est égal au produit du carré sur ΘA par ΘH ; (sc. il faut) donc (sc. démontrer) que le rapport du produit du carré sur ΘA par ΘH au produit du carré sur ΓΘ par ΘZ est inférieur au carré du rapport de AΘ à ΘΓ, et le rapport du carré sur AΘ au carré sur ΘΓ est égal au carré du rapport de

1. Cf. prop. I, 42 et 43.
2. Cf. prop. II, 2.
3. Cf. I, lemme 1.
4. Cf. II, 2, coroll. et Eucl. V, 7, coroll.

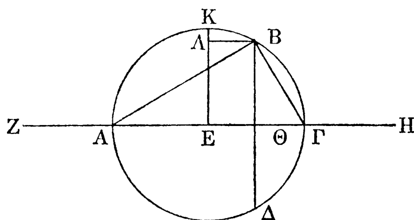


Fig. 58.

ἡ ΒΓ, τουτέστιν ὁ τῆς ΑΘ πρὸς τὴν ΘΓ. Κείσθω τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἴση ἑκατέρα τῶν ΑΖ, ΓΗ. Ὁ δὴ τοῦ ΒΑΔ τμήματος πρὸς τὸ ΒΓΔ λόγος συνῆπται ἐκ τοῦ ὃν ἔχει τὸ ΒΑΔ τμῆμα πρὸς τὸν κῶνον, οὗ [ἡ] βάσις μέν ἐστιν ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον, καὶ ὁ αὐτὸς κῶνος πρὸς τὸν κῶνον τὸν βάσιν μὲν ἔχοντα τὴν αὐτήν, κορυφὴν δὲ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ὁ εἰρημένος κῶνος πρὸς τὸ ΒΓΔ τμῆμα. Ἀλλ' ὁ μὲν τοῦ ΒΑΔ τμήματος λόγος πρὸς τὸν ΒΑΔ κῶνον ὁ τῆς ΗΘ ἐστὶ πρὸς ΘΓ, ὁ δὲ τοῦ κώνου πρὸς τὸν κῶνον ὁ τῆς ΑΘ πρὸς ΘΓ, ὁ δὲ τοῦ ΒΓΔ κώνου πρὸς τὸ τμῆμα τὸ ΒΓΔ ὁ τῆς ΑΘ ἐστὶ πρὸς ΘΖ· ὁ δὲ συνημμένος ἐκ τοῦ τῆς ΗΘ πρὸς ΘΓ καὶ τῆς ΑΘ πρὸς ΘΓ ὁ τοῦ ὑπὸ τῶν ΗΘΑ ἐστὶ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΓ, ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ ΗΘ, ΘΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΓ μετὰ τοῦ τῆς ΑΘ πρὸς ΘΖ ὁ τοῦ ὑπὸ τῶν ΗΘ, ΘΑ ἐστὶν ἐπὶ τὴν ΘΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΓ ἐπὶ τὴν ΘΖ, ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ τῶν ΗΘΑ ἐπὶ τὴν ΘΑ ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς ΘΑ ἐστὶ ἐπὶ τὴν ΘΗ· ὅτι ἄρα τὸ ἀπὸ ΘΑ ἐπὶ τὴν ΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ ἐλάσσονα λόγον ἔχει τοῦ τῆς ΑΘ πρὸς ΘΓ διπλασίου [τοῦ δὲ τῆς ΑΘ πρὸς ΘΓ διπλασίων

1 ἡ ΒΓ ms. B : πρὸς ΗΒΓ mss. DEGH ‖ ΘΓ ms. B : ΑΓ mss. DEGH ‖ 2 δὴ Heiberg : δὲ BDEGH ‖ 9 ΘΓ ms. B : ΗΘ ΘΓ mss. DEGH ‖ 13 τὸ ἀπὸ B, Eutocius : τὴν DEGH ‖ 15 ἐπὶ B Eutocius : πρὸς DEGH ‖ 16 ἐπὶ alt. B Eutocius : πρὸς DEGH ‖ 17 ἐπὶ pr. B Eutocius : πρὸς DEGH ‖ 18 ΘΖ mss. B Eutocius : ΑΖ mss. DEGH ‖ 19 διπλασίου τοῦ δὲ τῆς ΑΘ πρὸς ΘΓ ms. B : om. DEGH.

AΘ à ΘΓ. Il faut donc démontrer que le rapport du produit du carré sur AΘ par ΘH au produit du carré sur ΘΓ par ΘZ est inférieur au rapport entre le produit du carré sur AΘ par ΘH au produit du carré sur ΓΘ par ΘH. Il faut ainsi démontrer que le produit du carré sur ΓΘ par ZΘ est supérieur au produit du carré sur ΓΘ par ΘH, et que ΘZ est plus grand que ΘH.

Je dis donc que le rapport du plus grand des segments au plus petit est lui aussi supérieur à la puissance trois demis du rapport entre les surfaces. Mais on a montré que le rapport des segments est égal au rapport entre le produit du carré sur AΘ par ΘH et le produit du carré sur ΘΓ par ΘZ, et le rapport entre le cube sur AB et le cube sur BΓ est égal à la puissance trois demis du rapport entre les surfaces ; je dis dès lors que le rapport entre le produit du carré sur AΘ par ΘH et le produit du carré sur ΓΘ par ΘZ est supérieur au rapport entre le cube sur AB et le cube sur BΓ, c'est-à-dire entre le cube sur AΘ et le cube sur ΘB, c'est-à-dire il est supérieur au produit du rapport entre le carré sur AΘ et le carré sur BΘ par le rapport de AΘ à ΘB. Or le produit du rapport entre le carré sur AΘ et le carré sur ΘB par le rapport de AΘ à ΘB est égal au rapport du carré sur AΘ au rectangle de côtés ΓΘ et ΘB ; mais le rapport du carré sur AΘ au rectangle de côtés BΘ et ΘΓ est égal au rapport entre le produit du carré sur AΘ par ΘH et le produit du rectangle de côtés BΘ et ΘΓ par ΘH ; je dis donc que le rapport entre le produit du carré sur AΘ par ΘH et le produit du carré sur ΓΘ par ΘZ est supérieur au rapport du carré sur AΘ au rectangle de côtés BΘ et ΘΓ, c'est-à-dire au rapport entre le produit du carré sur AΘ par ΘH et le produit du rectangle de côtés BΘ et ΘΓ par ΘH. Dès lors, il faut montrer que le produit du carré sur ΘΓ par ΘZ est inférieur au produit du rectangle de côtés BΘ et ΘΓ par HΘ, ce qui revient à montrer que le rapport du carré sur ΓΘ au rectangle de côtés BΘ et ΘΓ est inférieur au rapport de HΘ à ΘZ ; il faut donc montrer que le rapport de HΘ à ΘZ est supérieur au rapport de ΓΘ à ΘB.

ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΓ]. Τὸ ἄρα ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΗΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΓ ἐπὶ τὴν ΘΖ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΗΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ. Ὅτι ἄρα μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΖΘ τοῦ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ. Ὅτι ἄρα μείζων ἐστὶν ἡ ΘΖ τῆς ΘΗ.

Φημὶ δὴ ὅτι καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλασσον μείζονα λόγον ἔχει ἢ ἡμιόλιον τοῦ τῆς ἐπιφανείας λόγου. Ἀλλ' ὁ μὲν τῶν τμημάτων ἐδείχθη ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΓ ἐπὶ τὴν ΘΖ, τοῦ δὲ τῆς ἐπιφανείας λόγου ἡμιόλιός ἐστιν ὁ τοῦ ἀπὸ ΑΒ κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ ΒΓ κύβον· φημὶ δὴ ὅτι τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ [ὁ ἀπὸ τῆς ΑΒ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΒΓ κύβον, τουτέστιν] ὁ ἀπὸ τῆς ΑΘ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ ΘΒ κύβον, τουτέστιν ὁ τοῦ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΘ καὶ ὁ τῆς ΑΘ πρὸς ΘΒ. Ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΒ προσλαβὼν τὸν τῆς ΑΘ πρὸς ΘΒ ὁ τοῦ ἀπὸ ΑΘ ἐστὶν πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΘΒ· ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΘΓ ὁ τοῦ ἀπὸ ΑΘ ἐστὶν ἐπὶ τὴν ΘΗ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΘΓ ἐπὶ τὴν ΘΗ· φημὶ δὴ ὅτι [ἄρα] τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ [τὸ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΘΓ, τουτέστι] τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΘΓ ἐπὶ τὴν ΘΗ. Δεικτέον οὖν ὅτι τὸ ἀπὸ ΘΓ ἐπὶ τὴν ΘΖ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΘΓ ἐπὶ τὴν ΗΘ· ὃ ταὐτόν ἐστι τῷ δεῖξαι ὅτι τὸ ἀπὸ ΓΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΘΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΗΘ πρὸς ΘΖ [δεῖ ἄρα δεῖξαι ὅτι ἡ ΗΘ πρὸς ΘΖ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΘ πρὸς ΘΒ].

2-3 ἐλάσσονα — ΘΗ ms. B Eutocius : om. DEGH ‖ 4 μεῖζόν H : μείζων DEG ‖ 10 κύβου BG Eutocius : κύκλου DEH ‖ 11 κύβον BG Eutocius : κύκλον DEH ‖ τὸ pr. B Eutocius : τοῦ DEGH ‖ 13 ἀπὸ alt. Eutocius : om. BDEGH ‖ 14 ἀπὸ alt. B Eutocius : om. DEGH ‖ 21 ὑπὸ Torellius : ἀπὸ B DEGH.

Élevons en E la perpendiculaire EK à EΓ et abaissons sur EK, du point B, la perpendiculaire BΛ ; il nous reste à montrer que le rapport de HΘ à ΘZ est supérieur au rapport de ΓΘ à ΘB. Or ΘZ est égal à la somme de AΘ et de KE ; il faut donc montrer que le rapport de HΘ à la somme de ΘA et KE est supérieur au rapport de ΓΘ à ΘB ; par conséquent ΓΘ étant retranché de ΘH et EΛ, qui est égal à BΘ, de KE, il faudra montrer que le rapport du reste ΓH à la somme restante de AΘ et KΛ est supérieur au rapport de ΓΘ à ΘB, c'est-à-dire de ΘB à ΘA, c'est-à-dire de ΛE à ΘA et, par permutation, que le rapport de KE à EΛ est supérieur au rapport de la somme de KΛ et ΘA à ΘA, et, par décomposition, que le rapport de KΛ à ΛE est supérieur au rapport de KΛ à ΘA. (Sc. il faut, enfin, démontrer) que ΛE est inférieur à ΘA[1].

9.

De tous les segments de sphères limités par la même surface le plus grand est l'hémisphère.

Soit dans une sphère un grand cercle ABΓΔ de diamètre AΓ ; soit une autre sphère, dont EZHΘ est un grand cercle de diamètre EH ; coupons l'une des deux sphères par un plan passant par le centre, l'autre par un plan ne passant pas par le centre ; que les plans sécants soient perpendiculaires aux diamètres AΓ et EH, et qu'ils coupent (sc. les cercles) suivant les segments de droite ΔB et ZΘ ; dès lors, le segment de sphère marqué par l'arc ZEΘ est un hémisphère ; quant aux sections marquées par l'arc BAΔ, dans l'une des deux figures, désignée par σ, le segment est supérieur à l'hémisphère, dans l'autre il est inférieur

1. Cf. Eucl. V, 10. Cette seconde démonstration de la proposition 8, incomplète, rendue verbeuse par la transcription d'un copiste incompétent, a été conservée sous une forme plus authentique par Eutocius.

Ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ε τῇ ΕΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΕΚ καὶ ἀπὸ τοῦ Β κάθετος ἐπ' αὐτὴν ἡ ΒΛ· ἐπίλοιπον ἡμῖν δεῖξαι δεῖ ὅτι ἡ ΗΘ πρὸς ΘΖ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΘ πρὸς ΘΒ. Ἴση δέ ἐστιν ἡ ΘΖ συναμφοτέρῳ τῇ ΑΘ, ΚΕ· δεῖξαι ἄρα δεῖ ὅτι ἡ ΗΘ πρὸς συναμφότερον τὴν ΘΑ, ΚΕ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΘ πρὸς ΘΒ· καὶ ἀφαιρεθείσης ἄρα ἀπὸ τῆς ΘΗ τῆς ΓΘ, ἀπὸ δὲ τῆς ΚΕ τῆς ΕΛ ἴσης τῇ ΒΘ, δεήσει δειχθῆναι ὅτι λοιπὴ ἡ ΓΗ πρὸς λοιπὴν συναμφότερον τὴν ΑΘ, ΚΛ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΘ πρὸς ΘΒ, τουτέστιν ἡ ΘΒ πρὸς ΘΑ, τουτέστιν ἡ ΛΕ πρὸς ΘΑ, καὶ ἐναλλάξ, ὅτι ἡ ΚΕ πρὸς ΕΛ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ συναμφότερος ἡ ΚΛ, ΘΑ πρὸς ΘΑ, καὶ διελόντι ἡ ΚΛ πρὸς ΛΕ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΚΛ πρὸς ΘΑ. Ὅτι ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΛΕ τῆς ΘΑ.

θ'.

Τῶν τῇ ἴσῃ ἐπιφανείᾳ περιεχομένων σφαιρικῶν τμημάτων μεῖζόν ἐστι τὸ ἡμισφαίριον.

Ἔστω ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ, καὶ ἄλλη σφαῖρα, ἧς μέγιστος κύκλος ὁ ΕΖΗΘ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΕΗ, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ ἡ μὲν ἑτέρα σφαῖρα διὰ τοῦ κέντρου, ἡ δὲ ἑτέρα μὴ διὰ τοῦ κέντρου, ἔστω δὲ τὰ μὲν τέμνοντα ἐπίπεδα ὀρθὰ πρὸς τὰς ΑΓ, ΕΗ διαμέτρους, καὶ τετμήσθωσαν κατὰ τὰς ΔΒ, ΖΘ γραμμάς· ἔστιν δὴ τὸ μὲν κατὰ τὴν ΖΕΘ περιφέρειαν τμῆμα τῆς σφαίρας ἡμισφαίριον [τῶν δὲ κατὰ τὴν ΒΑΔ περιφέρειαν τομῶν ἐν μὲν τῷ ἑτέρῳ σχήματι, πρὸς ὃ τὸ ♂ σημεῖον, μεῖζον ἡμισφαιρίου, ἐν δὲ τῷ ἑτέρῳ ἔλασσον

1-2 Ε — τοῦ Β Eutocius : om. DEGH ‖ 2 ΒΛ ms. Β Eutocius : ΒΔ mss. DEGH ‖ ἡμῖν Β Eutocius : μεῖναι DEGH ‖ δεῖ ὅτι Β Eutocius : διότι DEGH ‖ 5 δεῖ ὅτι ΒΗ : διότι DEG ‖ 12 ΘΑ alt. Β Eutocius : ΘΛ mss. DEGH ‖ 25 τομῶν DEGH : τμημάτων Β.

à l'hémisphère ; mais que les surfaces des segments indiqués soient équivalentes ; je dis donc que l'hémisphère marqué par l'arc ZEΘ est supérieur au segment marqué par l'arc BAΔ.

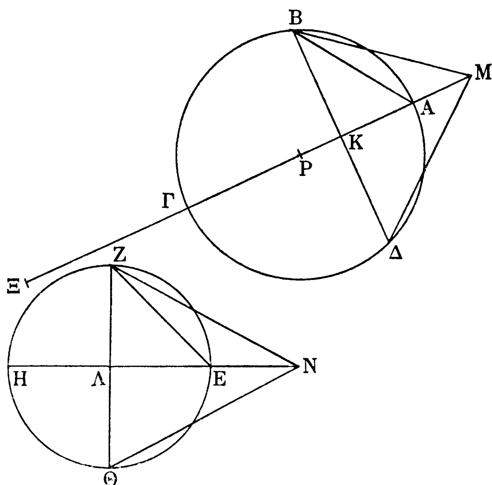


Fig. 59.

Puisque, en effet, les surfaces des segments indiqués sont équivalentes, il est évident que le segment de droite BA est égal à EZ ; car on a démontré[1] que la surface de chaque segment est équivalente au cercle, dont le rayon est égal à la corde menée du sommet du segment à un point de la périphérie du cercle de base du segment, et cela même si l'arc BAΔ, dans la figure désignée par σ, est supérieur à un demi-cercle[2]. Mais il est évident

1. Cf. prop. I, 42 et 43.

2. Par la comparaison du texte de cette proposition avec le commentaire d'Eutocius, Heiberg a montré qu'une certaine confusion a été introduite dans la démonstration par l'intervention d'un copiste qui a doublé, inutilement, le raisonnement d'Archimède, fondé sur une seule figure, celle qui correspond au cas du segment sphérique supérieur à l'hémisphère, d'un raisonnement et d'une figure correspondant au cas du segment inférieur à l'hémisphère. Cf. Heiberg, I, p. 225.

ἡμισφαιρίου], ἴσαι δὲ ἔστωσαν αἱ τῶν εἰρημένων τμημάτων ἐπιφάνειαι· λέγω οὖν ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ κατὰ τὴν ΖΕΘ περιφέρειαν ἡμισφαίριον τοῦ κατὰ τὴν ΒΑΔ περιφέρειαν τμήματος.

Fig. 59.

Ἐπεὶ γὰρ ἴσαι εἰσὶν αἱ ἐπιφάνειαι τῶν εἰρημένων τμημάτων, φανερὸν ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΒΑ τῇ ΕΖ εὐθείᾳ [δέδεικται γὰρ ἑκάστου τμήματος ἡ ἐπιφάνεια ἴση οὖσα κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος εὐθείᾳ ἀγομένῃ ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος. Καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡμίσεως κύκλου ἡ ΒΑΔ περιφέρεια ἐν τῷ ἑτέρῳ τμήματι, πρὸς ὃ τὸ ϭ σημεῖον]· δῆλον δὲ ὅτι ἡ ΒΑ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλασίων δυνάμει τῆς ΑΚ, τῆς δὲ ἐκ τοῦ κέντρου μείζων

1-2 αἱ τῶν εἰρημένων τμημάτων ἐπιφάνειαι· λέγω οὖν add. Basil. ‖ 9 ὅς G : ὅ DEH.

que le carré sur BA est inférieur au double du carré sur AK et supérieur au double du carré sur le rayon. Que le carré sur BA soit donc égal au double du carré sur AP ; que ΓΞ soit égal au rayon du cercle ABΔ, et que le rapport de ΓΞ à ΓK soit égal au rapport de MA à AK ; sur le cercle de diamètre BΔ construisons un cône ayant pour sommet le point M ; ce cône est donc

Fig. 60.

équivalent au segment de sphère marqué par l'arc BAΔ[1]. Soit, de plus, EΛ égal à EN ; sur le cercle de diamètre ΘZ construisons un cône ayant pour sommet le point N ; ce cône est donc à son tour équivalent à l'hémisphère marqué par (sc. la demi-circonférence) ΘEZ. Or le rectangle de côtés AP et PΓ est supérieur au rectangle de côtés AK et KΓ, parce que son plus petit côté est supérieur au plus petit côté de l'autre rectangle, et le carré sur AP est équivalent au rectangle de côtés AK et ΓΞ ; car il est équivalent à la moitié du carré sur AB ; il s'ensuit que la somme (sc. du premier rectangle et du carré sur AP) est elle aussi supérieure à la somme (sc. du second rectangle et du rectangle de côtés AK et ΓΞ) et que le rectangle de côtés ΓA et AP est supérieur au rectangle de côtés ΞK et KA. Mais le rectangle de côtés ΞK et KA est équivalent au rectangle de côtés MK et KΓ, de façon que le rectangle de côtés ΓA et AP est supérieur au rectangle de côtés MK et KΓ ; par conséquent le rapport

1. Cf. prop. II, 2 et Eucl. V, 18.

ἢ διπλασίων δυνάμει. Ἔστω δὴ ἡ ΒΑ τῆς ΑΡ διπλασία δυνάμει, ἔστω δὲ καὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΑΒΔ κύκλου ἴση ἡ ΓΞ, καὶ ὃν ἔχει λόγον ἡ ΓΞ πρὸς τὴν ΓΚ, τοῦτον ἐχέτω ἡ ΜΑ πρὸς ΑΚ, ἀπὸ δὲ τοῦ κύκλου τοῦ περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ κῶνος ἔστω κορυφὴν ἔχων τὸ Μ σημεῖον·

Fig. 60.

ἴσος δή ἐστιν οὗτος τῷ κατὰ τὴν ΒΑΔ περιφέρειαν τμήματι τῆς σφαίρας. Ἔστω καὶ τῇ ΕΛ ἴση ἡ ΕΝ, καὶ ἀπὸ τοῦ κύκλου τοῦ περὶ διάμετρον τὴν ΘΖ κῶνος ἔστω κορυφὴν ἔχων τὸ Ν σημεῖον· ἴσος δὴ καὶ οὗτός ἐστι τῷ κατὰ τὴν ΘΕΖ περιφέρειαν ἡμισφαιρίῳ. Τὸ δὲ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΡΓ μεῖζόν ἐστι τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῶν ΑΚΓ, διότι τὴν ἐλάσσονα πλευρὰν τῆς ἐλάσσονος τοῦ ἑτέρου μείζονα ἔχει, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΡ ἴσον ἐστὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν ΑΚ, ΓΞ· ἥμισυ γάρ ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ· μεῖζον οὖν ἐστι καὶ τὸ συναμφότερον τοῦ συναμφοτέρου [τὸ ἄρα περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΓΑΡ μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ΞΚΑ]. Τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΞΚΑ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΜΚΓ [ὥστε μεῖζόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΓΑΡ τοῦ ὑπὸ τῶν ΜΚΓ]· ὥστε μείζονα λόγον

1-2 ἔστω δὴ ἡ ΒΑ τῆς ΑΡ διπλασία δυνάμει add. B Heiberg || 4 τοῦ alt. add. Heiberg || 10 δὲ B Eutocius : δὴ DEGH || 11 μεῖζόν GH Eutocius : μείζων DE || 13 τὸ BG Eutocius : τῷ DEH || 13-14 ΑΚ, ΓΞ ms. B Eutocius : ΑΞ mss. DEGH || 14 μεῖζον BG Eutocius : μείζων DEH || 17-18 ΜΚΓ ὥστε μεῖζόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν add. Basil.

de ΓA à KΓ est supérieur au rapport de MK à AP. Or le rapport de AΓ à ΓK est égal au rapport du carré sur AB au carré sur BK ; il est donc évident que le rapport entre la moitié du carré sur AB, qui est équivalente au carré sur AP, et le carré sur BK est supérieur au rapport de MK au segment de droite double de AP, soit ΛN ; il s'ensuit que le rapport entre le cercle de diamètre ZΘ et le cercle de diamètre BΔ est supérieur au rapport de MK à NΛ. Par conséquent, le cône ayant pour base le cercle de diamètre ZΘ et pour sommet le point N est supérieur au cône ayant pour base le cercle de diamètre BΔ et pour sommet le point M ; il est donc évident que l'hémisphère marqué par l'arc EZΘ est à son tour supérieur au segment marqué par l'arc BAΔ.

ἔχει ἡ ΓΑ πρὸς [τὴν] ΚΓ ἥπερ ἡ ΜΚ πρὸς [τὴν] ΑΡ. Ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ ΑΓ πρὸς [τὴν] ΓΚ, τοῦτον ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΚ· δῆλον οὖν ὅτι μείζονα λόγον ἔχει τὸ ἥμισυ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ, ὅ ἐστιν ἴσον τῷ ἀπὸ ΑΡ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΚ ἤπερ ἡ ΜΚ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΑΡ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ ΛΝ· μείζονα ἄρα λόγον ἔχει καὶ ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΖΘ πρὸς τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ ἢ ἡ ΜΚ πρὸς [τὴν] ΝΛ. Ὥστε μείζων ἐστὶν ὁ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΖΘ κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ Ν σημεῖον, τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ, κορυφὴν δὲ τὸ Μ σημεῖον· δῆλον οὖν ὅτι καὶ τὸ ἡμισφαίριον τὸ κατὰ τὴν ΕΖΘ περιφέρειαν μεῖζόν ἐστι τοῦ τμήματος τοῦ κατὰ τὴν ΒΑΔ περιφέρειαν.

5 ΑΡ, πρὸς τὸ ἀπὸ add. Basil. ‖ 6 ΛΝ ms. B : ΛΗ mss. DEGH ‖ 8 ΜΚ ms. B : ΗΜΚ mss. DEGH ‖ ΝΛ ms. B : ΜΛ mss. DEGH ‖ 9 μείζων GH : μεῖζον DE ‖ 10 τὴν BG Eutocius : μὲν τὴν DEH ‖ 12 τὴν B Eutocius : μὲν τὴν DEGH.

LA MESURE DU CERCLE

NOTICE

Cet opuscule, qui est probablement un extrait d'un traité plus important d'Archimède sur la quadrature approximative du cercle (E. J. Dijksterhuis), ne comporte que trois propositions. La première a pour fin de démontrer qu'il est possible d'évaluer l'aire d'un cercle de rayon donné, si on en connaît la circonférence. La méthode suivie est le procédé dit « d'exhaustion », inventé par Eudoxe de Cnide et perfectionné par Archimède. Dans la proposition 3, Archimède resserre la circonférence p d'un cercle de diamètre d entre les limites $3\frac{10}{71}$ d et $3\frac{1}{7}$ d,

$$3\frac{10}{71}\,d < p < 3\frac{1}{7}\,d,$$

en considérant la longueur de p comme située entre les périmètres d'un polygone régulier inscrit dans le cercle, — d'un hexagone régulier dans l'occurrence — et du polygone circonscrit correspondant et en doublant progressivement le nombre des côtés des polygones. Il s'arrête aux polygones de 96 côtés. Géométriquement, sa méthode se traduirait aujourd'hui par l'emploi de la formule de récurrence

$$a_{2n} = \frac{Ra_n}{R+\sqrt{R^2+\left(\frac{a_n}{2}\right)^2}}$$

où R est le rayon du cercle et a_n le côté du polygone

régulier circonscrit de n côtés. Dans ses calculs, il se sert, pour certaines racines carrées, de fractions dont nous ignorons le plus souvent s'il s'agit d'évaluations de la main d'Archimède lui-même, ayant figuré dans un de ses traités perdus, ou d'approximations trouvées par d'autres géomètres.

La proposition 2, enfin, se déduit des propositions 1 et 3 par le raisonnement que voici :

$$\frac{\text{aire } A\Gamma Z}{\text{aire } A\Gamma\Delta} = \frac{22}{7},$$

puisque $\Gamma Z = 3\ \Gamma\Delta + \frac{1}{7}\ \Gamma\Delta = \frac{22}{7}\Gamma\Delta.$

Or, puisque

$$\text{aire du carré circonscrit} = 4 \text{ aires } A\Gamma\Delta$$

et

$$\text{aire du cercle} = \text{aire } A\Gamma Z,$$

on a

$$\frac{\text{aire du cercle}}{\text{aire du carré circonscrit}} = \frac{1}{4}.\frac{\text{aire } A\Gamma Z}{\text{aire } A\Gamma\Delta} = \frac{1}{4}.\frac{22}{7} = \frac{11}{14}.$$

Parmi les problèmes posés par le style laconique, les sous-entendus et les prétéritions de ce traité, dont le commentaire d'Eutocius, (cf. vol. III), n'éclaircit qu'une partie, il en est un qui a particulièrement retenu l'attention des historiens des sciences. Au début de la proposition 3, Archimède se sert d'un rapport $\frac{EZ}{Z\Gamma}$ égal, en notations modernes, à $\frac{\sqrt{3}}{1}$, et, au milieu de la démonstration, d'un rapport $\frac{AB}{B\Gamma}$ ayant la même valeur. Dans le premier cas, il pose le rapport égal à $\frac{265}{153}$, dans le second cas, il lui donne la valeur approximative $\frac{1351}{780}$. Différentes réponses ont été données à la question de savoir de quelle manière Archimède est arrivé à ces deux fractions. Mais on est

d'accord pour admettre qu'il a obtenu ces valeurs au moyen de certains procédés d'approximation successive, par l'application de formules de récurrence, à partir de valeurs approchées initiales comme $\sqrt{3} = \frac{5}{3}$. Parmi les travaux consacrés à cette question, citons J. E. Hofmann, *Erklärungsversuche für Archimed's Berechnung von* $\sqrt{3}$, Archiv für Gesch. Math. Nat. Techn. 12, 1930, p. 386-408 ; Kurt Vogel, *Die Näherungswerte des Archimedes für* $\sqrt{3}$, Jahresbericht D.M.V. 41, 1932, p. 155 ; C. Müller, *Wie fand Archimedes die von ihm gegebenen Näherungswerte von* $\sqrt{3}$? Quellen und Studien zur Gesch. der Math., Astr. und Phys., B, II, 1932, p. 281-285 ; Evangelos Stamatis, Γεωμετρικὴ ἀπόδειξις τοῦ ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους ἀριθμητικοῦ ὑπολογισμοῦ τῆς $\sqrt{3}$. ΠΛΑΤΩΝ VII, 1955, p. 305-310.

Le traité *La mesure du cercle* a été édité à part en 1828 par Gutenäcker sous le titre *Archimedes's Kreismessung griechisch und deutsch*, Würzburg 1828, et cet opuscule a été recensé par Wurm, *Fr. Wurmii censura editionis Gutenäckeri*, Jahns Jahrbücher, XIV, p. 175-185.

LA MESURE DU CERCLE

1.

Tout cercle est équivalent à un triangle rectangle dans lequel l'un des côtés de l'angle droit est égal au rayon du cercle et la base (c'est-à-dire l'autre côté de l'angle droit) égale au périmètre du cercle[1].

Que le cercle ΑΒΓΔ soit au triangle E comme l'indique l'hypothèse ; je dis qu'il lui est équivalent.

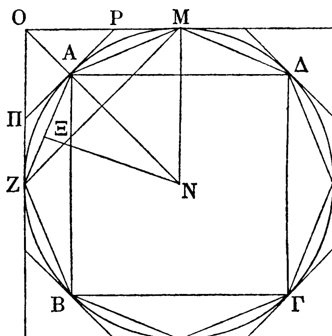


Fig. 61.

Que le cercle soit en effet, si possible, plus grand. Inscrivons-y le carré ΑΓ et divisons en deux parties égales les arcs (sc. admettant comme cordes les côtés du carré) ; que les segments de cercle aient à la fin (sc. si on répète les opérations de division en deux parties égales) une somme inférieure à la différence entre l'aire du cercle et celle du triangle[2]. La figure rectiligne sera donc encore plus grande que le triangle. Prenons le centre N et abaissons la perpendiculaire ΝΞ. ΝΞ sera donc inférieur au (sc. plus petit) côté du triangle.

1 et 2. Cf. les notes complémentaires à la fin de ce volume.

ΚΥΚΛΟΥ ΜΕΤΡΗΣΙΣ

α′.

Πᾶς κύκλος ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ ὀρθογωνίῳ, οὗ ἡ μὲν ἐκ τοῦ κέντρου ἴση μιᾷ τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, ἡ δὲ περίμετρος τῇ βάσει.

Ἐχέτω ὁ ΑΒΓΔ κύκλος τριγώνῳ τῷ Ε, ὡς ὑπόκειται· λέγω ὅτι ἴσος ἐστίν.

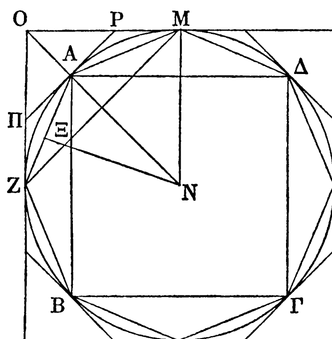


Fig. 61.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω μείζων ὁ κύκλος, καὶ ἐγγεγράφθω τὸ ΑΓ τετράγωνον, καὶ τετμήσθωσαν αἱ περιφέρειαι δίχα, καὶ ἔστω τὰ τμήματα ἤδη ἐλάσσονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ κύκλος τοῦ τριγώνου· τὸ εὐθύγραμμον ἄρα ἔτι τοῦ τριγώνου ἐστὶ μεῖζον. Εἰλήφθω κέντρον τὸ Ν καὶ κάθετος ἡ ΝΞ· ἐλάσσων ἄρα ἡ ΝΞ τῆς τοῦ τριγώνου πλευρᾶς. Ἔστιν δὲ καὶ ἡ περίμετρος τοῦ εὐθυγράμμου τῆς

Mais le périmètre de la figure rectiligne est à son tour plus petit que le côté restant, du moment qu'il est plus petit que le périmètre du cercle[1]. La figure rectiligne est par conséquent plus petite que le triangle E, ce qui est absurde.

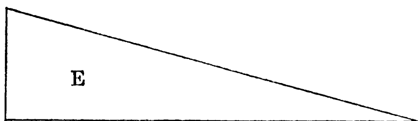


Fig. 62.

Que le cercle soit, d'autre part, plus petit, si possible, que le triangle E ; circonscrivons-lui un carré, divisons les arcs en deux parties égales et menons des tangentes par les points (sc. de division). L'angle OAP est donc droit[2] ; OP est par conséquent supérieur à MP, du moment que PM est égal à PA, et le triangle POΠ est plus grand que la moitié de la figure OZAM[3]. Qu'il reste donc des segments tels que ΠZA, dont la somme soit inférieure à la différence entre l'aire du triangle E et celle du cercle ABΓΔ[4]. La figure rectiligne circonscrite est, par conséquent, encore inférieure au triangle E, ce qui est absurde ; elle est, en effet, plus grande, du moment que NA est égal à la hauteur du triangle, et que le périmètre est plus grand que la base du triangle[5]. Il s'ensuit que le cercle est équivalent au triangle E.

2.

Le cercle a au carré de son diamètre[6] le rapport des deux nombres 11 et 14.

Soit un cercle de diamètre AB ; que le carré ΓH lui soit circonscrit ; que (sc. sur le prolongement de ΓΔ) le segment de droite ΔE soit double du segment ΓΔ, et le segment EZ égal au septième de ΓΔ. Puisque donc le triangle AΓE est au triangle AΓΔ comme 21 est à 7,

1-6. Cf. les notes complémentaires à la fin de ce volume.

λοιπῆς ἐλάττων, ἐπεὶ καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιμέτρου· ἔλαττον ἄρα τὸ εὐθύγραμμον τοῦ Ε τριγώνου· ὅπερ ἄτοπον.

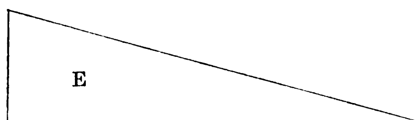


Fig. 62.

Ἔστω δὲ ὁ κύκλος, εἰ δυνατόν, ἐλάσσων τοῦ Ε τριγώνου, καὶ περιγεγράφθω τὸ τετράγωνον, καὶ τετμήσθωσαν αἱ περιφέρειαι δίχα, καὶ ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι διὰ τῶν σημείων· ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΟΑΡ. Ἡ ΟΡ ἄρα τῆς ΜΡ ἐστὶν μείζων· ἡ γὰρ ΡΜ τῇ ΡΑ ἴση ἐστί· καὶ τὸ ΡΟΠ τρίγωνον ἄρα τοῦ ΟΖΑΜ σχήματος μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ. Λελείφθωσαν οἱ τῷ ΠΖΑ τομεῖ ὅμοιοι ἐλάσσους τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει τὸ Ε τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου· ἔτι ἄρα τὸ περιγεγραμμένον εὐθύγραμμον τοῦ Ε ἐστὶν ἔλασσον· ὅπερ ἄτοπον· ἔστιν γὰρ μεῖζον, ὅτι ἡ μὲν ΝΑ ἴση ἐστὶ τῇ καθέτῳ τοῦ τριγώνου, ἡ δὲ περίμετρος μείζων ἐστὶ τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου. Ἴσος ἄρα ὁ κύκλος τῷ Ε τριγώνῳ.

β′.

Ὁ κύκλος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τετράγωνον λόγον ἔχει, ὃν ι̅α̅ πρὸς ι̅δ̅.

Ἔστω κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ περιγεγράφθω τετράγωνον τὸ ΓΗ, καὶ τῆς ΓΔ διπλῆ ἡ ΔΕ, ἕβδομον δὲ ἡ ΕΖ τῆς ΓΔ. Ἐπεὶ οὖν τὸ ΑΓΕ πρὸς τὸ ΑΓΔ λόγον ἔχει, ὃν κ̅α̅ πρὸς ζ̅, πρὸς δὲ τὸ ΑΕΖ τὸ ΑΓΔ λόγον ἔχει, ὃν ἑπτὰ

4 ἐλάσσων BG : μείζων DEH ‖ 8 τῇ BCGH : τῆς DE ‖ 9 μεῖζόν DEGH : μείζων C.

et que, d'autre part, le triangle ΑΓΔ est au triangle ΑΕΖ comme 7 est à 1, le triangle ΑΓΖ est au triangle ΑΓΔ comme 22 est à 7. Mais le carré ΓΗ est quadruple du triangle ΑΓΔ, et le triangle ΑΓΔΖ est équivalent au cercle ΑΒ[1], puisque, d'un côté, la hauteur ΑΓ est égale au rayon de ce cercle et que, d'un autre côté, la base est égale, comme nous le montrerons[2], au triple du

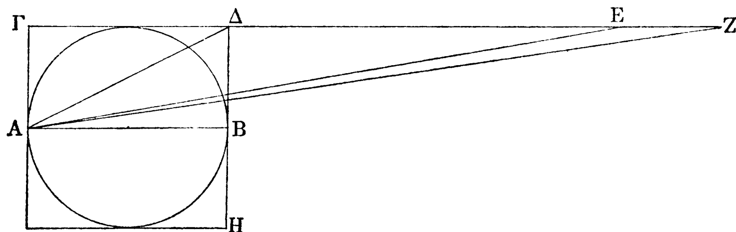


Fig. 63.

diamètre, augmenté d'un segment égal, avec une grande approximation, à son septième. Le cercle a donc au carré ΓΗ le rapport des nombres 11 et 14.

3.

Le périmètre de tout cercle est égal au triple du diamètre, augmenté d'un segment compris entre les dix soixante et onzièmes et le septième du diamètre[3].

Soit un cercle, ΑΓ son diamètre, Ε son centre, ΓΛΖ une tangente ; que l'angle ΖΕΓ soit égal au tiers d'un angle droit ; le rapport de ΕΖ à ΖΓ est donc égal au rapport[4] de 306 à 153, et le rapport de ΕΓ à ΓΖ est égal au rapport de 265 à 153. Bissectons l'angle ΖΕΓ par ΕΗ ; dès lors ΖΕ est à ΕΓ comme ΖΗ est à ΗΓ,

1. Cf. Eucl. V, 7, coroll. ; V, 18 ; VI, 1.
2. Cf. prop. 3.
3. Proposition citée par Ptolémée, *Synt.* I, p. 513 ; Simplicius, *In Aristt. De caelo*, p. 549 ; Héron, *Metr.*, p. 66.
4. Ici et dans la suite, Archimède se borne à donner les résultats de ses calculs, dont Eutocius développe le détail dans son commentaire.

πρὸς ἕν, τὸ ΑΓΖ πρὸς τὸ ΑΓΔ ἐστίν, ὡς κϛ πρὸς ζ. Ἀλλὰ τοῦ ΑΓΔ τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ΓΗ τετράγωνον, τὸ δὲ ΑΓΔΖ τρίγωνον τῷ ΑΒ κύκλῳ ἴσον ἐστίν [ἐπεὶ ἡ μὲν ΑΓ κάθετος ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, ἡ δὲ βάσις τῆς διαμέ-

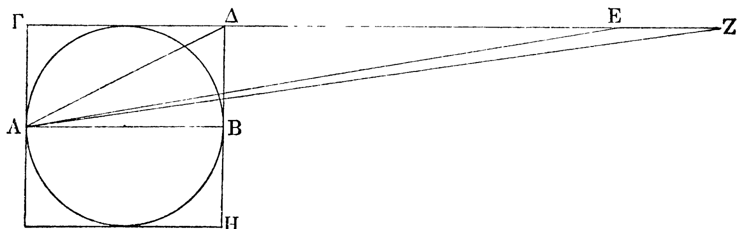


Fig. 63.

τρου τριπλασίων καὶ τῷ ζ′ ἔγγιστα ὑπερέχουσα δειχθήσεται]· ὁ κύκλος οὖν πρὸς τὸ ΓΗ τετράγωνον λόγον ἔχει, ὃν ια πρὸς ιδ.

γ′.

Παντὸς κύκλου ἡ περίμετρος τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστὶ καὶ ἔτι ὑπερέχει ἐλάσσονι μὲν ἢ ἑβδόμῳ μέρει τῆς διαμέτρου, μείζονι δὲ ἢ δέκα ἑβδομηκοστομόνοις.

Ἔστω κύκλος καὶ διάμετρος ἡ ΑΓ καὶ κέντρον τὸ Ε καὶ ἡ ΓΛΖ ἐφαπτομένη καὶ ἡ ὑπὸ ΖΕΓ τρίτου ὀρθῆς· ἡ ΕΖ ἄρα πρὸς ΖΓ λόγον ἔχει, ὃν τϛ πρὸς ρνγ, ἡ δὲ ΕΓ πρὸς [τὴν] ΓΖ λόγον ἔχει, ὃν σξε πρὸς ρνγ. Τετμήσθω οὖν ἡ ὑπὸ ΖΕΓ δίχα τῇ ΕΗ· ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΖΕ πρὸς ΕΓ, ἡ ΖΗ

2 τοῦ BDEGH : τὸ C ‖ 5 τῷ BCG : τοῦ DEH ‖ 15 ὃν BG Eutocius : ἢ ὃν DEH.

et par permutation et par composition. Il s'ensuit que la somme de ZE et EΓ est à ZΓ comme EΓ est à ΓH ; le rapport de ΓE à ΓH est ainsi supérieur au rapport de 571 à 153. Le rapport du carré sur EH au carré sur HΓ est donc égal au rapport de 349 450 à 23 409 ; par conséquent EH est à HΓ comme 591 1/8 est à 153.

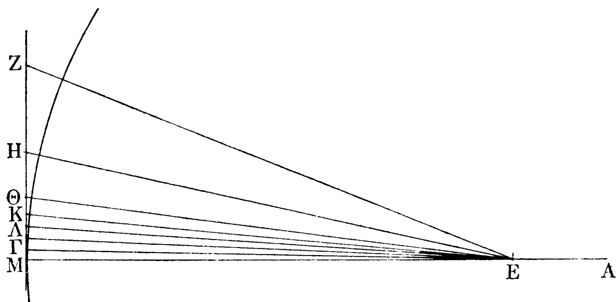


Fig. 64.

Bissectons de même l'angle HEΓ par EΘ ; pour les mêmes raisons (sc. que plus haut), le rapport de EΓ à ΓΘ est donc supérieur au rapport de 1162 1/8 à 153 ; il s'ensuit que le rapport de ΘE à ΘΓ est supérieur au rapport de 1172 1/8 à 153. Bissectons encore l'angle ΘEΓ par EK ; le rapport de EΓ à KΓ est donc supérieur au rapport de 2334 1/4 à 153. Bissectons encore l'angle KEΓ par ΛE ; EΓ a donc à ΛΓ un rapport supérieur à celui de 4673 ½ à 153. Du moment donc que l'angle ZEΓ, égal au tiers d'un angle droit, a été bissecté quatre fois, l'angle ΛEΓ est la 48e partie d'un angle droit. Donnons-nous un angle ΓEM égal à ΛEΓ de même sommet E[1] ; l'angle ΛEM est ainsi la 24e partie d'un angle droit ; il s'ensuit que le segment de droite ΛM est un côté du polygone circonscrit au cercle ayant 96 côtés. Puisque, donc, on a démontré que le rapport

1. Cf. Eucl. I, 23.

πρὸς ΗΓ [καὶ ἐναλλὰξ καὶ συνθέντι]. Ὡς ἄρα συναμφότερος ἡ ΖΕ, ΕΓ πρὸς ΖΓ, ἡ ΕΓ πρὸς ΓΗ · ὥστε ἡ ΓΕ πρὸς ΓΗ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ φοα πρὸς ρνγ. Ἡ ΕΗ ἄρα πρὸς ΗΓ δυνάμει λόγον ἔχει, ὃν $\overset{\lambda\delta}{M}$,θυν πρὸς $\overset{\beta}{M}$,γυθ · μήκει ἄρα, ὃν φϟα η′ πρὸς ρνγ. Πάλιν δίχα ἡ ὑπὸ ΗΕΓ

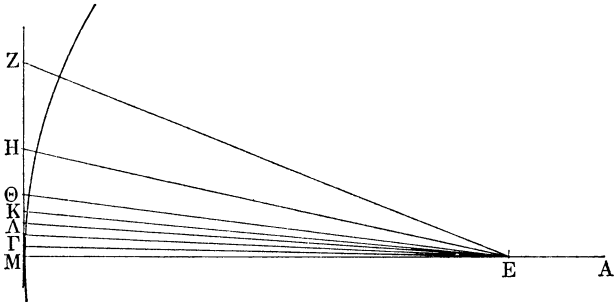


Fig. 64.

τῇ ΕΘ · διὰ τὰ αὐτὰ ἄρα ἡ ΕΓ πρὸς ΓΘ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ὃν ,αρξϛ η′ πρὸς ρνγ · ἡ ΘΕ ἄρα πρὸς ΘΓ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ὃν ,αροϛ η′ πρὸς ρνγ. Ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ ΘΕΓ τῇ ΕΚ · ἡ ΕΓ ἄρα πρὸς ΓΚ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ὃν ,βτλδ δ᾽ πρὸς ρνγ · ἡ ΕΚ ἄρα πρὸς ΓΚ μείζονα ἢ ὃν ,βτλθ δ᾽ πρὸς ρνγ. Ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ ΚΕΓ τῇ ΛΕ · ἡ ΕΓ ἄρα πρὸς ΛΓ μείζονα [μήκει] λόγον ἔχει ἤπερ τὰ ,δχογ ∠′ πρὸς ρνγ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ΖΕΓ τρίτου οὖσα ὀρθῆς τέτμηται τετράκις δίχα, ἡ ὑπὸ ΛΕΓ ὀρθῆς ἐστι μη′. Κείσθω οὖν αὐτῇ ἴση πρὸς τῷ Ε ἡ ὑπὸ ΓΕΜ · ἡ ἄρα ὑπὸ ΛΕΜ ὀρθῆς ἐστι κδ′. Καὶ ἡ ΛΜ ἄρα εὐθεῖα τοῦ περὶ τὸν κύκλον ἐστὶ πολυγώνου πλευρὰ πλευρὰς ἔχοντος ϟϛ′. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΕΓ πρὸς τὴν

5 η′ B Eutocius : om. DEGH || 10 μείζονα B Eutocius : μεῖζον DGH μείζων CE || 12 [μήκει] BCDEGH : del. Wallis || τὰ C Eutocius : om. DEGH || ,δχογ BCG : ,δυογ DEH || ∠′ mss. BC : om. DEGH || 13 τρίτου Heiberg : τρίτον DEGH τρίτη C || 17 πλευρὰ add. Wurm.

de ΕΓ à ΓΔ est supérieur au rapport de 4673 ½ à 153, que ΑΓ est le double de ΕΓ et ΛΜ le double de ΓΛ, le rapport de ΑΓ au périmètre du polygone de 96 côtés est supérieur au rapport de 4673 ½ à 14688. Et 14688 est le triple de 4673 ½, avec un reste de 667 ½, qui est inférieur à la 7e partie de 4673 ½ ; par conséquent le (sc. périmètre du) polygone circonscrit au cercle est inférieur au triple du diamètre augmenté d'une partie du diamètre supérieure au septième. A plus forte raison[1] donc le périmètre du cercle est inférieur au triple du diamètre augmenté de plus d'un septième.

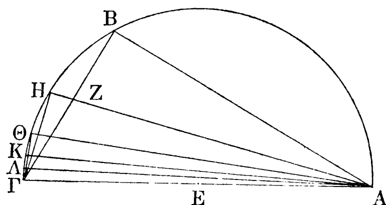


Fig. 65.

Soit un cercle, ΑΓ le diamètre, l'angle ΒΑΓ égal à la troisième partie d'un angle droit ; le rapport de AB à ΒΓ est donc inférieur au rapport de 1351 à 780, et le rapport de ΑΓ à ΓΒ est égal au rapport de 1560 à 780. Bissectons l'angle ΒΑΓ par AH. Du moment donc que l'angle BAH est égal à l'angle ΗΓΒ[2] et aussi à l'angle ΗΑΓ, l'angle ΗΓΒ est aussi égal à l'angle ΗΑΓ. L'angle droit ΑΗΓ étant en commun[3], le troisième angle ΗΖΓ est égal au troisième angle ΑΓΗ[4]. Il s'ensuit que le triangle ΑΗΓ est équiangle au triangle ΓΗΖ ; AH est donc[5] à ΗΓ comme ΓΗ est à HZ et comme ΑΓ est à ΓΖ. Mais ΑΓ est à ΓΖ aussi comme la somme de ΓΑ et AB est à ΒΓ[6], et par conséquent la somme de ΒΑ et ΑΓ est à ΒΓ comme AH est à ΗΓ. Pour ces

1. Cf. *De la sph. et du cyl.* I, 1.
2. Cf. Eucl. III, 26.
3. Cf. Eucl. III, 31.
4. Cf. Eucl. I, 32.
5. Cf. Eucl. VI, 4.
6. Cf. Eucl. VI, 3.

ΓΛ ἐδείχθη μείζονα λόγον ἔχουσα ἤπερ ,δχογ L′ πρὸς ρνγ, ἀλλὰ τῆς μὲν ΕΓ διπλῆ ἡ ΑΓ, τῆς δὲ ΓΛ διπλασίων ἡ ΛΜ, καὶ ἡ ΑΓ ἄρα πρὸς τὴν τοῦ ϟς γώνου περίμετρον μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ,δχογ L′ πρὸς $\overset{\alpha}{\mathrm{M}}$,δχπη. Καί ἐστιν τριπλασία, καὶ ὑπερέχουσιν χξζ L′, ἅπερ τῶν ,δχογ L′ ἐλάττονά ἐστιν ἢ τὸ ἕβδομον· ὥστε τὸ πολύγωνον τὸ περὶ τὸν κύκλον τῆς διαμέτρου ἐστὶ τριπλάσιον καὶ ἐλάττονι ἢ τῷ ἑβδόμῳ μέρει μεῖζον· ἡ τοῦ κύκλου ἄρα περίμετρος πολὺ μᾶλλον ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τριπλασίων καὶ ἑβδόμῳ μέρει μείζων.

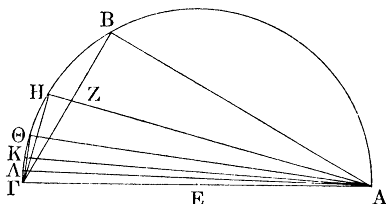


Fig. 65.

Ἔστω κύκλος καὶ διάμετρος ἡ ΑΓ, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΑΓ τρίτου ὀρθῆς· ἡ ΑΒ ἄρα πρὸς ΒΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ὃν ,ατνα πρὸς ψπ [ἡ δὲ ΑΓ πρὸς ΓΒ, ὃν ,αφξ πρὸς ψπ]. Δίχα ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ΑΗ. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΗ τῇ ὑπὸ ΗΓΒ, ἀλλὰ καὶ τῇ ὑπὸ ΗΑΓ, καὶ ἡ ὑπὸ ΗΓΒ τῇ ὑπὸ ΗΑΓ ἐστὶν ἴση. Καὶ κοινὴ ἡ ὑπὸ ΑΗΓ ὀρθή· καὶ τρίτη ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΖΓ τρίτῃ τῇ ὑπὸ ΑΓΗ ἴση. Ἰσογώνιον ἄρα τὸ ΑΗΓ τῷ ΓΗΖ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΑΗ πρὸς ΗΓ, ἡ ΓΗ πρὸς ΗΖ καὶ ἡ ΑΓ πρὸς ΓΖ. Ἀλλ᾽ ὡς ἡ ΑΓ πρὸς ΓΖ, [καὶ] συναμφότερος ἡ ΓΑΒ πρὸς ΒΓ· καὶ ὡς συναμφότερος ἄρα ἡ ΒΑΓ πρὸς ΒΓ, ἡ ΑΗ πρὸς ΗΓ. Διὰ

3 ϛς γώνου Heiberg : ϛς πολυγώνου BDEGH ‖ 6 ἢ add. B ‖ 7 ἐλάττονι Heiberg : ἔλαττον BDEGH ‖ 13 ,ατνα BG : τνα CDEH ‖ 17 ἄρα C : ἔσται BDEGH ‖ ἴση add. B ‖ 19 καὶ om. C ‖ 21 ΑΗ mss. BG : ΔΗ mss. CDEH.

raisons, le rapport de ΑΗ à ΗΓ est donc inférieur au rapport de 2911 à 780, et le rapport de ΑΓ à ΓΗ est inférieur au rapport de 3013 1/2+1/4 à 780. Bissectons l'angle ΓΑΗ par ΑΘ ; pour les mêmes raisons que plus haut le rapport de ΑΘ à ΘΓ est inférieur au rapport de 5924 1/2+1/4 à 780 ou de 1823 à 240 ; car chacun des termes (sc. du dernier rapport) est les 4/13 du terme (sc. correspondant du premier rapport) ; le rapport de ΑΓ à ΓΘ est donc inférieur au rapport de 1838 9/11 à 240. Bissectons aussi l'angle ΘΑΓ par ΚΑ. Le rapport de ΑΚ à ΚΓ est inférieur au rapport de 1007 à 66, puisque des seconds termes chacun vaut les 11/40 d'un autre nombre ; le rapport de ΑΓ à ΚΓ est donc inférieur à celui de 1009 1/6 à 66. Bissectons encore l'angle ΚΑΓ par ΛΑ ; le rapport de ΑΛ à ΛΓ est donc inférieur au rapport de 2016 1/6 à 66, le rapport de ΑΓ à ΓΛ est inférieur au rapport de 2017 1/4 à 66. Inversement donc le rapport du périmètre du polygone au diamètre est supérieur au rapport de 6336 à 2017 1/4 et 6336 est supérieur au produit de 3 10/71 par 2017 1/4. Il s'ensuit que le périmètre du polygone de 96 côtés inscrit dans le cercle est supérieur au triple du diamètre augmenté de 10/71 ; à plus forte raison[1] donc le (sc. périmètre du) cercle est supérieur au triple du diamètre augmenté de 10/71.

Le rapport du périmètre au diamètre est donc inférieur à 3 1/7 et supérieur à 3 10/71.

1. Cf. *De la sph. et du cyl.* I, postulat 5.

τοῦτο οὖν ἡ ΑΗ πρὸς [τὴν] ΗΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ βϡια πρὸς ψπ, ἡ δὲ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΗ ἐλάσσονα ἢ ὃν ,γιγ L′ δ′ πρὸς ψπ. Δίχα ἡ ὑπὸ ΓΑΗ τῇ ΑΘ· ἡ ΑΘ ἄρα διὰ τὰ αὐτὰ πρὸς τὴν ΘΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ὃν ,εϡκδ L′ δ′ πρὸς ψπ ἢ ὃν ,αωκγ πρὸς σμ· ἑκατέρα γὰρ ἑκατέρας δ ιγ′· ὥστε ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΘ ἢ ὃν ,αωλη θ ια′ πρὸς σμ. Ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ ΘΑΓ τῇ ΚΑ· καὶ ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΓ ἐλάσσονα [ἄρα] λόγον ἔχει ἢ ὃν ,αζ πρὸς ξς· ἑκατέρα γὰρ ἑκατέρας ια μ′. Ἡ ΑΓ ἄρα πρὸς [τὴν] ΚΓ ἢ ὃν ,αθ ς′ πρὸς ξς. Ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ ΚΑΓ τῇ ΛΑ· ἡ ΑΛ ἄρα πρὸς [τὴν] ΛΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ὃν τὰ βις ς′ πρὸς ξς, ἡ δὲ ΑΓ πρὸς ΓΛ ἐλάσσονα ἢ τὰ ,βιζ δ′ πρὸς ξς. Ἀνάπαλιν ἄρα ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου πρὸς τὴν διάμετρον μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ,ςτλς πρὸς ,βιζ δ′, ἅπερ τῶν ,βιζ δ′ μείζονά ἐστιν ἢ τριπλασίονα καὶ δέκα οα′· καὶ ἡ περίμετρος ἄρα τοῦ ϟςγώνου τοῦ ἐν τῷ κύκλῳ τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστὶ καὶ μείζων ἢ ῑ οα′· ὥστε καὶ ὁ κύκλος ἔτι μᾶλλον τριπλασίων ἐστὶ καὶ μείζων ἢ ῑ οα′.

Ἡ ἄρα τοῦ κύκλου περίμετρος τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστὶ καὶ ἐλάσσονι μὲν ἢ ἑϐδόμῳ μέρει, μείζονι δὲ ἢ ῑ οα′ μείζων.

3 L′ Eutocius : γ′ BCDEGH ‖ 5 ,εϡκδ B Eutocius : ,ετκδ CDEGH ‖ L′ ms. B Eutocius : ε′ DEGH ‖ σμ BC : σν DEGH ‖ 6 ιγ′ B : ιγ′α′ CDEGH ‖ ια′ add. B ‖ 8 ξς BC : σξς DEGH ‖ 9 ἑκατέρας B : ἑκατέρᾳ CDEGH ‖ ια μ′· ἡ ΑΓ ms. B : οἶμαι DEGH ‖ πρὸς ΓΚ Eutocius ‖ ΚΓ ἢ ὃν B : κατάγον DEGH ‖ 10 ,αθ ς′ BC : αος DEGH ‖ 11 ΛΓ Wallis : ΑΓ mss. BCDEGH ‖ 14 ,ςτλς B Eutocius : ,ςτα ς′ BCDEGH ‖ ,βιζ B : ζιζ CDEGH ‖ 15 οα′ BC : ο′ α′ DEGH ‖ 16 ϟς γώνου C : ϟς πολυγώνου BDEGH ‖ 17 ῑ οα′ B : ὃν ο′ ια′ CDEGH ‖ 18 ῑ οα′ B : θ′ ια′ CDEGH ‖ 20 ἐλάσσονι Heiberg : ἐλάσσων BCDEGH ‖ 20-21 μείζονι δὲ ἢ ῑ οα′ μείζων Heiberg : μείζων δὲ, CDEGH.

SUR LES CONOÏDES
ET LES SPHÉROÏDES

NOTICE

Dans le traité *De la sphère et du cylindre*, Archimède avait évalué, pour la première fois, la surface et le volume de la sphère et des segments et secteurs sphériques en fonction du volume et de la surface du cône et du cylindre droits. Le traité *Sur les conoïdes et les sphéroïdes* peut être considéré comme la suite de ces recherches géométriques, du fait qu'Archimède y étend son investigation à d'autres figures de révolution, dont la forme approximative, certes, avait été rendu familière aux contemporains par la céramique, mais qui n'avaient encore jamais fait l'objet de l'analyse mathématique et dont même l'« existence » géométrique n'avait jamais été envisagée. Ce sont les figures qualifiées de « conoïdes » et de « sphéroïdes » par Archimède.

Dans la longue lettre à Dosithée par laquelle Archimède introduit ce traité, il définit ces nouvelles figures en faisant appel à la notion du mouvement, dérogeant ainsi, comme il l'avait déjà fait dans le traité *De la sphère et du cylindre*, au principe de l'immobilité parménidienne que l'école de Platon et, en partie, encore Euclide avaient essayé de faire prévaloir en géométrie.

Archimède distingue deux espèces de conoïdes, le paraboloïde de révolution, engendré par la révolution d'une parabole autour de son axe, et les hyperboloïdes de révolution, engendrés par la révolution d'une hyperbole autour de son axe transverse, et deux espèces de sphéroïdes, à savoir les ellipsoïdes allongés, engendrés par la révolution d'une ellipse autour de son grand axe,

et les ellipsoïdes aplatis, engendrés par la révolution d'une ellipse autour de son petit axe. Il conçoit les coniques, comme l'avaient fait Euclide et son prédécesseur Aristée dans les traités, aujourd'hui perdus, qu'ils avaient consacrés à ces courbes, et comme on le fera jusqu'au moment de la réforme de la théorie des coniques par Apollonius, comme intersections de cônes de révolution d'angles d'ouverture différents par des plans perpendiculaires à une génératrice. La parabole est donc pour lui l'intersection entre un tel plan et un cône rectangle, l'hyperbole est la section d'un cône obtusangle, l'ellipse est la section d'un cône ayant un angle d'ouverture aigu. Conséquemment, le paraboloïde de révolution s'appelle chez Archimède conoïde rectangle, l'hyperboloïde de révolution est qualifié de conoïde obtusangle, et l'ellipsoïde de sphéroïde, allongé ou aplati.

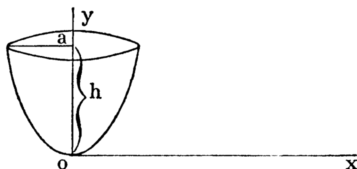
Dans son introduction, Archimède formule d'avance les énoncés des théorèmes qu'il démontrera dans les propositions 21, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30 et 32.

La composition du traité est un chef-d'œuvre d'enchaînement logique. Dans les deux premières des 32 propositions qu'il contient, Archimède démontre des théorèmes d'arithmétique dont il se sert dans les procédés de sommation appliqués, à partir de la proposition 21, à l'évaluation du volume des segments de paraboloïde, d'hyperboloïde et d'ellipsoïde de révolution. Les propositions 4 à 20 démontrent les propriétés de ces figures sur lesquelles Archimède fonde l'établissement des théorèmes capitaux 21 à 32 qui sont la fin et le couronnement de ce traité. Les propositions 3 à 6 traitent des segments de parabole, du rapport entre une ellipse et le cercle ayant pour diamètre le grand axe, du rapport d'une ellipse à un cercle quelconque, et du rapport de deux ellipses. Les propositions 7 à 9 résolvent le problème de construire un cône, ayant pour sommet un point donné et contenant dans sa surface une ellipse donnée, et un cylindre de révolution ayant son axe sur une droite donnée et contenant dans

sa surface une ellipse donnée. La proposition 10 rappelle brièvement les propriétés relatives au rapport de deux segments de cône et au rapport entre un tronc de cylindre et un segment de cône ayant même base et même hauteur. Les propositions 11 à 14 étudient les sections planes des paraboloïdes, des hyperboloïdes et des ellipsoïdes de révolution, alors que les propositions 15 à 17 ont pour objet le contact de ces figures avec des plans. La proposition 18 montre que volume et surface d'un ellipsoïde de révolution sont divisés en deux parties égales par un plan passant par son centre.

Dans les propositions 19 et 20, enfin, Archimède jette les bases pour l'évaluation des volumes qu'il s'est proposé de mesurer, en adaptant la méthode générale « de compression », inventée par lui, à la recherche particulière d'un volume, où le Δx utilisé est nécessairement lui aussi un volume. Pour des segments droits de conoïdes et de sphéroïdes dans la proposition 19, pour des segments obliques des mêmes figures dans la proposition 20, Archimède démontre en effet qu'il est possible d'inscrire et de circonscrire au corps solide à évaluer des figures composées de troncs de cylindre superposés, tous de même hauteur et de volumes évaluables, et de rendre la différence entre la figure circonscrite et la figure inscrite inférieure à toute grandeur donnée par le choix d'un nombre suffisamment élevé des cylindres superposés.

Ce procédé contient en germe le calcul intégral inventé par Leibniz et par Newton. Tous les raisonnements se faisant, suivant la coutume des Grecs, par la géométrie, la démonstration, où aucune précaution logique n'est négligée, paraît longue au lecteur habitué à l'algorithme moderne. Archimède est ainsi obligé, à propos du volume du segment droit du paraboloïde de révolution, d'écrire une dizaine de pages



pour dire

$$\pi \int_0^h y\, dy = \frac{\pi a^2 h}{2},$$

où $y = x^2$ et $h = a^2$.

En démontrant par une double réduction à l'absurde que la somme des cylindres n'est ni inférieure ni supérieure à la grandeur qu'il sait d'avance, par intuition et par des mesures expérimentales, être l'équivalent du volume cherché, Archimède démontre pour ses segments de conoïdes et de sphéroïdes les propositions 21 à 32, dont les énoncés étonnent par leur simplicité arithmétique. Le segment de paraboloïde apparaît ainsi équivalent aux trois demis du cône ayant même base et même hauteur que lui, prop. 21 et 22, le segment d'hyperboloïde apparaît comme ayant au cône de même base et de même hauteur un rapport égal à celui de la somme de l'axe du segment et du triple de la droite, joignant le sommet de l'hyperboloïde au sommet du cône asymptotique, à la somme de l'axe du segment et du double de cette droite, prop. 25 et 26. La moitié de l'ellipsoïde de révolution, découpée par un plan, mené par le centre soit perpendiculairement, soit obliquement à l'axe, a un volume double de celui du cône ayant même base et même axe que le segment, prop. 27 et 28. Le rapport du plus petit segment d'un ellipsoïde de révolution, découpé par un plan mené par un point quelconque de l'axe, soit perpendiculairement, soit obliquement à l'axe, au cône ayant même base et même axe que ce segment est égal au rapport entre la somme de la moitié de l'axe de l'ellipsoïde et de l'axe du plus grand segment, d'une part, et l'axe du plus grand segment

d'autre part, prop. 29 et 30. Le rapport du plus grand segment d'un ellipsoïde découpé par un plan mené par un point quelconque de l'axe, soit perpendiculairement soit obliquement à l'axe, au cône ayant même base et même axe que ce segment est égal au rapport entre la somme de la moitié de l'axe de l'ellipsoïde et de l'axe du plus petit segment, d'une part, et l'axe du plus petit segment d'autre part, prop. 31 et 32.

Dans la proposition 21, le texte transmis par les manuscrits contient une erreur, dont Heiberg n'a pas tenu compte parce qu'elle ne fausse pas la conclusion finale. Elle consiste à comparer la figure inscrite dans le segment de paraboloïde au cylindre de hauteur ΔI, au lieu de le comparer au cylindre entier, de hauteur ΔB, et de raisonner ensuite *comme si* la comparaison avait été faite entre la figure inscrite et le cylindre de hauteur ΔB. Cette erreur a été relevée pour la première fois par E. J. Dijksterhuis dans la 1re édition de son *Archimède*, en langue flamande[1], ensuite par H. Hermelink[2] en 1953. Dijksterhuis avait déjà reconnu que la faute dans le raisonnement s'élimine, si on fait entrer d'emblée dans l'évaluation mentionnée non pas le cylindre de hauteur ΔI, mais le cylindre de hauteur ΔB. En 1954, enfin, le texte de ce passage a fait l'objet d'une enquête approfondie menée, avec toutes les ressources de la critique des textes et de la codicologie, par S. Heller[3], qui montre que l'erreur commise ne remonte pas à Archimède et qui propose, avec économie, des conjectures précises qui guérissent ce texte. Nous avons tenu compte dans l'établissement de notre texte et dans la traduction des propositions de Heller.

1. Dans la revue « Euklides », t. XV-XVII, XX, 1938-44.
2. *Ein bisher übersehener Fehler in einem Beweis des Archimedes*, Archives internationales d'histoire des sciences, 6, n° 25, 1953, p. 430-433.
3. Siegfried Heller, *Ein Fehler in einer Archimedes-Ausgabe, seine Entstehung und seine Folgen*, Abh. der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Math.-naturw. Klasse, Neue Folge, Heft 63, 1954, p. 1-38.

SUR LES CONOÏDES ET LES SPHÉROÏDES

Archimède à Dosithée, avec ses bons vœux.

Je t'envoie, rédigées dans ce livre, les démonstrations des théorèmes restants, que tu n'as pas reçues dans les livres[1] que je t'ai adressés précédemment, ainsi que celles d'autres théorèmes, trouvés plus tard à la suite des premiers ; j'avais souvent, par le passé, entrepris des recherches sur ces théorèmes, mais les difficultés que leur découverte me faisait apparaître m'ont laissé dans le désarroi. C'est pourquoi j'ai renoncé à publier même les énoncés de ces propositions avec les autres. Mais en m'y appliquant plus tard avec plus de soin j'ai trouvé une solution aux difficultés. Ce reste des théorèmes précédents était relatif au paraboloïde de révolution[2], alors que ceux dont la découverte s'est ajoutée à celle des précédents ont pour objet l'hyperboloïde[3] de révolution et les ellipsoïdes[4] de révolution, dont j'appelle les uns allongés et les autres aplatis.

Quant au paraboloïde de révolution, voici ce qui avait été proposé : si une parabole, son axe restant en place, accomplit une révolution et revient de nouveau à sa position initiale, la figure enveloppée par la parabole s'appellera conoïde rectangle, le diamètre resté en place s'appellera l'axe, et le point, où l'axe touche (c'est-à-dire perce) la surface du conoïde, s'appellera le sommet. Si un plan est tangent à un paraboloïde de révolution et qu'un autre plan, mené parallèlement au plan tangent, découpe un segment du paraboloïde, on appellera base du segment découpé

1. Les traités *De la sphère et du cylindre, Des spirales, La quadrature de la parabole.*
2-4. Cf. les notes complémentaires.

ΠΕΡΙ ΚΩΝΟΕΙΔΕΩΝ ΚΑΙ ΣΦΑΙΡΟΕΙΔΕΩΝ

Ἀρχιμήδης Δοσιθέῳ εὖ πράττειν.

Ἀποστέλλω τοι γράψας ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ τῶν τε λοιπῶν θεωρημάτων τὰς ἀποδείξιας, ὧν οὐκ εἶχες ἐν τοῖς πρότερον ἀπεσταλμένοις, καὶ ἄλλων ὕστερον ποτεξευρημένων, ἃ πρότερον μὲν ἤδη πολλάκις ἐγχειρήσας ἐπισκέπτεσθαι δύσκολον ἔχειν τι φανείσας μοι τᾶς εὑρέσιος αὐτῶν ἀπόρησα· διόπερ οὐδὲ συνεξεδόθεν τοῖς ἄλλοις αὐτὰ τὰ προβεβλημένα. Ὕστερον δὲ ἐπιμελέστερον ποτ' αὐτοῖς γενόμενος ἐξεῦρον τὰ ἀπορηθέντα. Ἦν δὲ τὰ μὲν λοιπὰ τῶν προτέρων θεωρημάτων περὶ τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος προβεβλημένα, τὰ δὲ νῦν ἐντι ποτεξευρημένα περί τε ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος καὶ περὶ σφαιροειδέων σχημάτων, ὧν τὰ μὲν παραμάκεα, τὰ δὲ ἐπιπλατέα καλέω.

Περὶ μὲν οὖν τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος ὑπέκειτο τάδε· εἴ κα ὀρθογωνίου κώνου τομὰ μενούσας τᾶς διαμέτρου περιενεχθεῖσα ἀποκατασταθῇ πάλιν, ὅθεν ὥρμασεν, τὸ περιλαφθὲν σχῆμα ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς ὀρθογώνιον κωνοειδὲς καλεῖσθαι, καὶ ἄξονα μὲν αὐτοῦ τὰν μεμενάκουσαν διάμετρον καλεῖσθαι, κορυφὰν δὲ τὸ σαμεῖον, καθ' ὃ ἅπτεται ὁ ἄξων τᾶς τοῦ κωνοειδέος ἐπιφανείας· καὶ εἴ κα τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος σχήματος ἐπίπεδον ἐπιψαύῃ, παρὰ δὲ τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον ἄλλο ἐπίπεδον ἀχθὲν ἀποτέμῃ τι τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος, βάσιν μὲν καλεῖσθαι τοῦ ἀποτμαθέντος τμάματος τὸ ἐπίπεδον

1 Δοσιθέῳ G : Δωσιθέῳ DEH ‖ 6 εὑρέσιος Heiberg : εὑρέσιας BDEGH ‖ 18 καλεῖσθαι Torellius ex l. 19 : καλείσθω BDEGH ‖ 22 ἐπιψαῦον GH : ἐπιψαύων DE.

l'aire comprise par la section du paraboloïde dans le plan sécant, sommet le point de contact de l'autre plan avec le paraboloïde, et axe (sc. du segment découpé) la partie interceptée, à l'intérieur du segment, de la droite menée par le sommet du segment parallèlement à l'axe du paraboloïde.

Il était proposé d'examiner pour quelle raison, si d'un paraboloïde on découpe des segments par un plan perpendiculaire à l'axe, le segment découpé est équivalent aux trois demis du cône ayant même base et même axe que le segment[1], et pour quelle raison, si on découpe d'un paraboloïde deux segments par des plans menés de n'importe quelle manière, le rapport des segments découpés est égal au carré du rapport entre leurs axes[2].

Au sujet de l'hyperboloïde de révolution nous supposons ce qui suit : si on a dans un plan une hyperbole, son diamètre et les asymptotes de l'hyperbole et que, le diamètre restant en place, le plan qui contient les lignes indiquées accomplit une révolution et revient de nouveau à sa position initiale, il est évident que les asymptotes de l'hyperbole envelopperont un cône isoscèle, dont le sommet sera le point de concours des asymptotes et dont l'axe sera le diamètre resté en place ; la figure enveloppée par l'hyperbole s'appellera conoïde obtusangle ; son axe sera le diamètre resté en place, son sommet le point où l'axe touche (c'est-à-dire perce) la surface du conoïde ; le cône enveloppé par les asymptotes de l'hyperbole sera appelé cône comprenant le conoïde[3] ; le segment de droite compris

1. Propriété démontrée dans la proposition 21 de ce traité.
2. Cf. prop. 24.
3. Nous l'appellerons dans la suite cône asymptotique.

τὸ περιλαφθὲν ὑπὸ τᾶς τοῦ κωνοειδέος τομᾶς ἐν τῷ ἀποτέμνοντι ἐπιπέδῳ, κορυφὰν δὲ τὸ σαμεῖον, καθ' ὃ ἐπιψαύει τὸ ἕτερον ἐπίπεδον τοῦ κωνοειδέος, ἄξονα δὲ τὰν ἐναπολαφθεῖσαν εὐθεῖαν ἐν τῷ τμάματι ἀπὸ τᾶς ἀχθείσας διὰ τᾶς κορυφᾶς τοῦ τμάματος παρὰ τὸν ἄξονα τοῦ κωνοειδέος.

Προεβάλλετο δὲ τάδε θεωρῆσαι· διὰ τί, εἴ κα τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος τμάματα ἀποτμαθῇ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, τὸ ἀποτμαθὲν τμᾶμα ἡμιόλιον ἐσσεῖται τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν· καὶ διὰ τί, εἴ κα ἀπὸ τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος δύο τμάματα ἀποτμαθέωντι ἐπιπέδοις ὁπωσοῦν ἀγμένοις, τὰ ἀποτμαθέντα τμάματα διπλάσιον λόγον ἑξοῦντι ποτ' ἄλλαλα τῶν ἀξόνων.

Περὶ δὲ τοῦ ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος ὑποτιθέμεθα μὲν τάδε· εἴ κα ἐν ἐπιπέδῳ ἔωντι ἀμβλυγωνίου κώνου τομὰ καὶ ἁ διάμετρος αὐτᾶς καὶ αἱ ἔγγιστα τᾶς τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομᾶς, μενούσας δὲ τᾶς διαμέτρου περιενεχθὲν τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐντι αἱ εἰρημέναι γραμμαί, ἀποκατασταθῇ πάλιν, ὅθεν ὥρμασεν, αἱ μὲν ἔγγιστα εὐθεῖαι τᾶς τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομᾶς δῆλον ὡς κῶνον ἰσοσκελέα περιλαψοῦνται, οὗ κορυφὰ ἐσσεῖται τὸ σαμεῖον, καθ' ὃ αἱ ἔγγιστα συμπίπτοντι, ἄξων δὲ ἁ μεμενάκουσα διάμετρος· τὸ δὲ ὑπὸ τᾶς τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομᾶς σχῆμα περιλαφθὲν ἀμβλυγώνιον κωνοειδὲς καλεῖσθαι, ἄξονα δὲ αὐτοῦ τὰν μεμενάκουσαν διάμετρον, κορυφὰν δὲ τὸ σαμεῖον, καθ' ὃ ἅπτεται ὁ ἄξων τᾶς ἐπιφανείας τοῦ κωνοειδέος· τὸν δὲ κῶνον τὸν περιλαφθέντα ὑπὸ τᾶν ἔγγιστα τᾶς τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομᾶς περιέχοντα τὸ κωνοειδὲς καλεῖσθαι, τὰν δὲ μεταξὺ εὐθεῖαν τᾶς τε κορυφᾶς τοῦ

6 προεβάλλετο δὲ G : προέβαλλεν τόδε DEH || 13 ποτ' ἄλλαλα Torellius : ποτὶ τὰ ἄλλα BDEGH || 14 ὑποτιθέμεθα Heiberg : ὑπετιθέμεθα BDEGH || 16 αἱ B : om. DEGH || 27 τᾶν B : τᾶς DEGH.

entre le sommet du conoïde et le sommet du cône comprenant le conoïde sera appelé l'ajouté à l'axe. Si un plan est tangent à un hyperboloïde de révolution et qu'un autre plan, mené parallèlement au plan tangent, découpe de l'hyperboloïde un segment, on appellera base du segment découpé l'aire comprise par la section de l'hyperboloïde dans le plan sécant ; on appellera sommet (sc. du segment découpé) le point de contact du plan tangent et de l'hyperboloïde, et axe le segment de droite intercepté, à l'intérieur du segment (sc. d'hyperboloïde) sur la droite menée par le sommet du segment et par le sommet du cône asymptotique ; enfin, le segment de droite compris entre les sommets indiqués sera appelé l'ajouté à l'axe.

Tous les paraboloïdes de révolution sont semblables[1] ; des hyperboloïdes de révolution on appellera semblables ceux dont les cônes asymptotiques sont semblables[2]. Il est proposé d'examiner pour quelles raisons, si d'un hyperboloïde de révolution on découpe des segments par un plan perpendiculaire à l'axe, le rapport du segment découpé au cône ayant même base et même axe que le segment est égal au rapport de la somme de l'axe du segment et du triple du segment ajouté à l'axe à la somme de l'axe du segment (sc. de l'hyperboloïde) et du double du segment ajouté à l'axe[3]. A examiner aussi pour quelles raisons, si d'un hyperboloïde de révolution on découpe un segment par un plan non perpendiculaire à l'axe, le rapport du segment découpé à la figure, ayant même base et même axe que le segment, et qui est un segment de cône, est égal au rapport

1. Parce que toutes les paraboles sont semblables entre elles ; cf. Apollonius, *Con.* VI, 11.
2. Pour la définition de la similitude des cônes, cf. Eucl. XI, def. 24.
3. Cf. prop. 25.

κωνοειδέος καὶ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδὲς ποτεοῦσαν τῷ ἄξονι καλεῖσθαι· καὶ εἴ κα τοῦ ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος ἐπίπεδον ἐπιψαύῃ, παρὰ δὲ τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον ἄλλο ἐπίπεδον ἀχθὲν ἀποτέμῃ τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος, βάσιν μὲν καλεῖσθαι τοῦ ἀποτμαθέντος τμάματος τὸ ἐπίπεδον τὸ περιλαφθὲν ὑπὸ τᾶς τοῦ κωνοειδέος τομᾶς ἐν τῷ ἀποτέμνοντι ἐπιπέδῳ, κορυφὰν δὲ τὸ σαμεῖον, καθ' ὃ ἅπτεται τὸ ἐπίπεδον τὸ ἐπιψαῦον τοῦ κωνοειδέος, ἄξονα δὲ τὰν ἀπολαφθεῖσαν ἐν τῷ τμάματι ἀπὸ τᾶς διαχθείσας διὰ τᾶς κορυφᾶς τοῦ τμάματος καὶ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδές, καὶ τὰν μεταξὺ τᾶν εἰρημενᾶν κορυφᾶν εὐθεῖαν ποτεοῦσαν τῷ ἄξονι καλεῖσθαι.

Τὰ μὲν οὖν ὀρθογώνια κωνοειδέα πάντα ὁμοῖά ἐντι, τῶν δὲ ἀμβλυγωνίων κωνοειδέων ὁμοῖα καλείσθω, ὧν κα οἱ κῶνοι οἱ περιέχοντες τὰ κωνοειδέα ὁμοῖοι ἔωντι. Προβάλλεται δὲ τάδε θεωρῆσαι· διὰ τί, εἴ κα τοῦ ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος ἀποτμαθῇ τμάματα ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, τὸ ἀποτμαθὲν τμᾶμα ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ συναμφοτέραις ἴσα τῷ τε ἄξονι τοῦ τμάματος καὶ τᾷ τριπλασίᾳ τᾶς ποτεούσας τῷ ἄξονι ποτὶ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις τῷ τε ἄξονι τοῦ τμάματος καὶ τᾷ διπλασίᾳ τᾶς ποτεούσας τῷ ἄξονι· καὶ διὰ τί, εἴ κα τοῦ ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος τμᾶμα ἀποτμαθῇ ἐπιπέδῳ μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, τὸ ἀποτμαθὲν τμᾶμα ποτὶ τὸ σχῆμα τὸ βάσιν ἔχον τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, ὃ γίγνεται ἀπότμαμα κώνου, τοῦτον ἕξει τὸν λόγον, ὃν ἁ συναμφοτέραις ἴσα τῷ τε ἄξονι τοῦ τμάματος καὶ τᾷ

15 κα Heiberg : καὶ BDEGH ‖ 21 ὃν B : om. DEGH ‖ συναμφοτέραις Heiberg : συναμφότερα BDEGH ‖ τε add. Heiberg : om. BDEGH ‖ 29 συναμφοτέραις Heiberg : συναμφότερος BDEGH ‖ τε add. Heiberg.

de la somme de l'axe du segment et du triple du segment de droite ajouté à l'axe, à la somme de l'axe du segment et du double du segment de droite ajouté à l'axe[1].

Au sujet des figures sphéroïdes, voici ce que nous proposons : si une ellipse, le grand axe restant en place, accomplit une révolution et revient à sa position initiale, la figure enveloppée par l'ellipse s'appellera ellipsoïde allongé ; mais si c'est le petit axe qui reste en place pendant que l'ellipse effectue une révolution et revient à sa position initiale, la figure enveloppée par l'ellipse s'appellera ellipsoïde aplati ; dans chacun des deux ellipsoïdes on appellera axe le diamètre resté en place, sommet le point où l'axe touche (c'est-à-dire perce) la surface de l'ellipsoïde, centre le milieu de l'axe, et diamètre la droite menée par le centre perpendiculairement à l'axe. Si des plans parallèles sont tangents à n'importe lequel des ellipsoïdes sans le couper, et que parallèlement aux plans tangents on mène un autre plan, coupant l'ellipsoïde, on appellera base des segments ainsi produits l'aire comprise par la section de l'ellipsoïde dans le plan sécant, sommets les points de contact des plans parallèles et de l'ellipsoïde, axes les segments de droite interceptés, à l'intérieur des segments (sc. de l'ellipsoïde) sur la droite joignant leurs sommets ; nous montrerons d'ailleurs que les plans tangents à l'ellipsoïde ne sont tangents à sa surface qu'en un point[2], et que la droite joignant les points de contact passe par le centre de l'ellipsoïde[3] ; on appellera semblables les ellipsoïdes dans lesquels le rapport de l'axe au

1. Cf. prop. 26.
2. Cf. prop. 16.
3. Cf. prop. 16.

τριπλασίᾳ τᾶς ποτεούσας τῷ ἄξονι ποτὶ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις τῷ τε ἄξονι τοῦ τμάματος καὶ τᾷ διπλασίᾳ τᾶς ποτεούσας τῷ ἄξονι.

Περὶ δὲ τῶν σφαιροειδέων σχημάτων ὑποτιθέμεθα τάδε· εἴ κα ὀξυγωνίου κώνου τομὰ μενούσας τᾶς μείζονος διαμέτρου περιενεχθεῖσα ἀποκατασταθῇ πάλιν, ὅθεν ὥρμασεν, τὸ περιλαφθὲν σχῆμα ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς παραμᾶκες σφαιροειδὲς καλεῖσθαι· εἰ δέ κα τᾶς ἐλάσσονος διαμέτρου μενούσας περιενεχθεῖσα ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ ἀποκατασταθῇ πάλιν, ὅθεν ὥρμασεν, τὸ περιλαφθὲν σχῆμα ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἐπιπλατὺ σφαιροειδὲς καλεῖσθαι· ἑκατέρου δὲ τῶν σφαιροειδέων ἄξονα μὲν καλεῖσθαι τὰν μεμενάκουσαν διάμετρον, κορυφὰν δὲ τὸ σαμεῖον, καθ' ὃ ἅπτεται ὁ ἄξων τᾶς ἐπιφανείας τοῦ σφαιροειδέος, κέντρον δὲ καλεῖσθαι τὸ μέσον τοῦ ἄξονος καὶ διάμετρον τὰν διὰ τοῦ κέντρου ποτ' ὀρθὰς ἀγομέναν τῷ ἄξονι· καὶ εἴ κα τῶν σφαιροειδέων σχημάτων ὁποτερουοῦν ἐπίπεδα παράλληλα ἐπιψαύωντι μὴ τέμνοντα, παρὰ δὲ τὰ ἐπίπεδα τὰ ψαύοντα ἄλλο ἐπίπεδον ἀχθῇ τέμνον τὸ σφαιροειδές, τῶν γενομένων τμαμάτων βάσιν μὲν καλεῖσθαι τὸ περιλαφθὲν ὑπὸ τᾶς τοῦ σφαιροειδέος τομᾶς ἐν τῷ τέμνοντι ἐπιπέδῳ, κορυφὰς δὲ τὰ σημεῖα, καθ' ἃ ἐπιψαύοντι τοῦ σφαιροειδέος τὰ παράλληλα ἐπίπεδα, ἄξονας δὲ τὰς ἐναπολαφθείσας εὐθείας ἐν τοῖς τμαμάτεσσιν ἀπὸ τᾶς εὐθείας τᾶς τὰς κορυφὰς αὐτῶν ἐπιζευγνυούσας· ὅτι δὲ τά τε ἐπιψαύοντα ἐπίπεδα τοῦ σφαιροειδέος καθ' ἓν μόνον ἅπτονται σαμεῖον τᾶς ἐπιφανείας αὐτοῦ, καὶ ὅτι ἁ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα διὰ τοῦ κέντρου τοῦ σφαιροειδέος πορεύεται, δειξοῦμες· ὁμοῖα δε καλεῖσθαι τῶν σφαιροειδέων σχημά-

5 τομὰ BG : τομᾶς DEH ‖ 6 ἀποκατασταθῇ G mg. : ἀποκαταστῇ DEH ‖ 8 κα add. Heiberg : om. BDEGH ‖ 23 ἃ G : ἇς DEH ‖ 25 τᾶς alt. Heiberg : τὰ DEGH.

diamètre est le même ; on dira que des segments de figures sphéroïdes et conoïdes sont semblables, quand ils sont découpés de figures semblables, qu'ils ont des bases semblables, et que leurs axes, perpendiculaires aux plans des bases ou faisant des angles égaux avec les diamètres correspondants des bases, ont entre eux le même rapport que les diamètres correspondants des bases.

Au sujet des ellipsoïdes, nous proposons d'examiner pour quelles raisons, si une figure ellipsoïde est coupée par un plan passant par le centre et perpendiculaire à l'axe, chacun des segments ainsi produits est équivalent au double du cône ayant même base et même axe que le segment[1], et pourquoi, si la figure est coupée par un plan qui est bien perpendiculaire à l'axe, mais qui ne passe pas par le centre, le rapport du plus grand des segments ainsi produits au cône ayant même base et même axe que le segment est égal au rapport de la somme de la moitié de l'axe de l'ellipsoïde et de l'axe du plus petit des deux segments à l'axe du plus petit segment, et que le rapport du plus petit segment au cône ayant même base et même axe que le segment est égal au rapport de la somme de la moitié de l'axe de l'ellipsoïde et de l'axe du plus grand des segments à l'axe du plus grand segment[2], et pourquoi, si un ellipsoïde est coupé par un plan qui passe bien par le centre mais qui n'est pas perpendiculaire à l'axe, chacun des deux segments ainsi produits est équivalent au double de la figure ayant même base et même axe que le

1. Cf. prop. 27.
2. Cf. prop. 29.

των, ὧν κα οἱ ἄξονες ποτὶ τὰς διαμέτρους τὸν αὐτὸν λόγον ἔχωντι. Τμάματα δὲ σφαιροειδέων σχημάτων καὶ κωνοειδέων ὁμοῖα καλείσθω, εἴ κα ἀφ' ὁμοίων σχημάτων ἀφαιρημένα ἔωντι καὶ τάς τε βάσεις ὁμοίας ἔχωντι, καὶ οἱ ἄξονες αὐτῶν ἤτοι ὀρθοὶ ἐόντες ποτὶ τὰ ἐπίπεδα τῶν βάσιων ἢ γωνίας ἴσας ποιοῦντες ποτὶ τὰς ὁμολόγους διαμέτρους τῶν βάσιων τὸν αὐτὸν ἔχωντι λόγον ποτ' ἀλλάλους ταῖς ὁμολόγοις διαμέτροις τῶν βάσιων.

Προβάλλεται δὲ περὶ τῶν σφαιροειδέων τάδε θεωρῆσαι· διὰ τί, εἴ κά τι τῶν σφαιροειδέων σχημάτων ἐπιπέδῳ τμαθῇ διὰ τοῦ κέντρου ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, τῶν γεναμένων τμαμάτων ἑκάτερον διπλάσιον ἐσσεῖται τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, εἰ δέ κα ὀρθῷ μὲν ποτὶ τὸν ἄξονα τῷ ἐπιπέδῳ τμαθῇ, μὴ διὰ τοῦ κέντρου δέ, τῶν γεναμένων τμαμάτων τὸ μὲν μεῖζον ποτὶ τὸν κῶνον τὸν τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἕξει τὸν λόγον, ὃν ἁ συναμφοτέραις ἴσα τᾷ τε ἡμισείᾳ τᾶς εὐθείας, ἅ ἐστιν ἄξων τοῦ σφαιροειδέος, καὶ τῷ ἄξονι τῷ τοῦ ἐλάσσονος τμάματος ποτὶ τὸν ἄξονα τοῦ ἐλάσσονος τμάματος, τὸ δὲ ἔλασσον τμᾶμα ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ συναμφοτέραις ἴσα τᾷ τε ἡμισείᾳ τᾶς εὐθείας, ἅ ἐστιν ἄξων τοῦ σφαιροειδέος, καὶ τῷ ἄξονι τῷ τοῦ μείζονος τμάματος ποτὶ τὸν ἄξονα τοῦ μείζονος τμάματος· καὶ διὰ τί, εἴ κα τῶν σφαιροειδέων τι ἐπιπέδῳ τμαθῇ διὰ τοῦ κέντρου μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, τῶν γεναμένων τμαμάτων ἑκάτερον διπλάσιον ἐσσεῖται τοῦ σχήματος τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν·

1 *κα* Heiberg : *καὶ* BDEGH ‖ 2 ἔχωντι Heiberg : ἔχοντι DEGH ‖ 4 ἔχωντι Heiberg : ἔχοντι DEGH ‖ 7 ἔχωντι Heiberg : ἔχοντι DEGH ‖ 14 μὴ Torellius : om. BDEGH ‖ 17 τοῦτον Torellius : om. BDEGH.

segment ; or cette figure est un segment de cône[1]. Mais si l'ellipsoïde est coupé par un plan qui ne passe pas par le centre ni n'est perpendiculaire à l'axe, le plus grand des segments ainsi produits aura à la figure de même base et de même axe que le segment un rapport égal au rapport de la somme de la moitié du segment de droite joignant les sommets des segments et de l'axe du plus petit segment à l'axe du plus petit segment[2], et le plus petit segment aura à la figure de même base et de même axe que le segment un rapport égal au rapport de la somme de la moitié du segment de droite joignant les sommets des segments et de l'axe du plus grand segment à l'axe du plus grand segment ; or, là aussi, la figure en question est un segment de cône[3].

Ces théorèmes démontrés, on découvre par leur moyen de nombreux théorèmes et problèmes[4], par exemple celui que voici : les sphéroïdes semblables et les segments semblables des figures sphéroïdes et conoïdes sont entre eux comme les cubes de leurs axes ; dans les figures sphéroïdes de même volume, les carrés sur les diamètres sont dans le rapport inverse des axes et (sc. réciproquement), si dans des figures sphéroïdes les carrés sur les diamètres sont dans le rapport inverse des axes, les sphéroïdes sont équivalents ; (sc. on découvre) des problèmes comme le suivant : découper d'une figure sphéroïde ou conoïde donnée un segment par un plan parallèle à un plan donné, de manière que le segment découpé soit équivalent à un cône ou à un cylindre donné ou à une sphère donnée.

Après avoir noté d'abord les théorèmes et problèmes

1. Cf. prop. 28.
2. Cf. prop. 32.
3. Cf. prop. 30.
4. Ces découvertes, dont la démonstration ne figure pas dans l'œuvre conservée d'Archimède, ont été traitées par deux savants du XVII[e] siècle, Rivaut (Riualtus), *Archimedis opera*, Paris 1615, p. 328 sq., et Sturm, *Des unvergleichlichen Archimedis Kunstbücher*, Nuremberg 1670, p. 377 sq.

γίγνεται δὲ τὸ σχῆμα ἀπότμαμα κώνου· εἰ δέ κα μήτε διὰ τοῦ κέντρου μήτε ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα τῷ ἐπιπέδῳ τμαθῇ τὸ σφαιροειδές, τῶν γεναμένων τμαμάτων τὸ μὲν μεῖζον ποτὶ τὸ σχῆμα τὸ βάσιν ἔχον τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἕξει τὸν λόγον, ὃν ἁ συναμφοτέραις ἴσα τᾷ τε ἡμισέᾳ αὐτᾶς τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰς κορυφὰς τῶν τμαμάτων καὶ τῷ ἄξονι τῷ τοῦ ἐλάσσονος τμάματος ποτὶ τὸν ἄξονα τὸν τοῦ ἐλάσσονος τμάματος, τὸ δὲ ἔλασσον τμᾶμα ποτὶ τὸ σχῆμα τὸ βάσιν ἔχον τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἕξει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ συναμφοτέραις ἴσα τᾷ τε ἡμισέᾳ τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰς κορυφὰς τῶν τμαμάτων καὶ τῷ ἄξονι τοῦ μείζονος τμάματος ποτὶ τὸν ἄξονα τὸν τοῦ μείζονος τμάματος· γίνεται δὲ καὶ ἐν τούτοις τὸ σχῆμα ἀπότμαμα κώνου.

Ἀποδειχθέντων δὲ τῶν εἰρημένων θεωρημάτων διὰ τούτων εὑρίσκονται θεωρήματά τε πολλὰ καὶ προβλήματα, οἷον καὶ τόδε· ὅτι τὰ ὁμοῖα σφαιροειδέα καὶ τὰ ὁμοῖα τμάματα τῶν τε σφαιροειδέων σχημάτων καὶ τῶν κωνοειδέων τριπλασίονα λόγον ἔχοντι ποτ' ἄλλαλα τῶν ἀξόνων, καὶ διότι τῶν ἴσων σφαιροειδέων σχημάτων τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων ἀντιπεπόνθασι τοῖς ἀξόνεσσιν, καὶ εἴ κα τῶν σφαιροειδέων σχημάτων τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων ἀντιπεπόνθωντι τοῖς ἀξόνεσσιν, ἴσα ἐντὶ τὰ σφαιροειδέα· πρόβλημα δὲ οἷον καὶ τόδε· ἀπὸ τοῦ δοθέντος σφαιροειδέος σχήματος ἢ κωνοειδέος τμᾶμα ἀποτεμεῖν ἐπιπέδῳ παρὰ δοθὲν ἐπίπεδον ἀγμένῳ, εἶμεν δὲ τὸ ἀποτμαθὲν τμᾶμα ἴσον τῷ δοθέντι κώνῳ ἢ κυλίνδρῳ ἢ σφαίρᾳ τᾷ δοθείσᾳ.

Προγράψαντες οὖν τά τε θεωρήματα καὶ τὰ ἐπιτάγματα

12 τοῦ cod. : τῷ τοῦ Heiberg || 19 ποτ' ἄλλαλα Torellius : ποτὶ τὰ ἄλλα BDEGH || 20 διότι DEGH : δὴ ὅτι B || 23 ἀντιπεπόνθωντι Heiberg : ἀντιπεπόνθασι DEGH || 25 σχήματος Nizzius : τμάματος BDEGH.

utiles pour la démonstration de ces théorèmes et problèmes, je te ferai connaître par écrit les propositions indiquées. Sois heureux.

Définitions.

Si un cône est coupé par un plan rencontrant toutes ses génératrices, l'intersection sera ou bien un cercle ou bien une ellipse. Si l'intersection est un cercle, il est évident que le segment découpé du côté du sommet du cône sera un cône ; si l'intersection est une ellipse, que le segment découpé du côté du sommet soit nommé segment de cône ; appelons base de ce segment l'aire limitée par l'ellipse, sommet le point qui est aussi sommet du cône, et axe le segment de droite mené du sommet du cône au centre de l'ellipse[1].

Si un cylindre est coupé par deux plans parallèles rencontrant toutes les générations du cylindre, les intersections seront ou bien des cercles ou bien des ellipses qui seront des figures équivalentes et semblables (c'est-à-dire congruentes) entre elles. Si les intersections sont des cercles, il est évident que la figure découpée du cylindre, comprise entre les plans parallèles, sera un cylindre ; si les intersections sont des ellipses, appelons la figure découpée du cylindre, comprise entre les plans parallèles, tronc de cylindre ; appelons base du tronc les aires limitées par les ellipses, axe le segment

1. Cf. Apollonius, *Con.* I, 4 et I, 13.

τὰ χρεῖαν ἔχοντα εἰς τὰς ἀποδείξιας αὐτῶν μετὰ ταῦτα γραψοῦμές τοι τὰ προκείμενα. Εὐτύχει.

⟨ΟΡΟΙ⟩

Εἴ κα κῶνος ἐπιπέδῳ τμαθῇ συμπίπτοντι πάσαις ταῖς τοῦ κώνου πλευραῖς, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ἤτοι κύκλος ἢ ὀξυγωνίου κώνου τομά. Εἰ μὲν οὖν κύκλος ἁ τομά, δῆλον ὅτι τὸ ἀπολαφθὲν ἀπ' αὐτοῦ τμᾶμα ἐπὶ τὰ αὐτὰ τᾷ τοῦ κώνου κορυφᾷ κῶνος ἐσσεῖται· εἰ δέ κα ἁ τομὰ γένηται ὀξυγωνίου κώνου τομά, τὸ ἀπολαφθὲν ἀπὸ τοῦ κώνου σχῆμα ἐπὶ τὰ αὐτὰ τᾷ τοῦ κώνου κορυφᾷ ἀπότμαμα κώνου καλείσθω, τοῦ δὲ ἀποτμάματος βάσις μὲν καλείσθω τὸ ἐπίπεδον τὸ περιλαφθὲν ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, κορυφὰ δὲ τὸ σαμεῖον, ὃ καὶ τοῦ κώνου κορυφά, ἄξων δὲ ἁ ἀπὸ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου ἐπὶ τὸ κέντρον τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἐπιζευχθεῖσα εὐθεῖα.

Καὶ εἴ κα κύλινδρος δυοῖς ἐπιπέδοις παραλλήλοις τμαθῇ συμπιπτόντεσσι πάσαις ταῖς τοῦ κυλίνδρου πλευραῖς, αἱ τομαὶ ἐσσοῦνται ἤτοι κύκλοι ἢ ὀξυγωνίων κώνων τομαὶ ἴσαι καὶ ὁμοῖαι ἀλλάλαις. Εἰ μὲν οὖν κα αἱ τομαὶ κύκλοι γένωνται, δῆλον ὅτι τὸ ἀποτμαθὲν ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου σχῆμα μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων κύλινδρος ἐσσεῖται· εἰ δέ κα αἱ τομαὶ γένωνται ὀξυγωνίων κώνων τομαί, τὸ ἀπολαφθὲν ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου σχῆμα μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τόμος κυλίνδρου καλείσθω, τοῦ δὲ τόμου βάσις μὲν καλείσθω τὰ ἐπίπεδα τὰ περιλαφθέντα ὑπὸ τᾶν τῶν ὀξυγωνίων κώνων τομᾶν, ἄξων δὲ ἁ ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα τὰ κέντρα τᾶν τῶν ὀξυγωνίων

3 ΟΡΟΙ add. Stamatis ‖ 4 *πάσαις* G : *πᾶσαι* DEH ‖ 15 *ἐπιζευχθεῖσα* G : *ἐπιζευχθείσας* DEH ‖ 19 *κα αἱ* Heiberg : *καὶ αἱ* DEH *κ' αἱ* G om. B ‖ 22 *κα αἱ* Heiberg : *καὶ αἱ* BDEH *κ' αἱ* G.

de droite joignant les centres des ellipses ; ce segment est situé sur la même droite que l'axe du cylindre.

LEMME

Si on se donne un nombre quelconque de grandeurs se dépassant les unes les autres de la même quantité, et que la différence est égale à la plus petite de ces grandeurs, et si on se donne d'autres grandeurs en même nombre que les premières, mais dont chacune est égale à la plus grande des premières, la somme des grandeurs, dont chacune est égale à la plus grande (sc. des grandeurs de la première suite), est inférieure au double de la somme des grandeurs se dépassant de la même quantité, et supérieure au double de la somme de ces grandeurs moins la plus grande. La démonstration de cette proposition est évidente[1].

1.

Si des grandeurs en nombre quelconque ont à d'autres grandeurs, en même nombre, prises deux à deux dans le même rang, le même rapport, que les premières grandeurs, soit dans leur totalité, soit en partie, sont dans un rapport quelconque à d'autres grandeurs, et que les grandeurs de la seconde suite ont, prises dans le même ordre, le même rapport à d'autres grandeurs, le rapport entre la somme des premières grandeurs et la somme des grandeurs qui sont en proportion avec elles est égal au rapport entre la somme des grandeurs de la seconde suite et la somme des grandeurs en proportion avec elles.

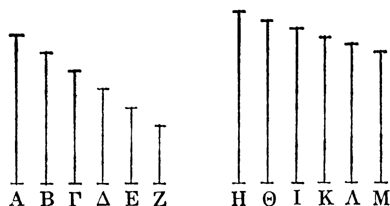


Fig. 66.

1. Elle est développée par Archimède, *Des spirales*, 11.

κώνων τομᾶν · ἐσσεῖται δὲ αὗτα ἐπὶ τᾶς αὐτᾶς εὐθείας τῷ ἄξονι τοῦ κυλίνδρου.

⟨ΛΗΜΜΑ⟩

Εἴ κα ἔωντι μεγέθεα ὁποσαοῦν τῷ ἴσῳ ἀλλάλων ὑπερέχοντα, ᾖ δὲ ἁ ὑπεροχὰ ἴσα τῷ ἐλαχίστῳ, καὶ ἄλλα μεγέθεα τῷ μὲν πλήθει ἴσα τούτοις, τῷ δὲ μεγέθει ἕκαστον ἴσον τῷ μεγίστῳ, πάντα τὰ μεγέθεα, ὧν ἐστιν ἕκαστον ἴσον τῷ μεγίστῳ, πάντων μὲν τῶν τῷ ἴσῳ ὑπερεχόντων ἐλάσσονα ἐσσοῦνται ἢ διπλάσια, τῶν δὲ λοιπῶν χωρὶς τοῦ μεγίστου μείζονα ἢ διπλάσια. Ἁ δὲ ἀπόδειξις τούτου φανερά.

α′.

Εἴ κα μεγέθεα ὁποσαοῦν τῷ πλήθει ἄλλοις μεγέθεσιν ἴσοις τῷ πλήθει κατὰ δύο τὸν αὐτὸν λόγον ἔχωντι τὰ ὁμοίως τεταγμένα, λέγηται δὲ τά τε πρῶτα μεγέθεα ποτ' ἄλλα μεγέθεα ἢ πάντα ἤ τινα αὐτῶν ἐν λόγοις ὁποιοισοῦν, καὶ τὰ ὕστερον ποτ' ἄλλα μεγέθεα τὰ ὁμόλογα ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις, πάντα τὰ πρῶτα μεγέθεα ποτὶ πάντα, ἃ λέγονται, τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, ὃν ἔχοντι πάντα τὰ ὕστερον μεγέθεα ποτὶ πάντα, ἃ λέγονται.

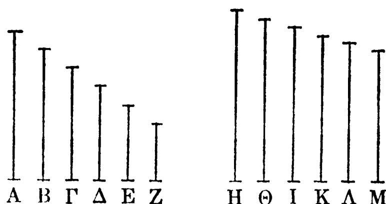


Fig. 66.

1 τομᾶν G : τομά DEH ‖ 3 ΛΗΜΜΑ add. Stamatis ‖ 4 τῷ EG : τὸ DH ‖ 6 πλήθει G : πλήθη DEH ‖ 13 ἔχωντι Heiberg : ἔχοντι DEGH ‖ 15 ποτ' ἄλλα Heiberg : ποτί τ' ἄλλα DEGH ‖ 16 ποτ' ἄλλα G : ποτὶ τὰ ἄλλα DEH ‖ 19 λέγονται EH : λέγωνται DG.

Soient des grandeurs A, B, Γ, Δ, E, Z, et d'autres grandeurs, en même nombre, H, Θ, I, K, Λ, M ; que ces grandeurs aient deux à deux le même rapport, et que A soit à B comme H est à Θ, B à Γ, comme Θ est à I, et ainsi de suite de la même manière ; que les grandeurs A, B, Γ, Δ, E, Z aient des rapports quelconques à d'autres grandeurs N, Ξ, O, Π, P, Σ, et que les grandeurs H, Θ, I, K, Λ, M, prises dans le même ordre, aient les mêmes rapports à d'autres grandeurs T, Υ, Φ, X, Ψ, Ω ; que A soit à N comme H est à T, B à Ξ comme Θ est à Υ, et ainsi de suite de la même manière ; il faut montrer que le rapport entre la somme de A, B, Γ, Δ, E, Z et la somme de N, Ξ, O, Π, P, Σ est égal au rapport entre la somme de H, Θ, I, K, Λ, M et la somme de T, Υ, Φ, X, Ψ, Ω.

En effet, du moment que N est à A comme T est à H, que A est à B comme H est à Θ, que B est à Ξ comme Θ est à Υ, N sera à Ξ comme T est à Υ[1] ; pour les mêmes raisons, Ξ sera aussi à O, comme Υ est à Φ, et ainsi de suite de la même manière. La somme de A, B, Γ, Δ, E, Z est donc à A comme la somme de H, Θ, I, K, Λ, M est à H ; A est à N comme H est à T[2], et N est à la somme de N, Ξ, O, Π, P, Σ comme T est à la somme de T, Υ, Φ, X, Ψ, Ω ; il est donc évident que la somme de A, B, Γ, Δ, E, Z est à la somme de N, Ξ, O, Π, P, Σ comme la somme de H, Θ, I, K, Λ, M est à la somme de T, Υ, Φ, X, Ψ, Ω[3].

Mais il est évident que même si, parmi les grandeurs A, B, Γ, Δ, E, Z, les grandeurs A, B, Γ, Δ, E ont bien

1. Cf. Eucl. V, 22.
2. Cf. Eucl. V, 7, coroll.
3. Cf. Eucl. V, 22.

Ἔστω τινὰ μεγέθεα τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ ἄλλοις μεγέθεσιν ἴσοις τῷ πλήθει τοῖς Η, Θ, Ι, Κ, Λ, Μ κατὰ δύο τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, καὶ ἐχέτω τὸ μὲν Α ποτὶ τὸ Β τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ Η ποτὶ τὸ Θ, τὸ δὲ Β ποτὶ τὸ Γ, ὃν τὸ Θ ποτὶ τὸ Ι, καὶ τὰ ἄλλα ὁμοίως τούτοις, λεγέσθω δὲ τὰ μὲν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ μεγέθεα ποτ᾽ ἄλλα μεγέθεα τὰ Ν, Ξ, Ο, Π, Ρ, Σ ἐν λόγοις ὁποιοισοῦν, τὰ δὲ Η, Θ, Ι, Κ, Λ, Μ ποτ᾽ ἄλλα τὰ Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ, Ω τὰ ὁμόλογα ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις, καὶ ὃν μὲν ἔχει λόγον τὸ Α ποτὶ τὸ Ν, τὸ Η ἐχέτω ποτὶ τὸ Τ, ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ Β ποτὶ τὸ Ξ, τὸ Θ ἐχέτω ποτὶ τὸ Υ, καὶ τὰ ἄλλα ὁμοίως τούτοις· δεικτέον ὅτι πάντα τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ ποτὶ πάντα τὰ Ν, Ξ, Ο, Π, Ρ, Σ τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον, ὃν πάντα τὰ Η, Θ, Ι, Κ, Λ, Μ ποτὶ πάντα τὰ Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ, Ω.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν Ν ποτὶ τὸ Α τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ Τ ποτὶ τὸ Η, τὸ δὲ Α ποτὶ τὸ Β, ὃν τὸ Η ποτὶ τὸ Θ, τὸ δὲ Β ποτὶ τὸ Ξ, ὃν τὸ Θ ποτὶ τὸ Υ, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον τὸ Ν ποτὶ τὸ Ξ, ὃν τὸ Τ ποτὶ τὸ Υ· διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ τὸ Ξ ποτὶ τὸ Ο, ὃν τὸ Υ ποτὶ τὸ Φ, καὶ τούτοις τὰ ἄλλα ὁμοίως. Ἔχοντι δὴ τὰ μὲν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ πάντα ποτὶ τὸ Α τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχοντι τὰ Η, Θ, Ι, Κ, Λ, Μ πάντα ποτὶ τὸ Η, τὸ δὲ Α ποτὶ τὸ Ν, ὃν τὸ Η ποτὶ τὸ Τ, τὸ δὲ Ν ποτὶ πάντα τὰ Ν, Ξ, Ο, Π, Ρ, Σ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ Τ ποτὶ πάντα τὰ Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ, Ω· δῆλον οὖν, ὅτι πάντα τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ ποτὶ πάντα τὰ Ν, Ξ, Ο, Π, Ρ, Σ τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον, ὃν πάντα τὰ Η, Θ, Ι, Κ, Λ, Μ ποτὶ πάντα τὰ Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ, Ω.

Φανερὸν δὲ ὅτι καὶ εἴ κα τῶν τε Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ μεγεθέων τὰ μὲν Α, Β, Γ, Δ, Ε λέγωνται ποτὶ τὰ Ν, Ξ, Ο, Π, Ρ, τὸ

6 ποτ᾽ ἄλλα Heiberg : ποτί τ᾽ ἄλλα DEGH ‖ 8 ποτ᾽ ἄλλα Heiberg : ποτί τ᾽ ἄλλα DEGH ‖ 9 καὶ add. Heiberg ‖ 21 ἔχοντι EG : ἔχωντι DH ‖ 26 ἔχοντι EG : ἔχωντι DH ‖ 29 Ρ Torellius : ΡΣ mss. BDEGH.

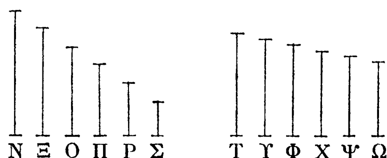


Fig. 67.

un rapport à N, Ξ, O, Π, P, sans que Z n'ait de rapport avec aucune grandeur, et que, parmi les grandeurs H, Θ, I, K, Λ, M, les grandeurs H, Θ, I, K, Λ ont bien un rapport aux grandeurs T, Υ, Φ, X, Ψ, placées dans le même rang dans la même proportion, sans que M n'ait de rapport avec aucune grandeur, la somme de A, B, Γ, Δ, E, Z sera, d'une manière semblable, à la somme de N, Ξ, O, Π, P comme la somme de H, Θ, I, K, Λ, M est à la somme de T, Υ, Φ, X, Ψ.

2.

Étant donné un nombre quelconque de (sc. segments de) lignes (sc. droites), si on applique à chacun d'eux une aire dont l'excès est un carré, si les côtés des aires en excès se dépassent l'un l'autre de la même quantité, la différence étant égale au plus petit côté, et s'il y a d'autres aires, en même nombre que les premières, dont chacune est de la même grandeur que la plus grande (sc. de la première suite), le rapport de la somme de ces dernières aires à la somme des aires de la première suite sera inférieur au rapport entre la somme du côté de la plus grande figure en excès et d'un des côtés égaux d'une part et la somme, d'autre part, du tiers du côté de la plus grande figure en excès et la moitié d'un des côtés égaux, mais le rapport de la même somme à la somme des aires de la première suite sans la plus grande sera supérieur au rapport des sommes de segments indiqué.

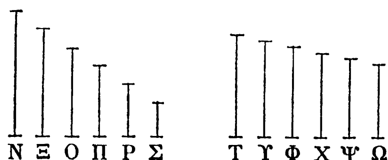


Fig. 67.

δὲ Ζ μηδὲ ποθ' ἓν λέγηται, καὶ τῶν Η, Θ, Ι, Κ, Λ, Μ τὰ μὲν Η, Θ, Ι, Κ, Λ λέγωνται ποτὶ τὰ Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ, τὰ ὁμοῖα ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις, τὸ δὲ Μ μηδὲ ποθ' ἓν λέγηται, ὁμοίως πάντα τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ ποτὶ πάντα τὰ Ν, Ξ, Ο, Π, Ρ τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, ὃν πάντα τὰ Η, Θ, Ι, Κ, Λ, Μ ποτὶ πάντα τὰ Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ.

β′.

Εἴ κα γραμμαὶ ἴσαι ἀλλάλαις ἔωντι ὁποσαιοῦν τῷ πλήθει, καὶ παρ' ἑκάσταν αὐτᾶν παραπέσῃ τι χωρίον ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ, ἔωντι δὲ αἱ πλευραὶ τῶν ὑπερβλημάτων τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερέχουσαι καὶ ἁ ὑπεροχὰ ἴσα τᾷ ἐλαχίστᾳ, ἔωντι δὲ καὶ ἄλλα χωρία τῷ μὲν πλήθει ἴσα τούτοις, τῷ δὲ μεγέθει ἕκαστον ἴσον τῷ μεγίστῳ, ποτὶ μὲν πάντα τὰ ἕτερα χωρία ἐλάσσονα λόγον ἑξοῦντι τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἴσα συναμφοτέραις τᾷ τε τοῦ μεγίστου ὑπερβλήματος πλευρᾷ καὶ μιᾷ τᾶν ἰσᾶν ἐουσᾶν ποτὶ τὰν ἴσαν συναμφοτέραις τῷ τε τρίτῳ μέρει τᾶς τοῦ μεγίστου ὑπερβλήματος πλευρᾶς καὶ τᾷ ἡμισέᾳ μιᾶς τᾶν ἰσᾶν ἐουσᾶν, ποτὶ δὲ τὰ λοιπὰ χωρία ἄνευ τοῦ μεγίστου μείζονα λόγον ἑξοῦντι τοῦ αὐτοῦ λόγου.

1 μηδὲ ποθ' ἓν B : μηδέποθεν DEGH ‖ 2 Ψ Torellius : ΨΩ mss. BDEGH ‖ 3 μηδὲ ποθ' ἓν B : μηδέποθεν DEGH ‖ 5 Ρ Torellius : ΡΣ mss. BDEGH ‖ 6 Ψ Torellius : ΨΩ mss. BDEGH ‖ 9 παραπέσῃ Heiberg : παρεμπέσῃ DEGH ‖ 15 τᾷ B : ταῖς DEGH ‖ 16 πλευρᾷ B : πλευραῖς DEGH.

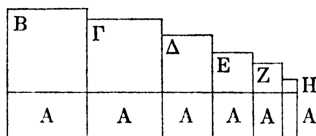


Fig. 68.

Soit, en effet, un nombre quelconque de segments de droite égaux, marqués par la lettre A ; appliquons à chacun de ces segments une aire dont l'excès est un carré ; soient B, Γ, Δ, E, Z, H les côtés des figures en excès ; qu'ils se dépassent les uns les autres ; que la différence soit égale au plus petit côté ; soit B le plus grand, H le plus petit des côtés ; soient aussi d'autres aires, marquées chacune par les points Θ, I, K, Λ, leur nombre étant égal à celui des aires de la première suite ; que chacune de ces aires soit égale en grandeur à la plus grande aire, celle qui est appliquée au segment AB ; que le segment ΘI soit égal à A, le segment KΛ égal à B ; que la somme des segments Θ et I soit égale au double du segment I ; que la somme des segments K et Λ soit égale au triple du segment K ; il faut montrer que le rapport entre les aires marquées par les points Θ, I, K, Λ et la somme des autres aires, soit AB, AΓ, AΔ, AE, AZ et AH est inférieur au rapport du segment de droite ΘIKΛ à IK, mais que le rapport entre la première somme à la seconde, diminuée de la plus grande aire AB, est supérieur au rapport de ΘIKΛ à IK.

Λ		Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ
K		K	K	K	K	K	K
I		I	I	I	I	I	I
Θ		Θ	Θ	Θ	Θ	Θ	Θ

Fig. 69.

Il y a en effet des aires marquées par les lettres A se dépassant l'une l'autre de la même quantité,

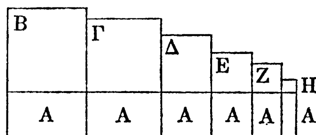


Fig. 68.

Ἔστωσαν γὰρ ἴσαι εὐθεῖαι ὁποσαιοῦν τῷ πλήθει, ἐφ' ἇν τὰ Α, καὶ παραπεπτωκέτω παρ' ἑκάσταν αὐτᾶν χωρίον ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ, ἔστων δὲ τῶν ὑπερβλημάτων πλευραὶ αἱ Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερέχουσαι, καὶ ἁ ὑπεροχὰ ἔστω ἴσα τᾷ ἐλαχίστᾳ, καὶ μεγίστα μὲν ἔστω ἁ Β, ἐλαχίστα δὲ ἁ Η· ἔστω δὲ καὶ ἄλλα χωρία, ἐφ' ὧν ἕκαστον τῶν Θ, Ι, Κ, Λ, τῷ μὲν πλήθει ἴσα τούτοις, τῷ δὲ μεγέθει ἕκαστον ἴσον ἔστω τῷ μεγίστῳ τῷ παρὰ τὰν ΑΒ παρακειμένῳ, ἔστω δὲ ἁ μὲν ΘΙ γραμμὰ ἴσα τᾷ Α, ἁ δὲ ΚΛ ἴσα τᾷ Β, καὶ τᾶν μὲν ΘΙ γραμμᾶν ἑκάστα ἔστω διπλασία τᾶς Ι, τᾶν δὲ ΚΛ ἑκάστα τριπλασία τᾶς Κ· δεικτέον ὅτι τὰ χωρία πάντα, ἐν οἷς τὰ Θ, Ι, Κ, Λ, ποτὶ μὲν πάντα τὰ ἕτερα χωρία τὰ ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ, ΑΖ, ΑΗ ἐλάσσονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει ἁ ΘΙΚΛ εὐθεῖα ποτὶ τὰν ΙΚ, ποτὶ δὲ τὰ λοιπὰ ἄνευ τοῦ μεγίστου τοῦ ΑΒ μείζονα λόγον ἔχοντι τοῦ αὐτοῦ λόγου.

Λ		Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ
K		K	K	K	K	K	K
I		I	I	I	I	I	I
Θ		Θ	Θ	Θ	Θ	Θ	Θ

Fig. 69.

Ἔστι γάρ τινα χωρία, ἐν οἷς τὰ Α, τῷ ἴσῳ ἀλλάλων ὑπερέχοντα, καὶ ἁ ὑπεροχὰ ἴσα τῷ ἐλαχίστῳ [ἐπεί τε

3 τῶν add. Heiberg || 6 ἔστω alt. Heiberg : ἢ DEGH || 7 ἐφ' add. Torellius || 10 τᾶν B : τὰ DEGH || γραμμᾶν B : γραμμὰ DEGH.

et la différence est égale à la plus petite d'entre elles[1], puisque les aires appliquées et les largeurs se dépassent de la même quantité ; d'autres aires, marquées par les lettres Θ et I, sont en même nombre que les aires de la première suite, et chacune d'elles est égale en grandeur à la plus grande aire de la première suite ; la somme des aires marquées par les lettres Θ et I est donc inférieure au double de la somme des aires marquées par les lettres A, mais supérieure à la double somme des autres aires sans la plus grande. Il s'ensuit que la somme des aires elles-mêmes, marquées par I, est inférieure à la somme des aires marquées par A, mais supérieure à la somme des autres aires moins la plus grande. D'autre part, il y a une suite de segments de droite B, Γ, Δ, E, Z, H se dépassant l'un l'autre d'une même quantité égale au plus petit de ces segments, et une autre suite de segments de droite, marqués par les lettres K et Λ, d'un nombre égal à celui de la première suite, chaque segment étant égal au plus grand segment de la première suite ; la somme des carrés sur les segments égaux entre eux et au plus grand segment de la première suite est donc inférieure au triple de la somme des carrés sur les segments se dépassant les uns les autres de la même quantité, mais elle est supérieure au triple de la somme des carrés sur les autres segments moins le carré sur le plus grand ; cette proposition a été démontrée, en effet, dans notre traité sur les spirales[2]. Dès lors, la somme des aires marquées par la lettre K est inférieure à la somme des aires marquées par les lettres B, Γ, Δ, E, Z, H, mais elle est supérieure à la somme des aires marquées par les lettres Γ, Δ, E, Z, H ; il s'ensuit que la somme des aires marquées par I et K est aussi inférieure à la somme des aires marquées par AB, AΓ, AΔ, AE, AZ, AH, mais supérieure à la somme des aires marquées par AΓ, AΔ, AE, AZ, AH. Il est donc évident que la somme des aires marquées par les points Θ, I, K,

1. Cf. Eucl. VI, 1.
2. Cf. *Des spirales*, prop. 10.

τὰ παραβλήματα καὶ τὰ πλάτη τῷ ἴσῳ ὑπερέχουσιν], καὶ ἄλλα χωρία, ἐν οἷς τὰ Θ, Ι, τῷ μὲν πλήθει ἴσα τούτοις, τῷ δὲ μεγέθει ἕκαστον ἴσον τῷ μεγίστῳ· σύμπαντα οὖν τὰ χωρία, ἐν οἷς τὰ Θ, Ι, πάντων μὲν τῶν ἐν οἷς τὰ Α ἐλάσσονά ἐντι ἢ διπλασίονα, τῶν δὲ λοιπῶν χωρὶς τοῦ μεγίστου μείζονα ἢ διπλασίονα. Αὐτὰ οὖν τὰ χωρία, ἐν οἷς τὰ Ι, πάντων μὲν τῶν ἐν οἷς τὰ Α ἐλάσσονά ἐντι, τῶν δὲ λοιπῶν ἄνευ τοῦ μεγίστου μείζονα. Πάλιν ἐντὶ γραμμαί τινες αἱ Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερέχουσαι, καὶ ἁ ὑπεροχὰ ἴσα τᾷ ἐλαχίστᾳ, καὶ ἄλλαι γραμμαί, ἐφ' ἃν τὰ Κ, Λ, τῷ μὲν πλήθει ἴσαι ταύταις, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα ἴσα τᾷ μεγίστᾳ· τὰ οὖν τετράγωνα τὰ ἀπὸ πασᾶν τᾶν ἰσᾶν ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ πάντων μὲν τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν ἐλάσσονά ἐντι ἢ τριηλάσια, τῶν δὲ λοιπῶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας τετραγώνου μείζονα ἢ τριπλάσια· δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς περὶ τᾶν ἑλίκων ἐκδεδομένοις. Τὰ οὖν χωρία, ἐν οἷς τὸ Κ, πάντων μὲν τῶν χωρίων, ἐν οἷς τὰ Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, ἐλάσσονά ἐστιν, αὐτῶν δὲ τῶν ἐν οἷς τὰ Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, μείζονα· ὥστε καὶ πάντα τὰ χωρία, ἐν οἷς τὰ Ι, Κ, πάντων μὲν τῶν ἐν οἷς τὰ ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ, ΑΖ, ΑΗ, ἐλάσσονά ἐστι, τῶν δὲ ἐν οἷς τὰ ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ, ΑΖ, ΑΗ, μείζονα. Δῆλον οὖν ὅτι πάντα τὰ χωρία, ἐν οἷς τὰ Θ, Ι, Κ, Λ ποτὶ μὲν τὰ χωρία,

6 μείζονα G : μεῖζον DEH || 10 ὑπεροχὰ ἴσα B : ὑπερέχουσαι ἴσαι DEGH || 12 ἴσα B : ἴσαι DEGH || 14 τᾶν Heiberg : πάντων BDEGH πασᾶν Torellius || ὑπερεχουσᾶν B : ὑπερέχουσαι DEGH || 17 ἑλίκων Heiberg : ἑλικᾶν DEGH || 21 τὰ add. Heiberg || 22 τὰ add. Heiberg.

Λ a à la somme des aires marquées par ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ, ΑΖ, ΑΗ un rapport inférieur au rapport de ΘΛ à ΙΚ, mais qu'elle a à la somme des autres aires, moins l'aire marquée par ΑΒ, un rapport supérieur au rapport de ΘΛ à ΙΚ[1].

3.

Si des droites issues du même point sont tangentes à une section conique de quelque genre que ce soit, et si d'autres droites sont menées dans la section conique, parallèles aux tangentes et se coupant les unes les autres, les rectangles compris entre les segments (sc. déterminés sur les cordes par leur point d'intersection) auront entre eux le même rapport que les carrés sur les tangentes ; le rectangle compris entre les segments de l'une des cordes correspondra au carré sur la tangente qui lui est parallèle. Cette proposition a été démontrée dans les Éléments des coniques[2].

Si on découpe de la même parabole, de quelque manière que ce soit, deux segments ayant des diamètres égaux, les segments eux-mêmes et les triangles, inscrits dans ces segments, ayant même base et même hauteur que les segments seront égaux ; or j'appelle diamètre de tout segment la droite qui coupe en deux parties égales toutes les cordes menées parallèlement à sa base.

Soit une parabole ΑΒΓ ; découpons-en deux segments ΑΔΕ et ΘΒΓ ; soit ΔΖ le diamètre du segment ΑΔΕ, ΒΗ le diamètre du segment ΘΒΓ ; que ΔΖ et ΒΗ soient égaux ; il faut montrer que les segments ΑΔΕ et ΘΒΓ ainsi que les triangles qui y sont inscrits de la manière indiquée sont égaux.

1. Cf. Eucl. V, 8 et VI, 1.

2. C'est-à-dire dans le traité, perdu, d'Euclide ; une démonstration de cette proposition se trouve dans Apollonius, *Con.* III, 17.

ἐν οἷς τὰ ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ, ΑΖ, ΑΗ, ἐλάσσονα λόγον ἔχοντι τοῦ ὃν ἔχει ἁ ΘΛ ποτὶ τὰν ΙΚ, ποτὶ δὲ τὰ λοιπὰ χωρὶς τοῦ ἐν ᾧ τὸ ΑΒ μείζονα τοῦ αὐτοῦ λόγου.

γ′.

Εἴ κα κώνου τομᾶς ὁποιασοῦν εὐθεῖαι ἐπιψαύωντι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σαμείου ἀγμέναι, ἔωντι δὲ καὶ ἄλλαι εὐθεῖαι ἐν τᾷ τοῦ κώνου τομᾷ παρὰ τὰς ἐπιψαυούσας ἀγμέναι καὶ τέμνουσαι ἀλλάλας, τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν τμαμάτων τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον ποτ᾽ ἄλλαλα, ὃν τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν ἐπιψαυουσᾶν· ὁμόλογον δὲ ἐσσεῖται τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τᾶς ἑτέρας γραμμᾶς τμαμάτων τῷ τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τᾶς ἐπιψαυούσας τᾶς παραλλήλου αὐτᾷ. Ἀποδέδεικται δὲ τοῦτο ἐν τοῖς κωνικοῖς στοιχείοις.

Εἴ κα ἀπὸ τᾶς αὐτᾶς ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς δύο τμάματα ἀποτμαθέωντι ὁπωσοῦν ἴσας ἔχοντα τὰς διαμέτρους, αὐτὰ δὲ τὰ τμάματα ἴσα ἐσσοῦνται καὶ τὰ τρίγωνα τὰ ἐγγραφόμενα εἰς αὐτὰ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς τμαμάτεσσι καὶ ὕψος τὸ αὐτό· διάμετρον δὲ καλέω παντὸς τμάματος τὰν δίχα τέμνουσαν τὰς εὐθείας πάσας τὰς παρὰ τὰν βάσιν αὐτοῦ ἀγομένας.

Ἔστω ὀρθογωνίου κώνου τομὰ ἁ ΑΒΓ, καὶ ἀποτετμήσθω ἀπ᾽ αὐτᾶς δύο τμάματα τό τε ΑΔΕ καὶ τὸ ΘΒΓ, ἔστω δὲ τοῦ μὲν ΑΔΕ τμάματος διάμετρος ἁ ΔΖ, τοῦ δὲ ΘΒΓ ἁ ΒΗ, καὶ ἔστων ἴσαι αἱ ΔΖ, ΒΗ· δεικτέον ὅτι τὰ τμάματα ἴσα ἐστὶ τὰ ΑΔΕ, ΘΒΓ καὶ τὰ τρίγωνα τὰ ἐγγραφόμενα τὸν εἰρημένον τρόπον ἐν αὐτοῖς.

3 τὸ DEGH : τὰ B ‖ μείζονα B Torellius : μείζων DG μεῖζον EH ‖ 9 ποτ᾽ ἄλλαλα Torellius : ποτὶ τὰ ἄλλα BDEGH ‖ 10 ἐσσεῖται B : ἔπειτα DEGH ‖ 11 τῷ add. Heiberg ‖ 11-12 τετραγώνῳ τῷ B : τετράγονον τὸ DEGH ‖ 12 τᾶς alt. add. Heiberg ‖ παραλλήλου B : παραλλήλους DEGH ‖ αὐτᾷ B : αὐτᾶς DEGH ‖ 17 αὐτὰ B : αὐτὰν DEGH ‖ 19 τὰς alt. Basil. : τᾶν DEGH ‖ 24 ἔστων Heiberg : ἔστωσαν EGH.

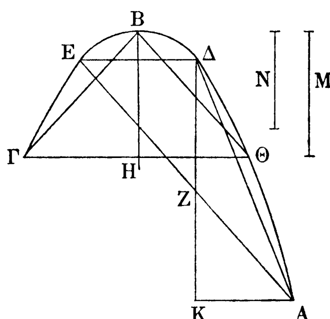


Fig. 70.

Que d'abord la corde ΘΓ découpant l'un des segments soit perpendiculaire au diamètre de la parabole ; prenons le paramètre[1], qui est le segment de droite double du segment mené (sc. du sommet de la parabole) à l'axe (sc. du cône), soit M, et abaissons du point A la perpendiculaire AK à ΔZ. Du moment donc que ΔZ est le diamètre du segment, la corde AE est divisée en deux parties égales au point Z, et ΔZ est parallèle au diamètre de la parabole ; c'est de cette manière, en effet, que ΔZ divise en deux parties égales toutes les cordes menées parallèlement à AE. Que dès lors le rapport du carré sur AZ au carré sur AK soit égal au rapport d'un segment de droite N à M ; les carrés sur les segments menés de la parabole à ΔZ parallèlement à AE sont donc équivalents aux aires appliquées à un segment égal à N et ayant pour largeur les segments de droite qu'ils découpent de ΔZ à partir de l'extrémité Δ ; car cette proposition a été démontrée dans les Éléments des coniques[2] ; le carré sur AZ est donc lui aussi équivalent au rectangle de côtés N et ΔZ. Mais le carré sur ΘH est à son tour équivalent au rectangle de côtés M et BH, puisque ΘH est perpendiculaire au diamètre[3] ; il s'ensuit que le rapport du carré sur AZ

1-3. Cf. les notes complémentaires.

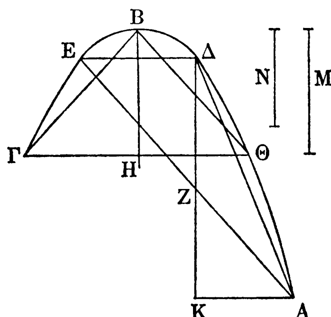


Fig. 70.

Ἔστω δὴ πρῶτον ἁ ἀποτέμνουσα τὸ ἕτερον τμᾶμα ἁ ΘΓ ποτ' ὀρθὰς τᾷ διαμέτρῳ τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, λελάφθω δὲ παρ' ἃν δύνανται αἱ ἀπὸ τᾶς τομᾶς, ἁ διπλασία τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος, καὶ ἔστω ἐφ' ᾇ τὸ Μ, ἀπὸ δὲ τοῦ Α κάθετος ἄχθω ἐπὶ τὰν ΔΖ ἁ ΑΚ. Ἐπεὶ οὖν διάμετρός ἐντι ἁ ΔΖ τοῦ τμάματος, ἁ δὲ ΑΕ δίχα τέμνεται κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἁ ΔΖ παρὰ τὰν διάμετρόν ἐστι τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς · οὕτω γὰρ δίχα τέμνει πάσας τὰς παρὰ τὰν ΑΕ ἀγομένας. Ὃν δὴ λόγον ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΖ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΚ, τοῦτον ἐχέτω ἁ Ν ποτὶ τὰν Μ · αἱ δὴ ἀπὸ τᾶς τομᾶς ἐπὶ τὰν ΔΖ ἀγόμεναι παρὰ τὰν ΑΕ δύνανται τὰ παρὰ τὰν ἴσαν τᾷ Ν παραπίπτοντα πλάτος ἔχοντα, ἃς αὐτοὶ ἀπολαμϐάνοντι ἀπὸ τᾶς ΔΖ ποτὶ τὸ Δ πέρας · δέδεικται γὰρ ἐν τοῖς κωνικοῖς · δύναται οὖν καὶ ἁ ΑΖ ἴσον τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶς Ν καὶ τᾶς ΔΖ. Δύναται δὲ καὶ ἁ ΘΗ ἴσον τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς Μ καὶ τᾶς ΒΗ, ἐπεὶ κάθετός ἐστιν ἁ ΘΗ ἐπὶ τὰν διάμετρον · ἔχοι οὖν κα τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΖ

1 ἁ pr. add. Heiberg ‖ ΘΓ Basil. : ΒΓ mss. BDEGH ‖ 12 Ν Torellius : Μ codd. ‖ 18 ἔχοι οὖν κα Heiberg : ἔχοι καὶ DEGH *habebit et* B.

au carré sur ΘH est égal au rapport de N à M, puisque par hypothèse ΔZ et BH sont égaux. Mais le carré sur AZ a, aussi, au carré sur AK le même rapport que N a à M ; les segments de droite ΘH et AK sont donc égaux[1] ; or BH et ΔZ sont égaux ; par conséquent le rectangle de côtés ΘH et BH est équivalent au rectangle de côtés AK et ΔZ. Il s'ensuit que les triangles ΘHB et ΔAZ sont à leur tour équivalents ; il en est donc de même de leurs doubles. Mais les quatre tiers du triangle AΔE sont équivalents[2] au segment (sc. de parabole) AΔE, et les quatre tiers du triangle ΘBΓ sont équivalents au segment ΘBΓ ; il est donc évident que tant les segments que les triangles qui y sont inscrits sont équivalents.

Mais si aucune des cordes découpant les segments n'est perpendiculaire au diamètre de la parabole, si on enlève du diamètre de la parabole un segment de droite égal au diamètre de l'un des segments (sc. de parabole) et qu'on abaisse de l'extrémité du segment de droite la perpendiculaire au diamètre, le segment ainsi produit sera équivalent à chacun des deux segments. La proposition est donc évidente.

4.

Le rapport de toute aire limitée par une ellipse au cercle ayant un diamètre égal au grand diamètre de l'ellipse est égal au rapport du petit diamètre au grand diamètre de l'ellipse ou au diamètre du cercle.

Soit, en effet, une ellipse ABΓΔ ; soit AΓ son grand diamètre, BΔ son petit diamètre ; soit un cercle de diamètre AΓ ; il faut montrer que l'aire limitée par

1. Cf. Eucl. V, 9.
2. Cf. Archimède, ***La quadr. de la parabole*,** **17 et 24.**

ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΗ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ Ν ποτὶ τὰν Μ, ἐπεὶ ἴσαι ὑπέκειντο αἱ ΔΖ, ΒΗ. Ἔχει δὲ τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΖ τετράγωνον καὶ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΚ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ Ν ποτὶ τὰν Μ· ἴσαι ἄρα ἐντὶ αἱ ΘΗ, ΑΚ. Ἐντὶ δὲ ἴσαι καὶ αἱ ΒΗ, ΔΖ· ὥστε ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΘΗ, ΒΗ περιεχόμενον τῷ ὑπὸ τᾶν ΑΚ, ΔΖ. Ἴσον ἄρα ἐστὶν καὶ τὸ ΘΗΒ τρίγωνον τῷ ΔΑΖ τριγώνῳ· ὥστε καὶ τὰ διπλάσια. Ἔστι δὲ τοῦ μὲν ΑΔΕ τριγώνου ἐπίτριτον τὸ ΑΔΕ τμᾶμα, τοῦ δὲ ΘΒΓ τριγώνου ἐπίτριτον τὸ ΘΒΓ τμᾶμα· δῆλον οὖν ὅτι τά τε τμάματά ἐστιν ἴσα καὶ τὰ τρίγωνα τὰ ἐγγραφόμενα εἰς αὐτά.

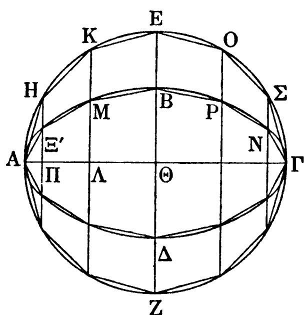
Εἰ δὲ μηδετέρα τᾶν τὰ τμάματα ἀποτεμνουσᾶν ποτ᾽ ὀρθάς ἐντι τᾷ διαμέτρῳ τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ἀπολαφθείσας ἀπὸ τᾶς διαμέτρου τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς ἴσας τᾷ διαμέτρῳ τᾷ τοῦ ἑνὸς τμάματος καὶ ἀπὸ τοῦ πέρατος τᾶς ἀπολαφθείσας ποτ᾽ ὀρθὰς ἀχθείσας τᾷ διαμέτρῳ, τὸ γενόμενον τμᾶμα ἑκατέρῳ τῶν τμαμάτων ἴσον ἐσσεῖται. Δῆλον οὖν ἐστι τὸ προτεθέν.

δ′.

Πᾶν χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ποτὶ τὸν κύκλον τὸν ἔχοντα τὰν διάμετρον ἴσαν τᾷ μείζονι διαμέτρῳ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ἐλάσσων διάμετρος αὐτᾶς ποτὶ τὰν μείζω ἢ ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου διάμετρον.

Ἔστω γὰρ ὀξυγωνίου κώνου τομά, ἐφ᾽ ἇς τὰ Α, Β, Γ, Δ, διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ μὲν μείζων ἔστω, ἐφ᾽ ἇς τὰ Α, Γ, ἁ δὲ ἐλάσσων, ἐφ᾽ ἇς τὰ Β, Δ, ἔστω δὲ κύκλος περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ· δεικτέον ὅτι τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπὸ τᾶς τοῦ

13 διαμέτρῳ B : μησ DEGH ‖ 14 διαμέτρου Torellius : μετὰ BDEGH ‖ 15 τᾷ alt. Heiberg : τᾶς DEGH ‖ 21 τὰν add. Heiberg ‖ 22 τᾶς Torellius : τᾷ DEGH ‖ τομᾶς Torellius : τομᾷ DEGH ‖ 23 ἢ add. Heiberg.



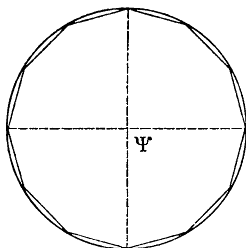
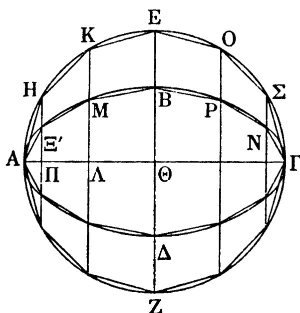


Fig. 71.

l'ellipse a au cercle le même rapport qu'a ΒΔ à ΓΑ, c'est-à-dire à ΕΖ. Que le cercle marqué par Ψ ait donc au cercle ΑΕΓΖ le rapport de ΒΔ à ΕΖ ; je dis que le cercle Ψ est équivalent à l'ellipse.

Si le cercle Ψ n'est pas équivalent à l'aire limitée par l'ellipse, qu'il soit d'abord, si possible, supérieur. Il est dès lors possible d'inscrire au cercle Ψ un polygone (sc. régulier), d'un nombre pair de côtés, qui soit supérieur à l'aire ΑΒΓΔ[1]. Imaginons donc cette inscription faite et inscrivons aussi au cercle ΑΕΓΖ une figure rectiligne semblable à celle qui est inscrite au cercle Ψ ; abaissons de ses sommets les perpendiculaires au diamètre ΑΓ et joignons les points d'intersection entre les perpendiculaires et l'ellipse par des cordes ; il y aura ainsi une figure rectiligne inscrite dans l'ellipse, et elle aura à la figure rectiligne inscrite au cercle ΑΕΓΖ le rapport de ΒΔ à ΕΖ. Car du moment que les perpendiculaires ΕΘ et ΚΛ sont

1. Cf. *De la sph. et du cyl.* I, 6.



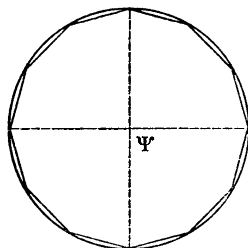


Fig. 71.

ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ποτὶ τὸν κύκλον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ΒΔ ποτὶ τὰν ΓΑ, τουτέστι τὰν ΕΖ. Ὃν δὴ λόγον ἔχει ἁ ΒΔ ποτὶ τὰν ΕΖ, τοῦτον ἐχέτω ὁ κύκλος, ἐν ᾧ τὸ Ψ, ποτὶ τὸν ΑΕΓΖ κύκλον· λέγω ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ Ψ κύκλος τᾷ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ.

Εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσος ὁ Ψ κύκλος τῷ περιεχομένῳ χωρίῳ ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ἔστω πρῶτον, εἰ δυνατόν, μείζων. Δυνατὸν δή ἐστιν εἰς τὸν Ψ κύκλον πολύγωνον ἐγγράψαι ἀρτιόγωνον μεῖζον τοῦ ΑΒΓΔ χωρίου. Νοείσθω δὴ ἐγγεγραμμένον, ἐγγεγράφθω δὲ καὶ εἰς τὸν ΑΕΓΖ κύκλον εὐθύγραμμον ὁμοῖον τῷ ἐν τῷ Ψ κύκλῳ ἐγγεγραμμένῳ, καὶ ἀπὸ τᾶν γωνιᾶν αὐτοῦ κάθετοι ἄχθωσαν ἐπὶ τὰν ΑΓ διάμετρον, ἐπὶ δὲ τὰ σαμεῖαι καθ' ἃ τέμνοντι αἱ κάθετοι τὰν τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομάν, εὐθεῖαι ἐπεζεύχθωσαν· ἐσσεῖται δή τι ἐν τᾷ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ ἐγγεγραμμένον εὐθύγραμμον, καὶ ἕξει αὐτὸ ποτὶ τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ ΑΕΓΖ κύκλῳ ἐγγεγραμμένον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ΒΔ ποτὶ τὰν ΕΖ. Ἐπεὶ γὰρ αἱ ΕΘ,

15 μείζων G : μεῖζον DEGH ‖ 26 τέμνοντι B : τέμνονται DEGH ‖ 27 δή Heiberg : δέ BDEGH ‖ 28 αὐτὸ Heiberg : id ipsum B τὸ αὐτὸ DEGH.

coupées dans la même proportion aux points M et B, il est évident que le rapport du trapèze (sc. de diagonale) ΛE au trapèze ΘM est égal au rapport de ΘE à BΘ. Mais pour les mêmes raisons aussi chacun des autres trapèzes dans le cercle a à chacun des trapèzes dans l'ellipse le rapport de EΘ à BΘ. Mais aussi les triangles, en A et Γ, situés dans le cercle ont aux triangles situés dans l'ellipse ce même rapport ; il s'ensuit que le rapport de toute la figure rectiligne inscrite dans le cercle AEΓZ à toute la figure rectiligne inscrite dans l'ellipse est lui aussi égal au rapport de EZ à BΔ. Mais la même figure a ce même rapport aussi à la figure inscrite dans le cercle Ψ, puisque (sc. par hypothèse) les cercles eux-mêmes avaient ce rapport[1]. Il s'ensuit que la figure rectiligne inscrite dans le cercle Ψ est équivalente à la figure rectiligne inscrite dans l'ellipse[2], ce qui est impossible, du moment qu'elle était supérieure à toute l'aire limitée par l'ellipse.

Que (sc. le cercle Ψ) soit donc, si possible, inférieur (sc. à cette aire). Il est, dès lors, de nouveau possible d'inscrire à l'ellipse un polygone d'un nombre pair de côtés plus grand que le cercle Ψ. Qu'il y soit inscrit ; prolongeons les perpendiculaires abaissées des sommets de ce polygone sur AΓ jusqu'à la périphérie du cercle ; de nouveau, donc, une figure rectiligne sera inscrite dans le cercle AEΓZ, et son rapport à la figure inscrite dans l'ellipse sera égal au rapport de EZ à BΔ. En inscrivant donc aussi dans le cercle Ψ une figure semblable à la figure inscrite dans le cercle AEΓZ on montrera que la figure inscrite dans le cercle Ψ est équivalente à la figure inscrite dans l'ellipse, ce qui est

1. Cf. Eucl. V, 16.
2. Cf. Eucl. V, 9.

ΚΛ κάθετοι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον τέτμηνται κατὰ τὰ Μ, Β, δῆλον ὅτι τὸ ΛΕ τραπέζιον ποτὶ τὸ ΘΜ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ΘΕ ποτὶ τὰν ΒΘ. Διὰ ταὐτὰ δὲ καὶ τῶν ἄλλων τραπεζίων ἕκαστον τῶν ἐν τῷ κύκλῳ ποθ' ἕκαστον τῶν τραπεζίων τῶν ἐν τᾷ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ ΕΘ ποτὶ τὰν ΒΘ. Ἔχοντι δὲ καὶ τὰ τρίγωνα τὰ ποτὶ τοῖς Α, Γ τὰ ἐν τῷ κύκλῳ ποτὶ τὰ ἐν τᾷ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ τοῦτον τὸν λόγον· ἕξει οὖν καὶ ὅλον τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ ΑΕΓΖ κύκλῳ ἐγγεγραμμένον ποτὶ ὅλον τὸ ἐγγεγραμμένον εὐθύγραμμον ἐν τᾷ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ΕΖ ποτὶ τὰν ΒΔ. Ἔχει δὲ τὸ αὐτὸ εὐθύγραμμον καὶ ποτὶ τὸ ἐν τῷ Ψ κύκλῳ ἐγγεγραμμένον τοῦτον τὸν λόγον, διότι καὶ οἱ κύκλοι τοῦτον εἶχον τὸν λόγον· ἴσον ἄρα ἐστὶν τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ Ψ κύκλῳ ἐγγεγραμμένον τῷ εὐθυγράμμῳ τῷ ἐν τᾷ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ ἐγγεγραμμένῳ· ὅπερ ἀδύνατον· μεῖζον γὰρ ἦν ὅλου τοῦ περιεχομένου χωρίου ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου τομᾶς.

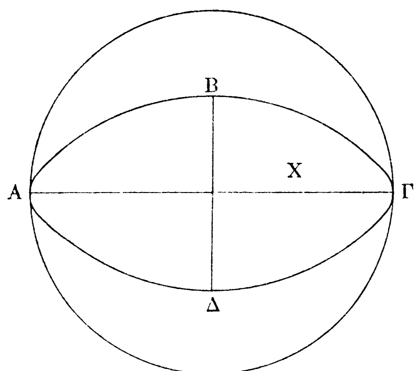
Ἀλλ' ἔστω, εἰ δυνατόν, ἐλάσσων. Πάλιν δὴ δυνατὸν εἰς τὰν τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰν ἐγγράψαι πολύγωνον ἀρτιόπλευρον μεῖζον τοῦ Ψ κύκλου. Ἐγγεγράφθω οὖν, καὶ ἀπὸ τᾶν γωνιᾶν αὐτοῦ κάθετοι ἀχθεῖσαι ἐπὶ τὰν ΑΓ ἐκβεβλήσθωσαν ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν· πάλιν οὖν ἐσσεῖταί τι ἐν τῷ ΑΕ κύκλῳ εὐθύγραμμον ἐγγεγραμμένον, ὃ ἕξει ποτὶ τὸ ἐν τᾷ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ ἐγγεγραμμένον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ΕΖ ποτὶ τὰν ΒΔ. Ἐγγραφέντος δὴ καὶ εἰς τὸν Ψ κύκλον ὁμοίου αὐτῷ δειχθήσεται τὸ ἐν τῷ Ψ κύκλῳ ἐγγεγραμμένον ἴσον ἐὸν τῷ ἐν τᾷ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ ἐγγεγραμμένῳ· ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἔστιν οὖν οὐδὲ ἐλάσσων ὁ Ψ κύκλος τοῦ χωρίου τοῦ

2 τὸ alt. B : τᾷ DEGH ‖ 6 ἔχοντι EG : ἔχωντι DH ‖ 24 τι B : τῇ DEGH ‖ 25 τὸ Torellius : τὰν DEGH.

impossible. Le cercle Ψ n'est donc pas, non plus, inférieur à l'aire limitée par l'ellipse. Il est donc évident que le rapport de l'aire indiquée au cercle ΑΕΓΖ est égal au rapport de ΒΔ à ΕΖ[1].

5.

Le rapport de toute aire limitée par une ellipse à tout cercle est égal au rapport entre le rectangle compris entre les diamètres de l'ellipse et le carré sur le diamètre du cercle[2].



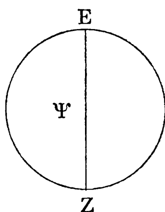


Fig. 72.

Soit, en effet, une aire limitée par une ellipse marquée par X ; soient ΑΓ et ΒΔ les diamètres de l'ellipse, ΑΓ étant le plus grand ; soit un cercle, marqué par Ψ, et son diamètre ΕΖ ; il faut montrer que le rapport de l'aire X au cercle Ψ est égal au rapport du rectangle de côtés ΑΓ et ΒΔ au carré sur ΕΖ.

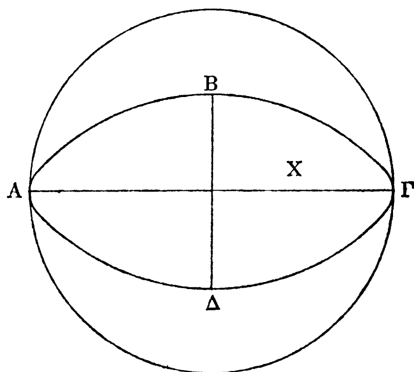
Circonscrivons donc un cercle au diamètre ΑΓ ; dès lors, le rapport de l'aire X au cercle de diamètre ΑΓ est égal au rapport du rectangle de côtés ΑΓ et ΒΔ au carré sur ΑΓ ; car on a montré que ce rapport est égal au rapport de ΒΔ à ΑΓ.

1. Cf. prop. 4 et Eucl. V, 7.
2. Proposition citée par Héron, *Metr.*, p. 82.

περιεχομένου ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς. Δῆλον οὖν ὅτι τὸ εἰρημένον χωρίον ποτὶ τὸν ΑΕΓΖ κύκλον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ΒΔ ποτὶ τὰν ΕΖ.

ε'.

Πᾶν χωρίον περιεχόμενον ὑπὸ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ποτὶ πάντα κύκλον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν διαμέτρων τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς τοῦ κύκλου διαμέτρου τετράγωνον.



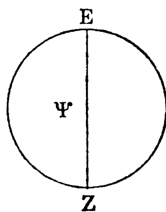


Fig. 72.

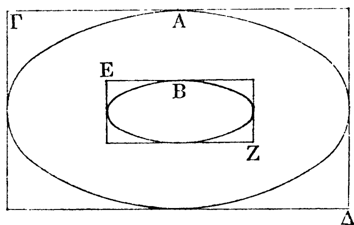
Ἔστω γάρ τι χωρίον περιεχόμενον ὑπὸ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ἐν ᾧ τὸ Χ, διάμετροι δὲ ἔστωσαν τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς αἱ ΑΓ, ΒΔ, μείζων δὲ ἁ ΑΓ, καὶ κύκλος ἔστω, ἐν ᾧ Ψ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἁ ΕΖ· δεικτέον ὅτι τὸ Χ χωρίον ποτὶ τὸν Ψ κύκλον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΑΓ, ΒΔ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΕΖ τετράγωνον. Περιγεγράφθω δὴ κύκλος περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ· τὸ δὴ Χ χωρίον ποτὶ τὸν κύκλον, οὗ διάμετρος ἁ ΑΓ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΑΓ, ΒΔ ποτὶ τὸ

19 Ψ mss. DEGH : τὸ Ψ Basil.

Mais le rapport du cercle de diamètre ΑΓ au cercle de diamètre EZ est aussi égal au rapport du carré sur ΑΓ au carré sur EZ ; il est donc évident que le rapport de l'aire X au cercle Ψ est égal au rapport du rectangle de côtés ΑΓ et ΒΔ au carré sur EZ.

6.

Les aires limitées par des ellipses ont entre elles le même rapport que les rectangles ayant pour côtés les diamètres des ellipses.



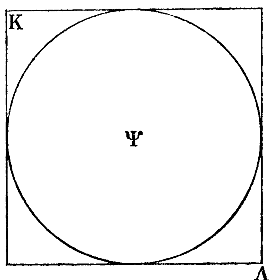


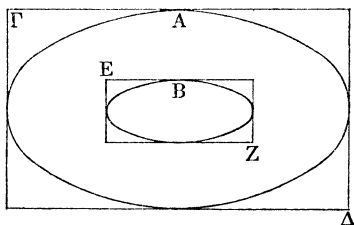
Fig. 73.

Soient A et B des aires limitées par des ellipses ; soit ΓΔ le rectangle ayant pour côtés les diamètres de l'ellipse qui limite l'aire A, EZ le rectangle ayant pour côtés les diamètres de l'autre ellipse ; il faut montrer que l'aire A est à l'aire B comme le rectangle ΓΔ est au rectangle EZ.

ἀπὸ τᾶς ΑΓ τετράγωνον· δέδεικται γὰρ ἔχον ὃν ἁ ΒΔ ποτὶ τὰν ΑΓ. Ἔχει δὲ καὶ ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος ἁ ΑΓ, ποτὶ τὸν κύκλον, οὗ διάμετρος ἁ ΕΖ, τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΓ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΕΖ· δῆλον οὖν ὅτι τὸ Χ χωρίον ποτὶ τὸν Ψ κύκλον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΓ, ΒΔ περιεχόμενον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΕΖ τετράγωνον.

ϛ′.

Τὰ περιεχόμενα χωρία ὑπὸ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ποτ' ἄλλαλα, ὃν τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τᾶν διαμέτρων τᾶν τῶν ὀξυγωνίων κώνων τομᾶν ποτ' ἄλλαλα.



Ἔστω περιεχόμενα χωρία ὑπὸ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ἐν οἷς τὰ Α, Β, ἔστω δὲ καὶ τὸ μὲν ΓΔ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν διαμέτρων τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς τᾶς περιεχούσας τὸ Α χωρίον, τὸ δὲ ΕΖ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν διαμέτρων τᾶς ἑτέρας τομᾶς· δεικτέον ὅτι τὸ Α χωρίον ποτὶ τὸ Β τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ΓΔ ποτὶ τὸ ΕΖ.

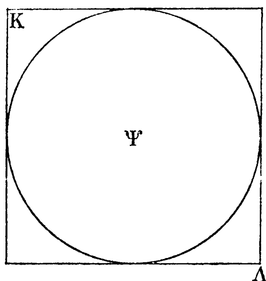


Fig. 73.

10-11 ποτ' ἄλλαλα B : ποτὶ τὰ ἄλλα DEGH ‖ 13 τᾶν Basil. : τμᾶμα DEGH tetragonorum B ‖ τῶν ὀξυγωνίων κώνων BD EGH : τοῦ ὀξυγωνίου κώνου Torellius ‖ 20 τᾶς EG : τᾷ DH.

Prenons donc un cercle Ψ et construisons sur son diamètre le carré ΚΛ. Dès lors, l'aire A a au cercle Ψ le même rapport que le rectangle ΓΔ au carré ΚΛ, et le cercle Ψ est à l'aire B comme le carré ΚΛ est au rectangle EZ[1] ; il est donc évident que le rapport de l'aire A à l'aire B est égal au rapport du rectangle ΓΔ au rectangle EZ[2].

Corollaire.

Il est évident d'après ce qui précède que le rapport des aires limitées par des ellipses semblables est égal au rapport des carrés sur les diamètres qui se correspondent dans les ellipses.

7.

Étant donnés une ellipse et un segment de droite perpendiculaire au plan de l'ellipse en son centre, il est possible de trouver un cône ayant pour sommet l'extrémité de la perpendiculaire élevée et tel que l'ellipse donnée soit située dans sa surface.

Soient donnés une ellipse et un segment de droite élevé en son centre perpendiculairement au plan où est située l'ellipse ; faisons passer un plan par la perpendiculaire élevée et par le petit diamètre ; soient, dans ce plan, AB le petit diamètre, Δ le centre de l'ellipse, ΓΔ la perpendiculaire élevée au centre, extrémité Γ ; imaginons l'ellipse tracée autour du diamètre AB

1. Cf. prop. 5 et Eucl. V, 16.
2. Cf. Eucl. V, 22.

Λελάφθω δὴ κύκλος τις, ἐν ᾧ τὸ Ψ, ἀπὸ δὲ τᾶς διαμέτρου αὐτοῦ τετράγωνον ἔστω τὸ ΚΛ. Ἔχει δὴ τὸ μὲν Α χωρίον ποτὶ τὸν Ψ κύκλον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ΓΔ ποτὶ τὸ ΚΛ, ὁ δὲ Ψ κύκλος ποτὶ τὸ Β χωρίον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ΚΛ ποτὶ τὸ ΕΖ· δῆλον οὖν ὅτι τὸ Α χωρίον ποτὶ τὸ Β τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ΓΔ ποτὶ τὸ ΕΖ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δὲ φανερὸν ὅτι τὰ περιεχόμενα χωρία ὑπὸ ὁμοιᾶν ὀξυγωνίου κώνου τομᾶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντι ποτ' ἄλλαλα, ὃν ἔχοντι δυνάμει ποτ' ἀλλάλας αἱ ὁμόλογοι διάμετροι τᾶν τομᾶν.

ζ′.

Ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς δοθείσας καὶ γραμμᾶς ἀπὸ τοῦ κέντρου τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἀνεστακούσας ὀρθᾶς ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστιν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, δυνατόν ἐστι κῶνον εὑρεῖν κορυφὰν ἔχοντα τὸ πέρας τᾶς ἀνεστακούσας εὐθείας, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ δοθεῖσα τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά.

Δεδόσθω τις ὀξυγωνίου κώνου τομά, καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου αὐτᾶς εὐθεῖα γραμμὰ ἀνεστάκουσα ὀρθὰ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστιν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, διὰ δὲ τᾶς ἀνεστακούσας εὐθείας καὶ τᾶς ἐλάσσονος διαμέτρου ἐπίπεδόν τι ἐκβεβλήσθω, καὶ ἔστω ἐν αὐτῷ ἁ μὲν ἐλάσσων διάμετρος ἁ ΑΒ, τὸ δὲ κέντρον τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς τὸ Δ, ἁ δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀνεστάκουσα ὀρθὰ ἁ ΓΔ, πέρας δὲ αὐτᾶς τὸ Γ, ἁ δὲ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ νοείσθω περὶ διάμετρον τὰν ΑΒ γεγραμμένα ἐν ἐπιπέδῳ

2 δὴ Heiberg : δὲ BDEGH ‖ 7 πόρισμα D : om. BEGH ‖ 9-10 ἔχοντι utr. EG : ἔχωντι DH ‖ 19 κώνου BG : om. DEH ‖ 26 κώνου DEGH : om. B.

dans le plan perpendiculaire à ΓΔ ; il faut trouver un cône ayant pour sommet le point Γ et tel que l'ellipse se trouve située dans sa surface.

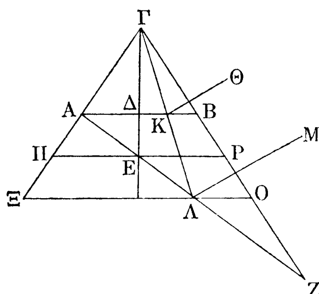


Fig. 74.

Prolongeons les droites menées du point Γ aux points A et B ; faisons passer par A un segment de droite AZ tel que le rapport du rectangle de côtés AE et EZ au carré sur EΓ soit égal au rapport du carré sur la moitié du grand diamètre au carré sur ΔΓ ; or ceci est possible, du moment que ce rapport est supérieur au rapport du rectangle de côtés AΔ et ΔB au carré sur ΔΓ[1] ; par AZ faisons passer un plan perpendiculaire au plan contenant les droites AΓ et AZ et traçons dans ce plan un cercle autour du diamètre AZ ; construisons sur ce cercle comme base un cône ayant pour sommet le point Γ ; nous allons montrer que c'est dans la surface de ce cône que se trouve l'ellipse.

En effet, si l'ellipse n'est pas dans la surface de ce cône, il existe nécessairement sur l'ellipse un point qui n'est pas dans la surface du cône. Imaginons donc

1. La pertinence de cette condition a été démontrée, entre autres, par Zeuthen, *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum*, Copenhague, 1886, p. 411 sq. ; cf. Heiberg, I, p. 287.

ὀρθῷ ποτὶ τὰν ΓΔ · δεῖ δὴ κῶνον εὑρεῖν κορυφὰν ἔχοντα τὸ Γ σαμεῖον, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά.

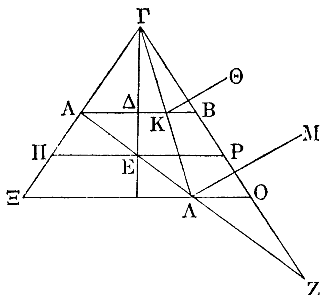


Fig. 74.

Ἀπὸ δὴ τοῦ Γ ἐπὶ τὰ Α, Β εὐθεῖαι ἀχθεῖσαι ἐκβεβλήσθων, καὶ ἀπὸ τοῦ Α διάχθω ἁ ΑΖ, ὥστε τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΑΕ, ΕΖ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΕΓ τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ἡμισείας τᾶς μείζονος διαμέτρου ποτὶ τὸ ἀπὸ ΔΓ τετράγωνον · δυνατὸν δέ ἐστιν, ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ὁ λόγος τοῦ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΔΓ τετράγωνον · ἀπὸ δὲ τᾶς ΑΖ ἐπίπεδον ἀνεστακέτω ὀρθὸν ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐντι αἱ ΑΓ, ΑΖ, ἐν δὲ τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ κύκλος γεγράφθω περὶ διάμετρον τὰν ΑΖ, καὶ ἀπὸ τοῦ κύκλου τούτου κῶνος ἔστω κορυφὰν ἔχων τὸ Γ σαμεῖον · ἐν δὴ τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τούτου δειχθήσεται ἐοῦσα ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά.

Εἰ γὰρ μή ἐστιν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, ἀναγκαῖον εἶμέν τι σαμεῖον ἐπὶ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ὃ μή ἐστιν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου. Νοείσθω δή τι σαμεῖον

4 δὴ Torellius : δὲ BDEGH ‖ εὐθεῖαι ἀχθεῖσαι ἐκβεβλήσθων Heiberg : εὐθεῖα ἀχθεῖσα ἐκβεβλήσθω BDEGH ‖ 7 τᾶς alt. add. Heiberg ‖ 14 δὴ Heiberg : δὲ BDEGH ‖ 17 γὰρ B : om. DEGH ‖ 19 δή Heiberg : δέ BDEGH.

un point Θ, pris sur l'ellipse, qui ne soit pas dans la surface du cône, et abaissons de Θ la perpendiculaire ΘK sur la droite AB ; ΘK sera donc aussi perpendiculaire au plan où sont situées les droites AΓ et ΓZ[1] ; du point Γ menons une droite au point K ; que cette droite rencontre la droite AZ au point Λ ; du point Λ abaissons la perpendiculaire ΛM sur ZA dans le cercle de diamètre AZ, et imaginons sur la circonférence de ce cercle un point M élevé ; menons aussi la parallèle ΞO à AB par le point Λ, et la parallèle ΠP par le point E. Du moment donc que le rapport du rectangle de côtés EA et EZ au carré sur EΓ est égal au rapport du carré sur la moitié du grand diamètre au carré sur ΔΓ, et que le rapport du carré sur EΓ au rectangle de côtés EΠ et EP est égal au rapport du carré sur ΔΓ au rectangle de côtés AΔ et ΔB, le rapport du rectangle de côtés AE et EZ au rectangle de côtés ΠE et EP est égal au rapport du carré sur la moitié du grand diamètre au rectangle de côtés AΔ et ΔB[2]. Or le rectangle de côtés AE et EZ est au rectangle de côtés EΠ et EP comme le rectangle de côtés AΛ et ΛZ est au rectangle de côtés ΛΞ et ΛO, et le carré sur la moitié du grand diamètre est au rectangle de côtés AΔ et ΔB comme le carré sur ΘK est au rectangle de côtés AK et KB[3] ; il s'ensuit que le rapport du rectangle de côtés AΛ et ΛZ au rectangle de côtés ΞΛ et ΛO est égal au rapport du carré sur ΘK au rectangle de côtés AK et KB. Or le rapport du rectangle de côtés ΞΛ et ΛO au carré sur ΓΛ est égal au rapport du rectangle de côtés AK et KB au carré sur KΓ[4] ; il s'ensuit que, aussi, le rapport du rectangle de côtés AΛ et ΛZ au carré sur ΓΛ est égal au rapport du carré sur ΘK au carré sur KΓ[5]. Or le rectangle de côtés AΛ et ΛZ est équivalent au carré sur ΛM, du moment que la perpendiculaire ΛM a été abaissée dans le demi-cercle de diamètre AZ ; par conséquent le rapport du

1. Cf. Eucl. XI, def. 4.
2. Cf. Eucl. V, 22.
3. Cf. Apollonius, *Con.* I, 12.
4. Cf. Eucl. V, 16.
5. Cf. Eucl. V, 22.

λελαμμένον ἐπὶ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς τὸ Θ, ὃ οὐκ ἔστιν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, καὶ ἀπὸ τοῦ Θ κάθετος ἄχθω ἁ ΘΚ ἐπὶ τὰν ΑΒ· ἐσσεῖται δὴ αὕτα ὀρθὰ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἐν ᾧ ἐντι αἱ ΑΓ, ΓΖ· ἀπὸ δὲ τοῦ Γ ἐπὶ τὸ Κ εὐθεῖα ἀχθεῖσα ἐκβεβλήσθω· συμπιπτέτω δὴ αὕτα τᾷ ΑΖ κατὰ τὸ Λ, καὶ ἀπὸ τοῦ Λ ἄχθω ποτ' ὀρθὰς τᾷ ΖΑ ἁ ΛΜ ἐν τῷ κύκλῳ τῷ περὶ τὰν ΑΖ, τὸ δὲ Μ νοείσθω μετέωρον ἐπὶ τᾶς περιφερείας αὐτοῦ, ἄχθω δὲ καὶ παρὰ τὰν ΑΒ διὰ μὲν τοῦ Λ ἁ ΞΟ, διὰ δὲ τοῦ Ε ἁ ΠΡ. Ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ὑπὸ τᾶν ΕΑ, ΕΖ περιεχόμενον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΕΓ τετράγωνον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ἡμισείας τᾶς μείζονος διαμέτρου ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΔΓ, τὸ δὲ ἀπὸ τᾶς ΕΓ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΕΠ, ΕΡ, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ΔΓ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΔ, ΔΒ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΕ, ΕΖ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΕΠ, ΕΡ, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ἡμισείας τᾶς μείζονος διαμέτρου ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΔ, ΔΒ. Ἔστιν δέ, ὡς μὲν τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΕ, ΕΖ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΕΠ, ΕΡ, οὕτω τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΛ, ΛΖ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΛΞ, ΛΟ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τᾶς ἡμισείας τᾶς μείζονος διαμέτρου ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΔ, ΔΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΚ τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΚ, ΚΒ· τὸν αὐτὸν ἄρα ἔχει λόγον τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΛ, ΛΖ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΞΛ, ΛΟ, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΚ τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΚ, ΚΒ. Ἔχει δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΞΛ, ΛΟ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΓΛ τετράγωνον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ ΑΚ, ΚΒ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΚΓ τετράγωνον· ἔχει ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΛ, ΛΖ περιεχόμενον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΓΛ τετράγωνον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΚ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΚΓ. Τῷ δὲ ὑπὸ τᾶν ΑΛ, ΛΖ περιεχομένῳ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΛΜ τετράγωνον· ἐν ἡμικυκλίῳ γὰρ τῷ περὶ τὰν ΑΖ κάθετος ἄχθη ἁ ΛΜ· τὸν αὐτὸν ἄρα ἔχει λόγον τὸ ἀπὸ τᾶς ΛΜ τετράγωνον

12-13 ὑπὸ τᾶν B : om. DEGH ‖ 13 ΔΒ ms. B : ΑΒ mss. DEGH ‖ 14 ΕΖ Torellius : ΕΓ mss. BDEGH ‖ 19 ΔΒ Basil. : ΑΒ mss. BDEGH ‖ 21 ΞΛ Basil. : ΖΛ mss. BDEGH.

carré sur ΛM au carré sur ΛΓ est égal au rapport du carré sur ΘK au carré sur KΓ ; les points Γ, Θ et M sont donc alignés. Mais le segment de droite ΓM est situé dans la surface du cône[1] ; il est donc évident que le point Θ est lui aussi dans la surface du cône. Mais nous avions supposé qu'il n'en est pas ainsi ; il s'ensuit qu'il n'existe aucun point sur l'ellipse qui n'appartienne pas à la surface du cône indiqué. Toute l'ellipse est donc située dans la surface du même cône.

8.

Étant donnés une ellipse et un segment de droite non perpendiculaire (sc. au plan de l'ellipse), issu du centre de l'ellipse et situé dans un plan passant par l'un des diamètres et perpendiculaire au plan de l'ellipse, il est possible de trouver un cône ayant pour sommet l'extrémité du segment de droite érigé et tel que l'ellipse donnée soit située dans sa surface.

Fig. 75.

1. Cf. Apollonius, *Con.* I, 1.

ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΛΓ, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΚ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΚΓ· ὥστε ἐπ' εὐθείας ἐστὶν τὰ Γ, Θ, Μ σαμεῖα. Ἁ δὲ ΓΜ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ τοῦ κώνου· δῆλον οὖν ὅτι καὶ τὸ Θ σαμεῖον ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται τοῦ κώνου. Ὑπέκειτο δὲ μὴ εἶμεν· οὐκ ἄρα ἐστὶ σαμεῖον οὐδὲν ἐπὶ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ὃ οὐκ ἔστιν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ προειρημένου κώνου. Ὅλα οὖν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐστὶν τοῦ αὐτοῦ κώνου.

η′.

Ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς δοθείσας καὶ γραμμᾶς μὴ ὀρθᾶς ἀνεστακούσας ἀπὸ τοῦ κέντρου τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἐν ἐπιπέδῳ, ὅ ἐστιν ὀρθὸν ἀνεστακὸς διὰ τᾶς ἑτέρας διαμέτρου ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστιν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, δυνατόν ἐστι κῶνον εὑρεῖν κορυφὰν ἔχοντα τὸ πέρας τᾶς ἀνεστακούσας εὐθείας, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ δοθεῖσα τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά.

Fig. 75.

13 ἁ τοῦ Basil. : αὐτοῦ BDEGH ‖ 15 ἀνεστακούσας GH : ἐνεστακούσας DE.

Soit donc BA le diamètre de l'ellipse, Δ le centre, ΔΓ le segment de droite érigé au centre comme il a été indiqué ; imaginons l'ellipse décrite autour du diamètre AB dans un plan perpendiculaire au plan où sont situés AB et ΓΔ ; il faut donc trouver un cône ayant pour sommet le point Γ et tel que l'ellipse soit située dans sa surface.

Les segments de droite AΓ et ΓB ne sont donc pas égaux, puisque ΓΔ n'est pas perpendiculaire au plan de l'ellipse. Soit EΓ égal à ΓB, et soit N un segment de droite égal à la moitié du diamètre conjugué à AB ; menons par le point Δ la parallèle ZH à EB, faisons passer par EB un plan perpendiculaire au plan où sont situés AΓ et ΓB, et décrivons dans ce plan, autour du diamètre EB, un cercle dans le cas où le carré sur N est équivalent au rectangle de côtés ZΔ et ΔH, et dans le cas où ces deux aires ne sont pas équivalentes, une ellipse telle que le rapport du carré sur son autre diamètre au carré sur EB soit égal au rapport du carré sur N au rectangle de côtés ZΔ et ΔH[1] ; prenons le cône ayant pour sommet le point Γ et dont la surface contient le cercle ou l'ellipse de diamètre EB ; ceci est possible, puisque la droite menée du point Γ au milieu de EB est perpendiculaire au plan passant par EB ; c'est donc dans cette surface qu'est située aussi l'ellipse décrite autour de AB comme diamètre.

En effet, si elle n'y est pas située, il existera un point sur l'ellipse, qui ne sera pas dans la surface du cône. Imaginons pris un point Θ qui ne soit pas dans la

1. Cf. Apollonius, *Con.* I, 21.

Ἔστω δὴ διάμετρος μὲν τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἁ ΒΑ, κέντρον δὲ τὸ Δ, καὶ ἁ ΔΓ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀνεστάκουσα, ὡς εἴρηται, ἁ δὲ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ νοείσθω περὶ διάμετρον τὰν ΑΒ ἐν ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐντι αἱ ΑΒ, ΓΔ· δεῖ δὴ κῶνον εὑρεῖν κορυφὰν ἔχοντα τὸ Γ σαμεῖον, οὗ ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά.

Οὐ δή ἐντι ἴσαι αἱ ΑΓ, ΓΒ, ἐπεὶ ἁ ΓΔ οὐκ ἔστιν ὀρθὰ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστιν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. Ἔστω οὖν ἴσα ἁ ΕΓ τᾷ ΓΒ, ἁ δὲ Ν εὐθεῖα ἴσα ἔστῳ τᾷ ἡμισείᾳ τᾶς ἑτέρας διαμέτρου, ᾷ ἐστι συζυγὴς ἁ ΑΒ, καὶ διὰ τοῦ Δ ἄχθω ἁ ΖΗ παρὰ τὰν ΕΒ, ἀπὸ δὲ τᾶς ΕΒ ἐπίπεδον ἀνεστακέτω ὀρθὸν ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐντι αἱ ΑΓ, ΓΒ, καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ γεγράφθω περὶ διάμετρον τὰν ΕΒ, εἰ μὲν ἴσον ἐστὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς Ν τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ΖΔ, ΔΗ, κύκλος, εἰ δὲ μή ἐστιν ἴσον, ὀξυγωνίου κώνου τομὰ τοιαύτα, ὥστε τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ἑτέρας διαμέτρου ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΕΒ τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς Ν τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΖΔ, ΔΗ· κῶνος δὲ λελάφθω κορυφὰν ἔχων τὸ Γ σαμεῖον, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ὁ κύκλος ἢ ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ ἁ περὶ διάμετρον τὰν ΕΒ· δυνατὸν δέ ἐστι τοῦτο, ἐπεὶ ἁ ἀπὸ τοῦ Γ ἐπὶ μέσαν τὰν ΕΒ ἀχθεῖσα ὀρθά ἐντι ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ κατὰ τὰν ΕΒ· ἐν ταύτᾳ δὴ τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ καὶ ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ ἁ περὶ διάμετρον τὰν ΑΒ.

Εἰ γὰρ μή ἐστιν, ἐσσεῖταί τι σαμεῖον ἐπὶ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ὃ οὐκ ἐσσεῖται ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου. Νοείσθω τι σαμεῖον λελαμμένον τὸ Θ, ὃ οὐκ ἔστιν ἐν τᾷ

1 δὴ Torellius : δὲ BDEGH ‖ 2 ἀπὸ τοῦ κέντρου DEGH : om. B ‖ 11 ᾷ GH : ἁ BDE ‖ ἁ DEGH : τᾷ B, Torellius ‖ 15 ΕΒ Heiberg : ΕΒ κύκλος ἢ ἔλλειψις DEGH eb uel ellipsis B ‖ 22 ἁ add. Heiberg ‖ 23 ἁ addidi ‖ 25 ἁ alt. add. Heiberg.

surface du cône ; abaissons du point Θ la perpendiculaire ΘK à AB ; menons la droite ΓK ; qu'elle rencontre la droite EB au point Λ ; par le point Λ menons une droite, située dans le plan perpendiculaire passant par EB, et perpendiculaire à EB, soit ΛM ; imaginons le point M élevé dans la surface du cône ; menons aussi par le point Λ la parallèle ΠP à AB ; dès lors, le carré sur N est au rectangle de côtés ZΔ et ΔH comme le carré sur ΛM est au rectangle de côtés EΛ et ΛB[1], et le rectangle de côtés ZΔ et ΔH est au rectangle de côtés AΔ et ΔB comme le rectangle de côtés EΛ et ΛB est au rectangle de côtés ΠΛ et ΛP[2] ; le carré sur N sera donc au rectangle de côtés AΔ et ΔB comme le carré sur ΛM est au rectangle de côtés ΠΛ et ΛP[3]. Mais le carré sur N est au rectangle de côtés AΔ et ΔB comme le carré sur ΘK est au rectangle de côtés AK et KB, puisqu'on a mené dans la même ellipse des perpendiculaires au diamètre AB[4] ; il s'ensuit que le rapport du carré sur ΛM au rectangle de côtés ΠΛ et ΛP est égal au rapport du carré sur ΘK au rectangle de côtés AK et KB. Mais aussi le rectangle de côtés ΠΛ et ΛP est au carré sur ΓΛ comme le rectangle de côtés AK et KB est au carré sur KΓ ; le carré sur ΛM a donc au carré sur ΛΓ le même rapport que le carré sur ΘK a au carré sur KΓ ; par conséquent les points Γ, Θ et M sont alignés. Or ΓM est situé dans la surface du cône[5] ; il est donc évident que le point Θ est lui aussi situé dans la surface du cône. Mais on avait supposé qu'il n'y est pas ; la proposition qu'il fallait démontrer est donc évidente.

9.

Étant donnés une ellipse et un segment de droite issu du centre de l'ellipse, non perpendiculaire (sc. au

1. Cf. Apollonius, *Con.* I, 21.
2. Cf. Eucl. VI, 4.
3. Cf. Eucl. V, 22.
4. Cf. Apollonius, *Con.* I, 21.
5. Cf. Apollonius, *Con.* I, 1.

ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, καὶ ἀπὸ τοῦ Θ κάθετος ἄχθω ἁ ΘΚ ἐπὶ τὰν ΑΒ, ἁ δὲ ΓΚ ἐπιζευχθεῖσα ἐκβεβλήσθω καὶ συμπιπτέτω τᾷ ΕΒ κατὰ τὸ Λ, διὰ δὲ τοῦ Λ ἄχθω τις ἐν τῷ ὀρθῷ ἐπιπέδῳ τῷ κατὰ τὰν ΕΒ ποτ' ὀρθὰς τᾷ ΕΒ ἁ ΛΜ, τὸ δὲ Μ νοείσθω μετέωρον ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, ἄχθω δὲ καὶ διὰ τοῦ Λ παρὰ τὰν ΑΒ ἁ ΠΡ· ἔστιν δή, ὡς μὲν τὸ ἀπὸ τᾶς Ν τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΖΔ, ΔΗ, οὕτως τὸ ἀπὸ τᾶς ΛΜ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΕΛ, ΛΒ, ὡς δὲ τὸ ὑπὸ τᾶν ΖΔ, ΔΗ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΔ, ΔΒ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΛ, ΛΒ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΠΛ, ΛΡ· ἐσσεῖται οὖν, ὡς τὸ ἀπὸ τᾶς Ν τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον, οὕτως τὸ ἀπὸ τᾶς ΛΜ τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΠΛ, ΛΡ. Ἔχει δέ, ὡς τὸ ἀπὸ τᾶς Ν τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΔ, ΔΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΚ τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΚ, ΚΒ, ἐπεὶ ἐν τᾷ αὐτᾷ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ κάθετοί ἐντι ἀγμέναι ἐπὶ διάμετρον τὰν ΑΒ· τὸν αὐτὸν ἄρα ἔχει λόγον τὸ ἀπὸ τᾶς ΛΜ τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΠΛ, ΛΡ, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΚ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΚ, ΚΒ. Ἔχει δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΠΛ, ΛΡ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΓΔ τετράγωνον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΚ, ΚΒ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΚΓ· τὸν αὐτὸν οὖν λόγον ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς ΛΜ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΛΓ τετράγωνον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΚ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΚΓ· ὥστε ἐπ' εὐθείας ἐντὶ τὰ Γ, Θ, Μ σαμεῖα. Ἁ δὲ ΓΜ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου· δῆλον οὖν ὅτι καὶ τὸ Θ σαμεῖον ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ τοῦ κώνου. Ὑπέκειτο δὲ μὴ εἶμεν· φανερὸν οὖν ἐστιν ὃ ἔδει δεῖξαι.

θ'.

Ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς δοθείσας καὶ γραμμᾶς ἀπὸ τοῦ κέντρου τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς μὴ ὀρθᾶς

3 Λ alt. mss. BG : Α mss. DEH ‖ 4 τῷ B : om. DEGH ‖ τᾷ Torellius : τᾶς DEGH ‖ 20 τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΚ Basil. : ποτ' ἃ BDEGH ‖ 29 μὴ ὀρθᾶς add. Torellius.

plan de l'ellipse) mais situé dans le plan, perpendiculaire au plan de l'ellipse et passant par l'un des diamètres, il est possible de trouver un cylindre ayant son axe sur la même droite à laquelle appartient le segment érigé et tel que sa surface contienne l'ellipse donnée.

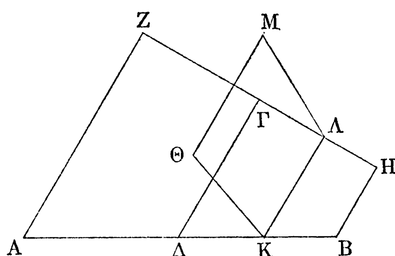


Fig. 76.

Soit BA l'un des diamètres de l'ellipse donnée, Δ le centre, ΓΔ le segment de droite érigé au centre de la manière indiquée ; imaginons l'ellipse décrite autour de AB comme diamètre dans le plan perpendiculaire au plan où sont situés AB et ΓΔ ; il faut donc trouver un cylindre ayant son axe sur la droite contenant ΓΔ et tel que l'ellipse donnée soit située dans sa surface.

Menons par les points A et B les parallèles AZ et BH à ΓΔ ; dès lors, l'autre diamètre de l'ellipse est ou bien égal à la distance des droites AZ et BH, ou bien supérieur ou inférieur ; qu'il soit d'abord égal à ZH ; que ZH soit perpendiculaire à ΓΔ ; par ZH faisons passer le plan perpendiculaire à ΓΔ ; décrivons

ἀνεστακούσας ἐν ἐπιπέδῳ, ὅ ἐστιν ἀπὸ τᾶς ἑτέρας διαμέτρου ὀρθὸν ἀνεστακὸς ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστιν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, δυνατόν ἐντι κύλινδρον εὑρεῖν τὸν ἄξονα ἔχοντα ἐπ' εὐθείας τᾷ ἀνεστακούσᾳ γραμμᾷ, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ δοθεῖσα τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά.

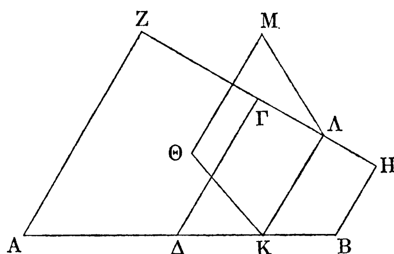


Fig. 76.

Ἔστω τᾶς δοθείσας τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἑτέρα διάμετρος ἁ ΒΑ, κέντρον δὲ τὸ Δ, ἁ δὲ ΓΔ γραμμὰ ἔστω ἀνεστάκουσα ἀπὸ τοῦ κέντρου, ὡς εἴρηται, ἁ δὲ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ νοείσθω περὶ διάμετρον τὰν ΑΒ ἐν ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἐν ᾧ ἐντι αἱ ΑΒ, ΓΔ · δεῖ δὴ κύλινδρον εὑρεῖν τὸν ἄξονα ἔχοντα ἐπ' εὐθείας τᾷ ΓΔ, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ δοθεῖσα τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά.

Ἀπὸ δὴ τῶν Α, Β σαμείων ἄχθων παρὰ τὰν ΓΔ αἱ ΑΖ, ΒΗ · ἁ δὴ ἑτέρα διάμετρος τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἤτοι ἴσα ἐντὶ τῷ διαστήματι τᾶν ΑΖ, ΒΗ ἢ μείζων ἢ ἐλάσσων. Ἔστω δὴ πρότερον ἴσα τᾷ ΖΗ, ἁ δὲ ΖΗ ἔστω ποτ' ὀρθὰς τᾷ ΓΔ, ἀπὸ δὲ τᾶς ΖΗ ἀνεστακέτω ἐπίπεδον ὀρθὸν ποτὶ τὰν ΓΔ, καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ κύκλος ἔστω περὶ διάμετρον

15 ἄχθων Heiberg : ἄχθω DGH ἄχθωσαν E.

dans ce plan un cercle de diamètre ZH, et faisons passer par ce cercle un cylindre ayant pour axe ΓΔ ; c'est donc dans la surface de ce cylindre qu'est située l'ellipse.

En effet, si elle n'y est pas située, il existera sur l'ellipse un point qui n'est pas situé dans la surface du cylindre. Imaginons donc pris sur l'ellipse un point Θ non situé dans la surface du cylindre, et abaissons de Θ la perpendiculaire ΘK à AB ; or cette droite sera perpendiculaire au plan où sont situés AB et ΓΔ[1] ; par K menons la parallèle KΛ à ΓΔ et en Λ élevons la perpendiculaire ΛM à ZH dans le cercle de diamètre ZH ; imaginons le point M élevé sur la circonférence du demi-cercle de diamètre ZH ; dès lors, le rapport du carré sur ΘK au rectangle de côtés AK et KB est égal au rapport du carré sur ZΓ au rectangle de côtés AΔ et ΔB, puisque ZH est égal à l'un des deux diamètres[2]. Mais le rectangle de côtés ZΛ et ΛH a lui aussi au rectangle de côtés AK et KB le même rapport qu'ont entre eux les carrés sur ZΓ et sur AΔ ; le rectangle de côtés ZΛ et ΛH est donc équivalent au carré sur ΘK. Mais ce rectangle est aussi équivalent au carré sur ΛM ; il s'ensuit que les perpendiculaires ΘK et MΛ sont égales. Les droites ΛK et MΘ sont donc parallèles[3] ; par conséquent, les droites ΔΓ et MΘ seront, elles aussi, parallèles[4]. Il s'ensuit que ΘM est situé dans la surface du cylindre, puisque cette droite a été menée par le point M, situé dans la surface, parallèlement à l'axe ; il est donc évident que le point Θ est lui aussi situé dans la surface du cylindre. Mais on avait supposé qu'il n'y est pas ; la proposition qu'il fallait démontrer est donc évidente.

Il est aussi évident que le cylindre contenant (sc. l'ellipse) est droit, si l'autre diamètre est égal à la

1. Cf. Eucl. XI, def. 4.
2. Cf. Apollonius, *Con.* I, 21.
3. Cf. Eucl. I, 33.
4. Cf· Eucl. XI, 9.

τὰν ΖΗ, καὶ ἀπὸ τοῦ κύκλου τούτου κύλινδρος ἔστω ἄξονα ἔχων τὰν ΓΔ · ἐν δὴ τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου τούτου ἐστὶν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά.

Εἰ γὰρ μή ἐστιν, ἐσσεῖταί τι σαμεῖον ἐπὶ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ὃ οὐκ ἔστιν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου. Νοείσθω δή τι σαμεῖον λελαμμένον ἐπὶ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς τὸ Θ, ὃ οὐκ ἔστιν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου, καὶ ἀπὸ τοῦ Θ ἁ ΘΚ κάθετος ἄχθω ἐπὶ τὰν ΑΒ · ἐσσεῖται δὲ αὕτα ὀρθὰ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐντι αἱ ΒΑ, ΓΔ · ἀπὸ δὲ τοῦ Κ ἄχθω παρὰ τὰν ΓΔ ἁ ΚΛ, καὶ ἀπὸ τοῦ Λ ἀνεστακέτω ἁ ΛΜ ποτ' ὀρθὰς τᾷ ΖΗ ἐν τῷ κύκλῳ τῷ περὶ τὰν ΖΗ, τὸ δὲ Μ νοείσθω μετέωρον ἐν τᾷ περιφερείᾳ τοῦ ἡμικυκλίου τοῦ περὶ διάμετρον τὰν ΖΗ · τὸν αὐτὸν δὴ ἔχει λόγον τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΚ καθέτου ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΚ, ΚΒ περιεχόμενον καὶ τὸ ἀπὸ ΖΓ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον, ἐπεὶ ἴσα ἐστὶν ἁ ΖΗ τᾷ ἑτέρᾳ διαμέτρῳ. Ἔχει δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΖΛ, ΛΗ περιεχόμενον ποτὶ τὸ ὑπὸ ΑΚ, ΚΒ περιεχόμενον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ΖΓ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ ΑΔ · ἴσον οὖν ἐντι τὸ ὑπὸ τᾶν ΖΛ, ΛΗ περιεχόμενον τῷ ἀπὸ τᾶς ΘΚ τετραγώνῳ. Ἔστιν δὲ ἴσον καὶ τῷ ἀπὸ ΛΜ · ἴσαι ἄρα ἐντὶ αἱ ΘΚ, ΜΛ κάθετοι. Παράλληλοι οὖν ἐντι αἱ ΛΚ, ΜΘ · ὥστε καὶ αἱ ΔΓ, ΜΘ παράλληλοι ἐσσοῦνται. Καὶ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἄρα ἐστὶ τοῦ κυλίνδρου ἁ ΘΜ, ἐπεὶ ἀπὸ τοῦ Μ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐόντος ἆκται παρὰ τὸν ἄξονα · δῆλον οὖν ὅτι καὶ τὸ Θ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐστὶν αὐτοῦ. Ὑπέκειτο δὲ μὴ εἶμεν · φανερὸν οὖν ἐστιν, ὃ ἔδει δεῖξαι.

Δῆλον δὴ ὅτι καὶ ὁ κύλινδρος ὁ περιλαμβάνων ὀρθὸς

11 τᾷ G : τᾶς DEH ‖ 19 ΑΔ Nizzius : ΑΔ τῆς ἐλλείψεως BDEGH ‖ 20 τᾶν G : τᾶς DEGH ‖ τῷ G : τὸ DEGH ‖ 23 ἐσσοῦνται Torellius : ἔωντι DEGH sunt B ‖ 28 περιλαμβάνων Heiberg : περιλαμβάνων τὰν ἔλλειψιν BDEGH.

distance des droites menées des extrémités de l'un des diamètres parallèlement au segment de droite érigé (sc. au centre Δ).

Fig. 77.

Que l'autre diamètre soit maintenant supérieur à ZH ; soit ΠZ égal à l'un des diamètres ; faisons passer par ΠZ le plan perpendiculaire au plan où sont situés AB et ΓΔ ; décrivons dans ce plan un cercle de diamètre ΠZ, et faisons passer par ce cercle un cylindre ayant pour axe ΔP ; on démontrera de la même manière que c'est dans la surface de ce cylindre qu'est située l'ellipse.

Que l'un des diamètres soit, enfin, inférieur à ZH. Que l'excès du carré sur ZΓ sur le carré de la moitié de l'un des diamètres soit égal au carré sur ΓΞ ; élevons en Ξ une perpendiculaire au plan contenant AB et ΓΔ égale à la moitié de l'un des diamètres, soit ΞN, et imaginons le point N élevé[1] ; le segment de droite ΓN est donc égal à ΓZ[2]. Décrivons donc dans le plan où sont situés ZH et ΓN un cercle de diamètre ZH ; ce cercle passera par le point N ; faisons passer par ce

1. C'est-à-dire situé au-dessus du plan des droites AB et ΓΔ.
2. Cf. Eucl. I, 47.

ἐσσεῖται, εἴ κα ᾖ ἁ ἑτέρα διάμετρος ἴσα τῷ διαστήματι τᾶν ἀπὸ τῶν περάτων τᾶς ἑτέρας διαμέτρου ἀγμενᾶν παρὰ τὰν ἀνεστάκουσαν εὐθεῖαν.

Fig. 77.

Ἔστω πάλιν ἁ ἑτέρα διάμετρος μείζων τᾶς ΖΗ, καὶ ἴσα ἔστω ἁ ΠΖ τᾷ ἑτέρᾳ διαμέτρῳ, ἀπὸ δὲ τᾶς ΠΖ ἐπίπεδον ἀνεστακέτω ὀρθὸν ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἐν ᾧ ἐντι αἱ ΒΑ, ΓΔ, καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ κύκλος ἔστω περὶ διάμετρον τὰν ΠΖ, ἀπὸ δὲ τοῦ κύκλου τούτου κύλινδρος ἔστω ἄξονα ἔχων τὰν ΔΡ· ἐν δὴ τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου τούτου διὰ τῶν αὐτῶν δειχθήσεται ἐοῦσα ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά.

Ἀλλ' ἔστω ἐλάσσων ἁ ἑτέρα διάμετρος τᾶς ΖΗ. Ὧι δὴ μεῖζον δύναται ἁ ΖΓ τᾶς ἡμισείας τᾶς ἑτέρας διαμέτρου ἔστω τὸ ἀπὸ τᾶς ΓΞ τετράγωνον, καὶ ἀπὸ τοῦ Ξ ἀνεστακέτω γραμμὰ ἴσα τᾷ ἡμισείᾳ τᾶς ἑτέρας διαμέτρου ὀρθὰ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐντι αἱ ΑΒ, ΓΔ, ἁ ΞΝ, τὸ δὲ Ν νοείσθω μετέωρον· ἁ οὖν ΓΝ ἴσα ἐντὶ τᾷ ΓΖ. Ἐν δὴ τῷ ἐπιπέδῳ, ἐν ᾧ ἐντι αἱ ΖΗ, ΓΝ, κύκλος γεγράφθω περὶ διάμετρον τὰν ΖΗ· ἥξει δὲ οὗτος διὰ τοῦ Ν· καὶ ἀπὸ τοῦ κύκλου κύλινδρος

1 ᾖ ἁ Heiberg : ἁ Ε ἡ DGH sit B ‖ 2 τῶν G : τᾶν DEH ‖ 4 ἁ add. Heiberg ‖ 13 μεῖζον BG : μείζων DEH ‖ 17 ἐντὶ τᾷ BG : εντα DEH ‖ 18 τὰν G : τὰ DEH ‖ 19 κύλινδρος BG : τοῦ κυλίνδρου DEH.

cercle un cylindre ayant pour axe ΓΔ ; c'est donc dans la surface de ce cylindre qu'est située l'ellipse.

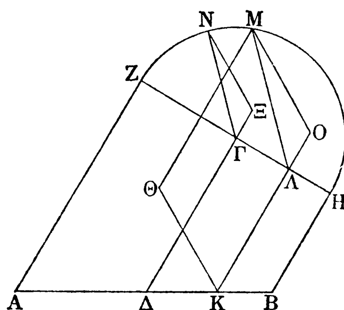
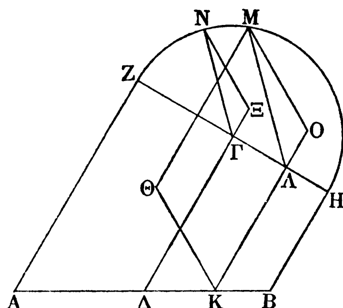


Fig. 78.

En effet, si elle n'y est pas, il existera un point sur elle qui n'est pas situé dans la surface du cylindre. Prenons-y donc un point Θ, abaissons la perpendiculaire ΘK à AB, menons par K la parallèle KΛ à ΓΔ et abaissons du point Λ la perpendiculaire ΛM à ZH dans le demi-cercle de diamètre ZH ; imaginons un point M sur la circonférence du demi-cercle de diamètre ZH, et abaissons du point M la perpendiculaire MO sur la droite KΛ ; or ce MO sera perpendiculaire au plan où sont situés AB et ΓΔ, puisque KΛ est perpendiculaire à ZH[1] ; dès lors, le rapport du carré sur MO au carré sur MΛ est égal au rapport du carré sur ΞN au carré sur NΓ[2], et le rapport du carré sur MΛ au rectangle de côtés AK et KB est égal au rapport du carré sur ΓN au carré sur AΔ, du moment que, d'un côté, le carré sur MΛ est équivalent au rectangle de côtés ΛZ et ΛH, et que, d'un autre côté, le carré sur ΓN est égal au carré sur ΓZ ; il s'ensuit[3] que le carré sur MO est au rectangle de côtés AK et KB comme le

1. Cf. Eucl. XI, 4 et 18.
2. Cf. Eucl. XI, 6 et 10.
3. Cf. Eucl. V, 22.

ἔστω ἄξονα ἔχων τὰν ΓΔ · ἐν δὴ τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου τούτου ἐστὶν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά.



Fig· 78.

Εἰ γὰρ μή ἐστιν, ἐσσεῖταί τι σαμεῖον ἐπ' αὐτᾶς, ὃ οὐκ ἔστιν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου. Λελάφθω δή τι σαμεῖον ἐπ' αὐτᾶς τὸ Θ, καὶ ἁ ΘΚ κάθετος ἄχθω ἐπὶ τὰν ΑΒ, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ παρὰ τὰν ΓΔ ἔστω ἁ ΚΛ, καὶ ἀπὸ τοῦ Λ ἄχθω ποτ' ὀρθὰς τᾷ ΖΗ ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ τῷ περὶ διάμετρον τὰν ΖΗ ἁ ΛΜ, νοείσθω δὲ τὸ Μ ἐπὶ τᾶς περιφερείας τᾶς τοῦ ἡμικυκλίου τοῦ περὶ τὰν ΖΗ, καὶ ἀπὸ τοῦ Μ κάθετος ἄχθω ἐπὶ τὰν ΚΛ ἐκβληθεῖσαν ἁ ΜΟ · ἐσσεῖται δὲ αὕτα ὀρθὰ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐντι αἱ ΑΒ, ΓΔ, ἐπεὶ ποτ' ὀρθάς ἐντι ἁ ΚΛ τᾷ ΖΗ · ἔστιν δή, ὡς μὲν τὸ ἀπὸ τᾶς ΜΟ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΜΛ, οὕτως τὸ ἀπὸ τᾶς ΞΝ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΝΓ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τᾶς ΜΛ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΚ, ΚΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΓΝ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΔ, ἐπεὶ τὸ μὲν ἀπὸ τᾶς ΜΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τᾶν ΛΖ, ΛΗ περιεχομένῳ, τὸ δὲ ἀπὸ τᾶς ΓΝ τῷ ἀπὸ τᾶς ΓΖ · ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ τᾶς ΜΟ τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΚ, ΚΒ,

1 τὰν G : τὴν EH τῶν D || 7 τᾷ G : τᾶς DEH || 8-9 περιφερείας τᾶς Heiberg : superficie B om. DEGH || 17 τὸ B : τῷ DEGH || 18 τὸ alt. GH : om. DE.

carré sur ΞN est au carré sur AΔ. Mais le carré sur KΘ lui aussi est au rectangle de côtés AK et KB comme le carré sur ΞN est au carré sur AΔ, puisque ΞN est égal à la moitié de l'un des diamètres ; il est donc évident que les perpendiculaires MO et ΘK sont égales ; KO et ΘM sont donc parallèles[1]. Mais puisque MΘ est parallèle à l'axe du cylindre[2] et que le point M est situé dans sa surface, nécessairement la droite MΘ est elle aussi située dans la surface du cylindre ; il est donc évident que le point Θ lui aussi est situé dans la surface du cylindre ; mais il n'y était pas (sc. par hypothèse) ; nécessairement donc, de toute évidence, l'ellipse est située dans la surface du cylindre.

10.

Que le rapport de tout cône à un autre cône est le produit du rapport des bases par le rapport des hauteurs, cette proposition a été démontrée par les géomètres antérieurs[3] ; mais la même démonstration s'applique aussi à la proposition que voici : le rapport de tout segment de cône à un autre segment de cône est le produit du rapport des bases par le rapport des hauteurs.

De même pour la proposition, affirmant que tout tronc de cylindre est équivalent au triple du segment de cône ayant même base et même hauteur, la démonstration est la même que pour la proposition selon laquelle le cylindre est équivalent au triple du cône ayant même base et même hauteur que le cylindre[4].

11.

Si un paraboloïde de révolution est coupé par un plan passant par l'axe ou parallèlement à l'axe, l'inter-

1. Cf. Eucl. I, 33 et XI, 6.
2. Cf. Eucl. XI, 9.
3. Cf. Eucl. XII, 11 et 14 ; Archim., *De la sph. et du cyl.* I, lemme 1.
4. Proposition démontrée par Eudoxe, cf. Arch. à Dosithée, *De la sph. et du cyl. I*, p. 9.

οὕτως τὸ ἀπὸ τᾶς ΞΝ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΔ. Ἐντὶ δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΚΘ τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΚ, ΚΒ, ὡς τὸ ἀπὸ τᾶς ΞΝ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΔ, ἐπεὶ ἴσα ἐστὶν ἁ ΞΝ τᾷ ἡμισέᾳ τᾶς ἑτέρας διαμέτρου· δῆλον οὖν ὅτι ἴσαι ἐντὶ αἱ ΜΟ, ΘΚ κάθετοι· ὥστε παράλληλοι αἱ ΚΟ, ΘΜ. Ἐπεὶ δὲ ἁ ΜΘ παρὰ τὸν ἄξονά ἐντι τοῦ κυλίνδρου καὶ τὸ Μ σαμεῖον ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ αὐτοῦ, ἀναγκαῖον καὶ τὰν ΜΘ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ εἶμεν τοῦ κυλίνδρου· φανερὸν οὖν ὅτι καὶ τὸ Θ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐντὶ αὐτοῦ. Οὐκ ἦν δέ· δῆλον οὖν ὅτι ἀναγκαῖόν ἐστι τὰν τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ εἶμεν τοῦ κυλίνδρου.

ι'.

Ὅτι μὲν πᾶς κῶνος ποτὶ κῶνον τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἔκ τε τοῦ τῶν βάσιων λόγου καὶ ἐκ τοῦ τῶν ὑψέων ἀποδείκνυται ὑπὸ τῶν πρότερον, ἁ αὐτὰ δὲ ἀπόδειξίς ἐντι καὶ διότι πᾶν ἀπότμαμα κώνου ποτὶ ἀπότμαμα κώνου τὸν συγκείμενον λόγον ἔχει ἔκ τε τοῦ τῶν βάσιων λόγου καὶ ἐκ τοῦ τῶν ὑψέων.

Καὶ ὅτι πᾶς τόμος κυλίνδρου τριπλασίων ἐστὶ τοῦ ἀποτμάματος τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τόμῳ καὶ ὕψος ἴσον, ἁ αὐτὰ ἀπόδειξις, ἅπερ καὶ ὅτι ὁ κύλινδρος τριπλάσιός ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ κυλίνδρῳ καὶ ὕψος ἴσον.

ια'.

Εἴ κα τὸ ὀρθογώνιον κωνοειδὲς ἐπιπέδῳ τμαθῇ διὰ τοῦ ἄξονος ἢ παρὰ τὸν ἄξονα, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ὀρθογωνίου

4 ἴσαι G : ἴσα DEH ‖ 5 παράλληλοι Heiberg e p. 178 l. 22 : ἴσαι BDEGH ‖ ΚΟ Torellius : ΚΘ mss. BDEGH ‖ 6 ἐντι BG : ἐν τῇ DEGH ‖ 14 τοῦ alt. EG : τῶν DH ‖ 21 ἅπερ DEGH : om. B.

section sera la même parabole que celle qui comprend (c'est-à-dire celle dont la révolution engendre) la figure, et son diamètre sera l'intersection entre le plan coupant la figure et le plan mené par l'axe perpendiculairement au plan sécant.

Mais si le paraboloïde de révolution est coupé par un plan perpendiculaire à l'axe, l'intersection sera un cercle ayant son centre sur l'axe.

Si un hyperboloïde de révolution est coupé par un plan passant par l'axe ou parallèle à l'axe ou passant par le sommet du cône comprenant (c'est-à-dire engendré par la révolution des asymptotes de l'hyperbole engendrant) l'hyperboloïde, l'intersection sera une hyperbole ; si le plan sécant passe par l'axe, cette hyperbole sera égale à celle qui comprend la figure ; si le plan sécant est parallèle à l'axe, elle lui sera semblable ; si le plan sécant passe par le sommet du cône comprenant l'hyperboloïde, elle ne lui sera pas semblable, mais le diamètre de l'intersection sera l'intersection du plan coupant la figure et du plan mené par l'axe perpendiculairement au plan sécant.

Mais si l'hyperboloïde de révolution est coupé par un plan perpendiculaire à l'axe, l'intersection sera un cercle ayant son centre sur l'axe.

Si l'un ou l'autre des ellipsoïdes de révolution est coupé par un plan passant par l'axe ou parallèle à l'axe, l'intersection sera une ellipse, égale à celle qui comprend la figure dans le cas où le plan sécant passe par l'axe, semblable dans le cas où le plan sécant est parallèle à l'axe, et le diamètre de l'intersection sera l'intersection du plan coupant la figure et du plan mené par l'axe perpendiculairement au plan sécant.

Mais si l'ellipsoïde de révolution est coupé par un plan perpendiculaire à l'axe, l'intersection sera un cercle ayant son centre sur l'axe.

Si n'importe laquelle des figures indiquées est coupée

κώνου τομὰ ἁ αὐτὰ τᾷ περιλαμβανούσᾳ τὸ σχῆμα, διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἐσσεῖται ἁ κοινὰ τομὰ τῶν ἐπιπέδων τοῦ τέμνοντος τὸ σχῆμα καὶ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ἀχθέντος ὀρθοῦ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ τέμνον.

Εἰ δέ κα τμαθῇ τῷ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, ἁ τομὰ κύκλος ἐσσεῖται τὸ κέντρον ἔχων ἐπὶ τοῦ ἄξονος.

Εἴ κα τὸ ἀμβλυγώνιον κωνοειδὲς ἐπιπέδῳ τμαθῇ διὰ τοῦ ἄξονος ἢ παρὰ τὸν ἄξονα ἢ διὰ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδές, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ἀμβλυγωνίου κώνου τομά, εἰ μέν κα διὰ τοῦ ἄξονος, ἁ αὐτὰ τᾷ περιλαμβανούσᾳ τὸ σχῆμα, εἰ δέ κα παρὰ τὸν ἄξονα, ὁμοία αὐτᾷ, εἰ δέ κα διὰ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδές, οὐχ ὁμοία, διάμετρος δὲ τᾶς τομᾶς ἐσσεῖται ἁ κοινὰ τομὰ τῶν ἐπιπέδων τοῦ τέμνοντος τὸ σχῆμα καὶ τοῦ ἀχθέντος διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθοῦ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον.

Εἰ δέ κα τμαθῇ ὀρθῷ τῷ ἐπιπέδῳ ποτὶ τὸν ἄξονα, ἁ τομὰ κύκλος ἐσσεῖται τὸ κέντρον ἔχων ἐπὶ τοῦ ἄξονος.

Εἴ κα τῶν σφαιροειδέων σχημάτων ὁποτερονοῦν ἐπιπέδῳ τμαθῇ διὰ τοῦ ἄξονος ἢ παρὰ τὸν ἄξονα, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ὀξυγωνίου κώνου τομά, εἰ μέν κα διὰ τοῦ ἄξονος, αὐτὰ ἁ περιλαμβάνουσα τὸ σχῆμα, εἰ δέ κα παρὰ τὸν ἄξονα, ὁμοία αὐτᾷ, διάμετρος δὲ τᾶς τομᾶς ἐσσεῖται ἁ κοινὰ τομὰ τῶν ἐπιπέδων τοῦ τέμνοντος τὸ σχῆμα καὶ τοῦ ἀχθέντος διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθοῦ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον.

Εἰ δέ κα τμαθῇ τῷ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, ἁ τομὰ κύκλος ἐσσεῖται τὸ κέντρον ἔχων ἐπὶ τοῦ ἄξονος.

Εἴ κα τῶν εἰρημένων σχημάτων ὁποιονοῦν ἐπιπέδῳ

1 κώνου Torellius : κωνοειδέος BDEGH ‖ ἁ add. Heiberg ‖ 8 ἢ alt. add. Torellius ‖ 10 κα add. Heiberg ‖ ἁ add. Heiberg ‖ 11 κα Heiberg : καὶ DEGH ‖ 12 κα Heiberg : καὶ BDEGH ‖ 17 δέ Heiberg : uero B om. DEGH ‖ 21 κα Heiberg : καὶ BDEGH ‖ 22 κα Heiberg : καὶ DEGH ‖ 23 τομὰ B : om. DEGH ‖ 26 κα Heiberg : καὶ BDEGH.

par un plan passant par l'axe, les perpendiculaires abaissées des points de la surface de la figure, qui ne sont pas situés sur l'intersection, au plan sécant auront leurs pieds à l'intérieur de la section de la figure.

De toutes ces propositions les démonstrations sont évidentes[1].

12.

Si un paraboloïde de révolution est coupé par un plan ne passant pas par l'axe ni parallèle à l'axe ni perpendiculaire à l'axe, l'intersection sera une ellipse, dont le grand axe sera le segment de droite intercepté à l'intérieur du paraboloïde sur la droite d'intersection du plan coupant la figure et du plan mené par l'axe perpendiculairement au plan sécant, et dont le petit axe sera égal à la distance des droites menées par les extrémités du grand axe parallèlement à l'axe du paraboloïde.

Que le paraboloïde de révolution soit coupé par un plan de la manière indiquée ; coupons-le par un autre plan passant par l'axe et perpendiculaire au plan sécant, et soit ΑΒΓ son intersection avec le paraboloïde, et la droite ΓΑ son intersection avec le plan coupant la figure ; soit ΒΔ l'axe du paraboloïde et le diamètre de la figure d'intersection ; il faut montrer que l'intersection du paraboloïde par le plan marqué par ΑΓ est une ellipse, que le grand axe est ΑΓ, le petit axe égal à ΛΑ, ΓΛ étant parallèle à ΒΔ, et ΑΛ étant perpendiculaire à ΓΛ.

Imaginons un point Κ pris sur la section ; du point Κ abaissons la perpendiculaire ΚΘ à ΓΑ ; ΚΘ sera donc

1. Certaines de ces propositions ont été démontrées par des éditeurs d'Archimède du XVIe au XVIIIe siècle ; cf. Heiberg, I, p. 309.

τμαθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, αἱ ἀπὸ τῶν σαμείων τῶν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος μὴ ἐπὶ τᾶς τομᾶς ἐόντων κάθετοι ἀγόμεναι ἐπὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον ἐντὸς πεσοῦνται τᾶς τοῦ σχήματος τομᾶς.

Τούτων δὲ πάντων φανεραί ἐντι αἱ ἀποδείξιες.

ιβ′.

Εἴ κα τὸ ὀρθογώνιον κωνοειδὲς ἐπιπέδῳ τμαθῇ μήτε διὰ τοῦ ἄξονος μήτε παρὰ τὸν ἄξονα μήτε ποτ' ὀρθὰς τῷ ἄξονι, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ὀξυγωνίου κώνου τομά, διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ μείζων ἐσσεῖται ἁ ἐναπολαφθεῖσα ἐν τῷ κωνοειδεῖ ἀπὸ τᾶς γενομένας τομᾶς τῶν ἐπιπέδων τοῦ τέμνοντος τὸ σχῆμα καὶ τοῦ ἀχθέντος διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθοῦ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον, ἁ δὲ ἐλάσσων διάμετρος ἴσα ἐσσεῖται τῷ διαστήματι τᾶν ἀχθεισᾶν παρὰ τὸν ἄξονα ἀπὸ τῶν περάτων τᾶς μείζονος διαμέτρου.

Τετμάσθω γὰρ τὸ ὀρθογώνιον κωνοειδὲς ἐπιπέδῳ, ὡς εἴρηται, τμαθέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον ἔστω τοῦ μὲν κωνοειδέος τομὰ ἁ ΑΒΓ, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ τέμνοντος τὸ σχῆμα ἁ ΓΑ εὐθεῖα, ἄξων δὲ ἔστω τοῦ κωνοειδέος καὶ διάμετρος τᾶς τομᾶς ἁ ΒΔ· δεικτέον ὅτι ἁ τομὰ τοῦ κωνοειδέος ἁ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κατὰ τὰν ΑΓ ὀξυγωνίου ἐστὶ κώνου τομά, καὶ διάμετρος αὐτᾶς ἁ μείζων ἐστὶν ἁ ΑΓ, ἁ δὲ ἐλάσσων διάμετρος ἴσα ἐντὶ τᾷ ΛΑ τᾶς μὲν ΓΛ παρὰ τὰν ΒΔ ἐούσας, τᾶς δὲ ΑΛ καθέτου ἐπὶ τὰν ΓΛ.

Νοείσθω τι σαμεῖον ἐπὶ τᾶς τομᾶς λελαμμένον τὸ Κ, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ κάθετος ἄχθω ἐπὶ τὰν ΓΑ ἁ ΚΘ· ἐσσεῖται

13 διάμετρος Basil. : ἁ διάμετρος DEGH ‖ 17 ἄλλῳ B : ὀρθῷ ἄλλῳ DEGH ‖ 20 ΓΑ ms. B : ΓΔ mss. DEGH ‖ 21 ὑπὸ Heiberg : ἀπὸ BDEGH ‖ 22 τοῦ alt. add. Heiberg ‖ τὰν B : πᾶν ἁ DEGH ‖ 24 τᾷ BG : ἁ DEH.

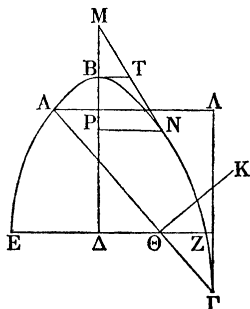


Fig. 79.

perpendiculaire au plan contenant la parabole ΑΓΒ, puisque le plan sécant est lui-même perpendiculaire à ce même plan[1] ; menons par Θ la droite EZ faisant des angles droits avec BΔ, et faisons passer un plan par les droites EZ et ΚΘ ; ce plan sera perpendiculaire à la droite BΔ[2] ; le paraboloïde sera ainsi coupé par un plan perpendiculaire à l'axe ; l'intersection sera par conséquent un cercle de centre Δ[3] ; il s'ensuit que le carré sur ΚΘ sera équivalent au rectangle de côtés ΖΘ et ΘΕ, du moment que, dans le demi-cercle de diamètre EZ, ΚΘ comme perpendiculaire est moyenne proportionnelle entre ΕΘ et ΘΖ. Menons à la section conique la tangente MN parallèlement à ΑΓ, point de contact N, et la tangente BT parallèlement à EZ ; dès lors, le rapport du rectangle de côtés ΑΘ et ΘΓ au rectangle de côtés ΕΘ et ΘΖ sera égal au rapport du carré sur NT au carré sur BT ; car ceci a été démontré[4]. Mais NT est égal à TM parce que BP est égal à BM[5] ; le rectangle de côtés ΑΘ et ΘΓ a donc lui aussi au carré sur ΚΘ le même rapport que le carré sur TM a au carré

1. Cf. Eucl. XI, def. 4.
2. Cf. Eucl. XI, 18.
3. Cf. prop. 11, 1re partie.
4. Cf. prop. 3.
5. Cf. Eucl. VI, 2.

Fig. 79.

οὖν ἁ ΚΘ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἐν ᾧ ἐστιν ἁ ΑΓΒ ὀρθογωνίου κώνου τομά, διότι καὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστιν ποτὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον · διὰ δὲ τοῦ Θ ἄχθω ἁ ΕΖ ὀρθὰς ποιοῦσα γωνίας ποτὶ τὰν ΒΔ, καὶ διὰ τᾶν ΕΖ, ΚΘ εὐθειᾶν ἐπίπεδον ἐκβεβλήσθω · ἐσσεῖται δὲ τοῦτο ὀρθὸν ποτὶ τὰν ΒΔ · τετμήσεται δὴ τὸ κωνοειδὲς σχῆμα ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα · ὥστε ἁ τομὰ κύκλος ἐσσεῖται, κέντρον δὲ αὐτοῦ τὸ Δ · ἁ ἄρα ΚΘ ἴσον δυνασεῖται τῷ ὑπὸ ΖΘ, ΘΕ [ἡμικύκλιον γάρ ἐστι τὸ ἐπὶ τῆς ΕΖ, καὶ ἁ ΚΘ κάθετος οὖσα μέση γίνεται ἀνάλογον τῷ ὑπὸ τᾶν ΕΘ, ΘΖ περιεχομένῳ]. Ἄχθω δὲ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς ἁ μὲν ΜΝ παρὰ τὰν ΑΓ, ἐπιψαυέτω δὲ κατὰ τὸ Ν, ἁ δὲ ΒΤ παρὰ τὰν ΕΖ · τὸ δὴ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΑΘ, ΘΓ ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΕΘ, ΘΖ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΝΤ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΤ · δέδεικται γὰρ τοῦτο. Τᾷ δὲ ΝΤ ἴσα ἐντὶ ἁ ΤΜ, διότι καὶ ἁ ΒΡ τᾷ ΒΜ · ἔχει οὖν καὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΑΘ, ΘΓ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΚΘ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ΤΜ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΤΒ ·

5 εὐθειᾶν BG : εὐθείαν H εὐθεῖαν E εὐθείας D || 6 δὴ Nizzius : δὲ BDEGH || 15 τᾶς Torellius : τᾶν DEGH.

sur TB ; par conséquent le carré sur la perpendiculaire ΘK a lui aussi au rectangle de côtés AΘ et ΘΓ le même rapport que le carré sur BT a au carré sur TM[1]. Du moment donc que les triangles ΓΑΛ et TMB sont semblables, le rapport du carré sur la perpendiculaire ΘK au rectangle de côtés AΘ et ΘΓ est égal au rapport du carré sur ΑΛ au carré sur ΑΓ[2]. On montrera de la même manière que les rapports des carrés sur les autres perpendiculaires abaissées de la section sur ΑΓ aux rectangles ayant pour côtés les segments de ΑΓ sont eux aussi égaux au rapport du carré sur ΑΛ au carré sur ΑΓ ; il est donc évident que la section est une ellipse dont le grand axe est ΑΓ et le petit axe égal à ΑΛ[3].

13.

Si un hyperboloïde de révolution est coupé par un plan, rencontrant toutes les génératrices du cône asymptotique de l'hyperboloïde, mais non perpendiculaire à l'axe, la section sera une ellipse dont le grand axe sera le segment de droite intercepté à l'intérieur de l'hyperboloïde sur la droite d'intersection entre le plan coupant la figure et le plan mené par l'axe perpendiculairement au plan sécant.

Que l'hyperboloïde de révolution soit, en effet, coupé par un plan de la manière indiquée ; coupons-le par un autre plan, passant par l'axe et perpendiculaire au plan sécant ; que l'hyperbole ΑΒΓ soit son intersection avec l'hyperboloïde[4], que la droite ΑΓ soit son intersection avec le plan coupant la figure ; soit ΒΔ

1. Cf. Eucl. V, 7, coroll.
2. Cf. Eucl. VI, 4.
3. Cf. Apollonius, *Con.* I, 21.
4. Cf. prop. 11, 2[e] partie.

ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΚ καθέτου τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΘ, ΘΓ περιεχόμενον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΤ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΤΜ. Ἐπεὶ οὖν ὁμοῖά ἐντι τὰ ΓΑΛ, ΤΜΒ τρίγωνα, τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΚ καθέτου τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΘ, ΘΓ περιεχόμενον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΛ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΓ τετράγωνον. Ὁμοίως δειχθήσονται καὶ τὰ ἀπὸ τᾶν ἀλλᾶν καθέτων τετράγωνα τᾶν ἀγομενᾶν ἀπὸ τᾶς τομᾶς ἐπὶ τὰν ΑΓ ποτὶ τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν τᾶς ΑΓ τμαμάτων τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΛ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΓ· δῆλον οὖν ὅτι ἁ τομά ἐστιν ὀξυγωνίου κώνου τομά, διάμετροι δὲ αὐτᾶς ἐντι ἁ μὲν μείζων ἁ ΑΓ, ἁ δὲ ἐλάσσων ἴσα τᾷ ΑΛ.

ιγ'.

Εἴ κα τὸ ἀμβλυγώνιον κωνοειδὲς ἐπιπέδῳ τμαθῇ συμπίπτοντι πάσαις ταῖς τοῦ κώνου πλευραῖς τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδὲς μὴ ποτ' ὀρθὰς τῷ ἄξονι, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ὀξυγωνίου κώνου τομά, διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ μείζων ἐσσεῖται ἁ ἐναπολαφθεῖσα ἐν τῷ κωνοειδεῖ ἀπὸ τᾶς γενομένας τομᾶς τῶν ἐπιπέδων τοῦ τε τέμνοντος τὸ σχῆμα καὶ τοῦ ἀχθέντος διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθοῦ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον.

Τεμνέσθω γὰρ τὸ ἀμβλυγώνιον κωνοειδὲς ἐπιπέδῳ, ὡς εἴρηται, καὶ ἄλλῳ ἐπιπέδῳ τμαθέντος αὐτοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον τοῦ μὲν κωνοειδέος τομὰ ἔστω ἁ ΑΒΓ ἀμβλυγωνίου κώνου τομά, τοῦ δὲ τέμνοντος τὸ σχῆμα ἐπιπέδου ἁ ΑΓ εὐθεῖα, ἄξων δὲ τοῦ

4 ΤΜΒ ms. B : ΤΛΒ mss. DEGH ‖ 4-7 τὸ — ΑΓ add. Commandinus ‖ 7 τετράγωνον add. Heiberg ‖ 10 ἔχοντα B : ἔχοντι DEGH ‖ 12 τομά G : τομᾶς DEH ‖ διάμετροι BG : διάμετρος DEH ‖ 15 ἐπιπέδῳ BG : om. DEH.

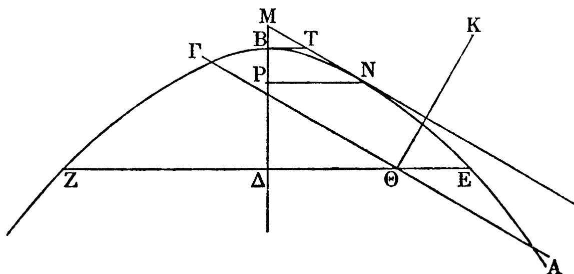


Fig. 80.

l'axe de l'hyperboloïde et le diamètre (c'est-à-dire l'axe) de la section. Imaginons donc un point K pris sur la section et abaissons de K la perpendiculaire KΘ sur AΓ ; KΘ sera donc perpendiculaire au plan où est située la section conique ABΓ[1]. Menons par Θ la perpendiculaire EZ à BΔ et faisons passer par les droites EZ et KΘ un plan qui coupe l'hyperboloïde, qui sera ainsi coupé par un plan perpendiculaire à l'axe ; l'intersection sera par conséquent un cercle, et son centre sera le point Δ[2] ; il s'ensuit que le carré sur la perpendiculaire KΘ sera équivalent au rectangle de côtés EΘ et ΘZ. Menons de nouveau la droite MN, parallèle à AΓ et tangente à la section conique en N, et la droite BT parallèle à EZ ; dès lors, le rectangle de côtés EΘ et ΘZ a au rectangle de côtés AΘ et ΘΓ le même rapport que le carré sur BT a au carré sur TN[3] ; par conséquent, le rapport du carré sur la perpendiculaire KΘ au rectangle de côtés AΘ et ΘΓ est égal au rapport du carré sur BT au carré sur TN. On démontrera de la même manière que les rapports des carrés sur les autres perpendiculaires abaissées (sc. de points) de la section sur AΓ aux rectangles ayant pour côtés les segments de AΓ déterminés par les perpendiculaires sont eux aussi égaux au rapport du

1. Cf. Eucl. XI, def. 4.
2. Cf. prop. 11, 2e partie.
3. Cf. prop. 3.

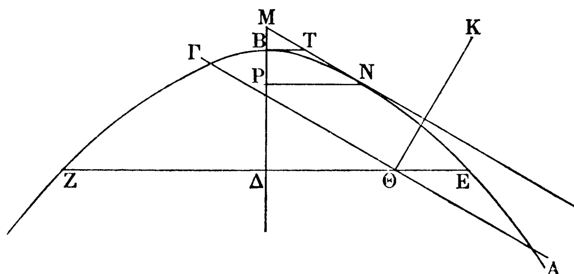


Fig. 80.

κωνοειδέος καὶ διάμετρος τᾶς τομᾶς ἁ ΒΔ. Νοείσθω δή τι ἐπὶ τᾶς τομᾶς λελαμμένον σαμεῖον τὸ Κ, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ κάθετος ἄχθω ἐπὶ τὰν ΑΓ ἁ ΚΘ· ἐσσεῖται δὴ αὕτα ὀρθὰ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἐν ᾧ ἐντι ἁ ΑΒΓ κώνου τομά. Διὰ δὲ τοῦ Θ ἄχθω ἁ ΕΖ ποτ' ὀρθὰς τᾷ ΒΔ, καὶ διὰ τᾶν ΕΖ, ΚΘ εὐθειᾶν ἐπίπεδον ἄχθω τέμνον τὸ κωνοειδές· τετμήσεται δὴ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα· ὥστε ἁ τομὰ κύκλος ἐσσεῖται, κέντρον δὲ αὐτοῦ τὸ Δ· ἁ ἄρα κάθετος ἁ ΚΘ ἴσον δυνασεῖται τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ΕΘ, ΘΖ. Ἄχθω δὴ πάλιν ἁ μὲν ΜΝ παρὰ τὰν ΑΓ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ Ν, ἁ δὲ ΒΤ παρὰ τὰν ΕΖ· τὸ δὴ περιεχόμενον ὑπὸ ΕΘ, ΘΖ ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΑΘ, ΘΓ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΤ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΤΝ· ὥστε τὸ ἀπὸ τᾶς ΚΘ καθέτου τετράγωνον ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΑΘ, ΘΓ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΤ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΤΝ. Ὁμοίως οὖν δειχθησοῦνται καὶ τὰ ἀπὸ τᾶν ἀλλᾶν καθέτων τᾶν ἀπὸ τᾶς τομᾶς ἀγομενᾶν ἐπὶ τὰν ΑΓ ποτὶ τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν τμαμάτων τᾶς ΑΓ, ὧν αἱ κάθετοι ποιοῦντι, τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΤ τετράγωνον

4 ἐπίπεδον GH : ἐπιπέδῳ DE ‖ 17 δειχθησοῦνται G : δειχθησοῦντι D δειχθήσονται EH.

carré sur BT au carré sur TN ; de plus, BT est inférieur à TN parce que aussi MT est inférieur à TN, du moment que MB est inférieur à BP ; car c'est là une propriété des hyperboles ; il est donc évident que la section est une ellipse et que son grand axe est le segment de droite ΑΓ ; NP étant, dans des conditions semblables, une perpendiculaire dans l'hyperbole, le grand axe y est le segment de droite ΓΛ.

14.

Si un ellipsoïde de révolution allongé est coupé par un plan non perpendiculaire à l'axe, l'intersection sera une ellipse, dont le grand axe sera le segment de droite intercepté à l'intérieur de l'ellipsoïde sur la droite d'intersection entre le plan coupant la figure et le plan mené par l'axe perpendiculairement au plan sécant.

Fig. 81.

Si l'ellipsoïde est coupé par un plan passant par l'axe ou parallèle à l'axe, la proposition est évidente[1] ; mais coupons-le par un autre plan ; coupons-le, de plus, par un plan passant par l'axe et perpendiculaire au plan sécant ; que son intersection avec l'ellipsoïde soit l'ellipse ΑΒΓΔ[1], que son intersection avec le plan sécant soit la droite ΓΑ ; soit ΒΔ l'axe de l'ellipsoïde et le diamètre (c'est-à-dire l'axe) de l'ellipse ; soit X le centre et ΠΡ le petit axe. Menons BT perpendiculaire-

1. Cf. prop. 11, 3e partie.

ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΤΝ. Καί ἐστιν ἐλάσσων ἁ ΒΤ τᾶς ΤΝ, διότι καὶ ἁ ΜΤ ἐλάσσων ἐστὶν τᾶς ΤΝ· καὶ γὰρ ἁ ΜΒ ἐλάσσων τᾶς ΒΡ· τοῦτο γάρ ἐστιν ἐν ταῖς τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομαῖς σύμπτωμα· δῆλον οὖν ὅτι ἁ τομὰ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ καὶ διάμετρος αὐτᾶς μείζων ἁ ΑΓ [ὁμοίως καθέτου οὔσης τᾶς ΝΡ ἐν τᾷ τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομᾷ διάμετρος ταύτας μείζων ἐστὶν ἁ ΓΛ].

ιδ'.

Εἴ κα τὸ παράμακες σφαιροειδὲς ἐπιπέδῳ τμαθῇ μὴ ποτ' ὀρθὰς τῷ ἄξονι, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ὀξυγωνίου κώνου τομά, διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ μείζων ἐσσεῖται ἁ ἐναπολαφθεῖσα ἐν τῷ σφαιροειδεῖ ἀπὸ τᾶς γενομένας τομᾶς τῶν ἐπιπέδων τοῦ τέμνοντος τὸ σχῆμα καὶ τοῦ ἀχθέντος διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθοῦ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον.

Fig. 81.

Εἰ μὲν οὖν κα τμαθῇ διὰ τοῦ ἄξονος ἢ παρὰ τὸν ἄξονα, δῆλον· τετμάσθω δὲ ἄλλῳ ἐπιπέδῳ, τμαθέντος δε αὐτοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ τέμνον τοῦ μὲν σφαιραειδέος τομὰ ἔστω ἁ ΑΒΓΔ ὀξυγωνίου κώνου τομά, τοῦ δὲ τέμνοντος αὐτὸ ἐπιπέδου ἁ ΓΑ εὐθεῖα, ἄξων δὲ ἔστω τοῦ σφαιροειδέος καὶ διάμετρος τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἁ ΒΔ, κέντρον δὲ τὸ Χ, καὶ ἐλάσσων διάμετρος ἔστω ἁ ΠΡ.

4 οὖν B : om. DEGH || 12 σφαιροειδεῖ EG : σφαιροειδὲς DH || 19 ἔστω DEGH : om. B.

ment à BΔ, et la droite HN, parallèle à AΓ et tangente à l'ellipse au point N ; menons aussi par le point X la parallèle MΛ à AΓ ; par les mêmes raisonnements qu'antérieurement on montrera donc que les rapports des carrés sur les perpendiculaires abaissées de la section sur AΓ aux rectangles ayant pour côtés les segments de AΓ sont égaux au rapport du carré sur BT au carré sur TN. Il est donc évident que la section est une ellipse et que ΓA en est un axe[1] ; mais il faut montrer que ΓA est le grand axe. En effet, le rapport du rectangle de côtés ΠX et XP au rectangle de côtés MX et XΛ est égal au rapport du carré sur BT au carré sur NT, puisque les droites ΠP et MΛ sont parallèles aux tangentes[2]. Or le rectangle de côtés ΠX et XP est inférieur au rectangle de côtés MX et XΛ du moment que XΠ est inférieur à XΛ ; il s'ensuit qu'à son tour le carré sur BT est inférieur au carré sur TN ; par conséquent, les carrés sur les perpendiculaires abaissées de la section sur AΓ sont eux aussi inférieurs aux rectangles ayant pour côtés les segments de AΓ. Il est donc évident que ΓA est le grand axe.

Si un ellipsoïde aplati est coupé par un plan, toutes les conclusions resteront les mêmes, sauf que le segment de droite intercepté à l'intérieur de l'ellipsoïde sera le petit axe.

Pour toutes les figures traitées il est évident, d'après ce qui précède, que si elles sont coupées par des plans parallèles, leurs sections seront semblables, puisque les rapports entre les carrés sur les perpendiculaires et les rectangles ayant pour côtés les segments seront tous égaux[3].

1. Cf. Apollonius, *Con.* I, 21.
2. Cf. prop. 3.
3. Cf. prop. 12, 13, 14.

Ἄχθω δὲ ἁ μὲν ΒΤ ποτ' ὀρθὰς τᾷ ΒΔ, ἁ δὲ ΗΝ παρὰ τὰν ΑΓ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς κατὰ τὸ Ν, ἄχθω δὲ καὶ ἁ ΜΛ διὰ τοῦ Χ παρὰ τὰν ΑΓ· ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον δειχθησοῦντι τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν καθέτων τᾶν ἀπὸ τᾶς τομᾶς ἐπὶ τὰν ΑΓ ἀγμενᾶν ποτὶ τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν τᾶς ΑΓ τμαμάτων τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΤ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΤΝ. Ὅτι μὲν οὖν ἁ τομά ἐστιν ὀξυγωνίου κώνου τομὰ καὶ διάμετρος αὐτᾶς ἁ ΓΑ δῆλον· ὅτι δὲ μείζων δεικτέον. Τὸ γὰρ ὑπὸ τᾶν ΠΧ, ΧΡ περιεχόμενον ποτὶ τὸ ὑπὸ ΜΧ, ΧΛ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΤ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΝΤ, ἐπεὶ παρὰ τὰς ἐπιψαυούσας ἐντὶ αἱ ΠΡ, ΜΛ. Ἔλασσον δέ ἐστι τὸ ὑπὸ τᾶν ΠΧ, ΧΡ περιεχόμενον τοῦ ὑπὸ τᾶν ΜΧ, ΧΛ, ἐπεὶ καὶ ἁ ΧΠ τᾶς ΧΛ· ἔλασσον ἄρα ἐστὶν καὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΤ τετράγωνον τοῦ ἀπὸ τᾶς ΤΝ· ὥστε καὶ τὰ ἀπὸ τᾶν καθέτων τετράγωνα τᾶν ἀπὸ τᾶς τομᾶς ἐπὶ τὰν ΑΓ ἀγομενᾶν ἐλάσσονά ἐντι τῶν ὑπὸ τῶν τμαμάτων τᾶς ΑΓ περιεχομένων. Δῆλον οὖν ὅτι μείζων ἐντὶ διάμετρος ἁ ΓΑ.

Εἴ κα τὸ ἐπιπλατὺ σφαιροειδὲς ἐπιπέδῳ τμαθῇ, τὰ μὲν ἄλλα τὰ αὐτὰ ἐσσεῖται, τᾶν δὲ διαμέτρων ἐλάσσων ἐσσεῖται ἁ ἐναπολαφθεῖσα ἐν τῷ σφαιροειδεῖ.

Ἐξ αὐτῶν δὲ φανερὸν ἐν πάντεσσι τοῖς σχημάτεσσιν ὅτι, εἴ κα παραλλήλοις ἐπιπέδοις τμαθῇ, αἱ αὐτῶν τομαὶ ὁμοῖαι ἐσσοῦνται· τὰ γὰρ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν καθέτων ποτὶ τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν τμαμάτων τοὺς αὐτοὺς λόγους ἑξοῦντι.

3 δὲ Heiberg : δὴ BDEGH ‖ 5 ἀγμενᾶν Heiberg : ἀγμένας DEGH ‖ 16 τᾶς G : τᾶν DEH ‖ 17 ἐλάσσονά B : ἐλάσσων DEGH ‖ τῶν alt. G : τᾶν DEH ‖ 18 περιεχομένων B : περιεχόμενα DE GH ‖ 25 τὰ alt. B : τᾶν DEGH.

15.

Parmi les droites menées, de n'importe quel point de la surface d'un paraboloïde de révolution, parallèlement à l'axe, celles qui sont menées du côté de la convexité du paraboloïde tomberont en dehors de cette figure, et celles qui sont menées du côté opposé tomberont à l'intérieur.

Car si on fait passer un plan par l'axe et par le point, à partir duquel on mène la parallèle à l'axe, la section sera une parabole[1] dont l'axe est l'axe du paraboloïde ; or si des droites sont menées de tout point d'une parabole parallèlement à l'axe, celles qui sont menées du côté de sa convexité tombent à l'extérieur, et celles qui sont menées du côté opposé tombent à l'intérieur[2] ; le théorème proposé est donc évident.

Parmi les droites menées de tout point de la surface d'un hyperboloïde de révolution parallèlement à une droite menée dans l'hyperboloïde par le sommet du cône asymptotique de l'hyperboloïde, celles qui sont menées du côté de sa convexité tomberont en dehors de l'hyperboloïde, et celles qui sont menées du côté opposé tomberont à l'intérieur.

Car si on fait passer un plan par la droite menée dans l'hyperboloïde par le sommet du cône asymptotique de l'hyperboloïde et par le point à partir duquel est menée la droite qui pénètre dans l'hyperboloïde, la section sera une hyperbole dont l'axe est la droite menée du sommet du cône dans l'hyperboloïde[3] ; or parmi les droites menées de tout point d'une hyperbole parallèlement à une droite menée de cette manière, celles qui sont menées du côté de sa convexité tombent à

1. Cf. prop. 11, 1re partie.
2. Cf. Apollonius, *Con.* I, 26.
3. Cf. prop. 11, 2e partie.

ιε΄.

Ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ κωνοειδεῖ ἀπὸ παντὸς ὁτουοῦν σαμείου τῶν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κωνοειδέος τᾶν ἀγομενᾶν εὐθειᾶν παρὰ τὸν ἄξονα αἱ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἀγόμεναι, ἐφ' ἅ ἐντι τὰ κυρτὰ αὐτοῦ, ἐκτὸς πεσοῦνται τοῦ κωνοειδέος, αἱ δὲ ἐπὶ θάτερα ἐντός.

Ἀχθέντος γὰρ ἐπιπέδου διά τε τοῦ ἄξονος καὶ τοῦ σαμείου, ἀφ' οὗ ἁ παράλληλος ἄγεται τῷ ἄξονι, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ὀρθογωνίου κώνου τομά, διάμετρος δὲ αὐτᾶς ὁ ἄξων τοῦ κωνοειδέος · ἐν δὲ τᾷ τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾷ ἀπὸ παντὸς σαμείου τοῦ ἐπὶ τᾶς τομᾶς ἀγομενᾶν παρὰ τὰν διάμετρον εὐθειᾶν αἱ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἀγόμεναι, ἐφ' ἅ ἐντι τὰ κυρτὰ αὐτᾶς, ἐκτὸς πίπτοντι, αἱ δὲ ἐπὶ θάτερα ἐντός · δῆλον οὖν τὸ προτεθέν.

Ἐν τῷ ἀμβλυγωνίῳ κωνοειδεῖ ἀπὸ παντὸς σαμείου τῶν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ αὐτοῦ τᾶν ἀγομενᾶν εὐθειᾶν παρά τινα γραμμάν, ἅ ἐστιν ἐν τῷ κωνοειδεῖ ἀγομένα διὰ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδές, αἱ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἀγόμεναι, ἐφ' ἅ ἐντι τὰ κυρτὰ αὐτοῦ, ἐκτὸς πεσοῦνται τοῦ κωνοειδέος, αἱ δὲ ἐπὶ θάτερα ἐντός.

Ἀχθέντος γὰρ ἐπιπέδου διά τε τᾶς εὐθείας τᾶς ἐν τῷ κωνοειδεῖ ἀγομένας διὰ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδὲς καὶ διὰ τοῦ σαμείου, ἀφ' οὗ ἄγεται ἁ ἐς αὐτό, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ἀμβλυγωνίου κώνου τομά, διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ ἀπὸ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου ἐν τῷ κωνοειδεῖ ἀγομένα · ἐν δὲ τᾷ τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομᾷ ἀπὸ παντὸς σαμείου τοῦ ἐπὶ τᾶς τομᾶς τᾶν ἀγομενᾶν εὐθειᾶν παρὰ τὰν οὕτως ἀγμέναν γραμμὰν αἱ

8 ἁ alt. add. Heiberg ‖ 13 αὐτᾶς B : αὐτή DEGH ‖ 17 ἀγομένα Torellius : producta B ἀγομένας DEGH ‖ 18 τὸ GH : τῷ DE ‖ 24 ἐς αὐτό B : ἐς αὐτά DEGH παρ' αὐτάν Nizzius ‖ 27 τομᾷ B : τοῦ DEGH.

l'extérieur de l'hyperbole, et celles qui sont menées du côté opposé tombent à l'intérieur[1].

Si un plan est tangent à une parabole ou à une hyperbole de révolution sans couper la figure, il n'y sera tangent qu'en un point, et le plan mené par le point de contact et par l'axe sera perpendiculaire au plan tangent.

Que le plan soit en effet tangent, si possible, en plusieurs points. Prenons donc deux points en lesquels le plan tangent touche la figure conoïde ; si on mène de chacun de ces points des parallèles à l'axe, le plan passant par ces droites menées parallèlement à l'axe passera par l'axe ou sera parallèle à l'axe ; par conséquent son intersection avec le conoïde sera une section conique[2], et les points seront situés sur la conique, puisqu'ils sont à la fois dans la surface du conoïde et dans le plan. Le segment de droite compris entre les points sera donc à l'intérieur de la section conique[3], et par conséquent aussi à l'intérieur de la surface du conoïde. Mais ce segment de droite est aussi situé dans le plan tangent, puisque les points y sont situés ; il s'ensuit qu'une partie du plan tangent sera à l'intérieur du conoïde, ce qui est impossible du moment qu'on avait supposé que ce plan ne coupe pas le conoïde. Il y est donc tangent en un seul point.

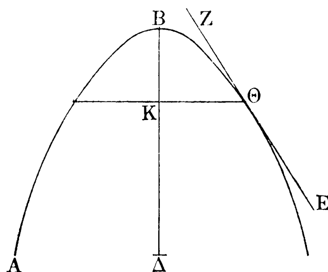


Fig. 82.

1. Cf. Apollonius, *Con.* I, 26.
2. Cf. prop. 11.
3. Cf. Apollonius, *Con.* I, 10.

μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἀγόμεναι, ἐφ' ἅ ἐστιν αὐτᾶς τὰ κυρτά, ἐκτὸς πίπτοντι, αἱ δὲ ἐπὶ θάτερα ἐντός.

Εἴ κα τῶν κωνοειδέων σχημάτων ἐπίπεδον ἐφάπτηται μὴ τέμνον τὸ κωνοειδές, καθ' ἓν μόνον ἅψεται σαμεῖον, καὶ τὸ διὰ τᾶς ἁφᾶς καὶ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον ἀχθὲν ὀρθὸν ἐσσεῖται ποτὶ τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον.

Ἐφαπτέσθω γάρ, εἰ δυνατόν, κατὰ πλείονα σαμεῖα. Λαφθέντων δὴ δύο σαμείων, καθ' ἃ ἅπτεται τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον τοῦ κωνοειδέος, καὶ ἀφ' ἑκατέρου παρὰ τὸν ἄξονα εὐθειᾶν ἀχθεισᾶν ἀπὸ τᾶν ἀχθεισᾶν παρὰ τὸν ἄξονα ἐπίπεδον ἐκβληθὲν ἤτοι διὰ τοῦ ἄξονος ἢ παρὰ τὸν ἄξονα ἐσσεῖται ἀγμένον· ὥστε τὰν τομὰν ποιήσει κώνου τομάν, καὶ τὰ σημεῖα ἐσσοῦνται ἐν τᾷ τοῦ κώνου τομᾷ, ἐπεὶ ἔν τε τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐντὶ καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ. Ἁ οὖν μεταξὺ τῶν σαμείων εὐθεῖα ἐντὸς ἐσσεῖται τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς· ὥστε καὶ τᾶς τοῦ κωνοειδέος ἐπιφανείας ἐντὸς ἐσσεῖται. Ἔστιν δὲ ἁ εὐθεῖα αὔτα ἐν τῷ ἐπιψαύοντι ἐπιπέδῳ, διότι καὶ τὰ σαμεῖα· τοῦ ἄρα ἐπιψαύοντος ἐπιπέδου ἐσσεῖταί τι ἐντὸς τοῦ κωνοειδέος· ὅπερ ἀδύνατον· ὑπέκειτο γὰρ μὴ τέμνειν. Καθ' ἓν ἄρα μόνον ἅψεται σαμεῖον.

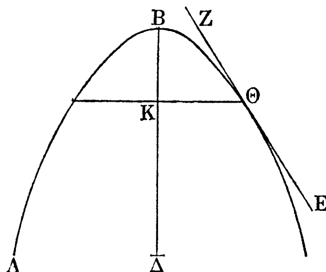


Fig. 82.

3 ἐφάπτηται Torellius : ἐφάπτεται DEGH ‖ 8 δὴ Heiberg : δὲ BDEGH.

Mais il est aussi évident que le plan mené par le point de contact et par l'axe sera perpendiculaire au plan tangent, dans le cas où il est tangent au sommet du conoïde. Car si on fait passer deux plans par l'axe, les sections du conoïde seront des sections coniques ayant pour axe l'axe du conoïde[1], et les sections du plan tangent seront des droites tangentes aux sections coniques à l'extrémité de l'axe. Or les droites tangentes aux sections coniques à l'extrémité de l'axe font des angles droits avec l'axe ; il y aura donc dans le plan tangent deux droites perpendiculaires à l'axe. Ce plan sera donc perpendiculaire à l'axe[2] et, par conséquent, aussi au plan passant par l'axe[3]. Mais que le plan soit tangent au conoïde en un point autre que le sommet. Menons, dès lors, un plan par le point de contact et par l'axe, et soit ΑΒΓ la conique qui est l'intersection de ce plan avec le conoïde[4] ; soit ΒΔ l'axe du conoïde et l'axe de la section conique, la droite ΕΘΖ son intersection avec le plan tangent, cette droite étant tangente à la section conique en Θ ; du point Θ abaissons la perpendiculaire ΘΚ à ΒΔ et faisons passer par ΘΚ un plan perpendiculaire à l'axe ; l'intersection de ce plan (sc. avec le conoïde) sera un cercle de centre Κ[4]. Mais l'intersection de ce plan avec le plan tangent sera tangente au cercle ; elle fera donc des angles droits avec ΘΚ[5] ; par conséquent, elle sera perpendiculaire au plan où sont situés ΚΘ et ΒΔ[6]. Il est donc évident que le plan tangent est perpendiculaire à ce même plan, puisque les droites qui y sont situées sont perpendiculaires à ce plan[7].

1. Cf. prop. 11.
2. Cf. Eucl. XI, 4.
3. Cf. Eucl. XI, 18.
4. Cf. prop. 11, 1re et 2e partie.
5. Cf. Eucl. III, 18.
6. Cf. Eucl. XI, def. 4.
7. Cf. Eucl. XI, 18.

Ὅτι δὲ καὶ τὸ διὰ τᾶς ἁφᾶς καὶ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον ἀχθὲν ὀρθὸν ἐσσεῖται ποτὶ τὸ ἐπιψαῦον, εἰ μὲν κατὰ τὰν κορυφὰν τοῦ κωνοειδέος ἐφάπτεται, δῆλον. Ἀχθέντων γὰρ διὰ τοῦ ἄξονος δύο ἐπιπέδων τοῦ κωνοειδέος αἱ τομαὶ ἐσσοῦνται κώνων τομαὶ διάμετρον ἔχουσαι τὸν ἄξονα, τοῦ δὲ ἐπιψαύοντος ἐπιπέδου εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι τᾶν τῶν κώνων τομᾶν κατὰ τὸ πέρας τᾶς διαμέτρου. Αἱ δὲ εὐθεῖαι αἱ ἐπιψαύουσαι τᾶν τῶν κώνων τομᾶν κατὰ τὸ πέρας τᾶς διαμέτρου ὀρθὰς ποιοῦντι γωνίας ποτὶ τὰν διάμετρον · ἐσσοῦνται οὖν ἐν τῷ ἐπιψαύοντι ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι ποτ᾽ ὀρθὰς τῷ ἄξονι. Ὀρθὸν οὖν ἐσσεῖται ποτὶ τὸν ἄξονα τὸ ἐπίπεδον · ὥστε καὶ ποτὶ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος. Ἀλλὰ ἔστω μὴ κατὰ τὰν κορυφὰν τοῦ κωνοειδέος ἐπιψαῦον τὸ ἐπίπεδον. Ἄχθω δὴ ἐπίπεδον διὰ τᾶς ἁφᾶς καὶ τοῦ ἄξονος, καὶ τοῦ μὲν κωνοειδέος τομὰ ἔστω ἁ ΑΒΓ κώνου τομά, ἄξων δὲ ἔστω καὶ διάμετρος τᾶς τομᾶς ἁ ΒΔ, τοῦ δὲ ἐπιψαύοντος ἐπιπέδου τομὰ ἔστω ἁ ΕΘΖ εὐθεῖα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς ἁπτομένα κατὰ τὸ Θ, ἀπὸ δὲ τοῦ Θ κάθετος ἄχθω ἐπὶ τὰν ΒΔ ἁ ΘΚ, καὶ ἐπίπεδον ἀνεστακέτω ὀρθὸν ποτὶ τὸν ἄξονα · ποιήσει δὴ τοῦτο τὰν τομὰν κύκλον, οὗ κέντρον τὸ Κ. Ἁ δὲ τομὰ τούτου τοῦ ἐπιπέδου καὶ τοῦ ἐπιψαύοντος ἐσσεῖται ἐπιψαύουσα τοῦ κύκλου · ὀρθὰς ἄρα ποιήσει γωνίας ποτὶ τὰν ΘΚ · ὥστ᾽ ὀρθὰ ἐσσεῖται ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἐν ᾧ ἐντι αἱ ΚΘ, ΒΔ. Δῆλον οὖν ὅτι τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστι ποτὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, ἐπεὶ καὶ αἱ ἐν αὐτῷ εὐθεῖαι.

2 εἰ add. Torellius || μὲν add. Heiberg || 7-9 αἱ δὲ εὐθεῖαι — τᾶς διαμέτρου add. Heiberg || 20 ποτὶ Heiberg : ἐπὶ BDEGH || δὴ Heiberg : δὲ BDEGH || 24 τὸ pr. GH : τῷ DE.

16.

Si un plan est tangent à un ellipsoïde de l'un ou de l'autre genre sans couper la figure, il y est tangent en un seul point, et le plan passant par le point de contact et par l'axe sera perpendiculaire au plan tangent.

Que le plan soit en effet tangent en plusieurs points. Prenons donc les points de contact entre le plan et l'ellipsoïde ; menons de chacun d'eux des parallèles à l'axe et faisons passer par ces parallèles un plan ; l'intersection sera une ellipse[1], et les points seront situés sur cette conique. Le segment de droite compris entre les points sera donc situé à l'intérieur de la section conique[2] et par conséquent aussi à l'intérieur de la surface de l'ellipsoïde. Mais la droite est située dans le plan tangent, parce que les points y sont situés ; il y aura donc une partie du plan tangent située à l'intérieur de l'ellipsoïde, ce qui est impossible, puisqu'on avait supposé que ce plan ne coupe pas la figure. Il est donc évident qu'il sera tangent en un seul point. Quant à la proposition que le plan passant par le point de contact et par l'axe sera perpendiculaire au plan tangent, elle se démontre comme pour les figures conoïdes.

Si une figure soit conoïde soit sphéroïde est coupée par un plan passant par l'axe, qu'on mène une tangente à la section produite ainsi et qu'on fait passer par la tangente un plan perpendiculaire au plan sécant, ce plan (sc. perpendiculaire) est tangent à la figure au même point où la droite est tangente à la section conique.

Il ne sera en effet tangent en aucun autre point de la surface de la figure. Sinon, la perpendiculaire abaissée de cet (sc. autre) point sur le plan sécant tombera en dehors de la section conique, puisqu'elle

1. Cf. prop. 11, 3e partie.
2. Cf. Apollonius, *Con.* I, 10.

ις'.

Εἴ κα τῶν σφαιροειδέων σχημάτων ὁποτερουοῦν ἐπίπεδον ἅπτηται μὴ τέμνον τὸ σχῆμα, καθ' ἓν μόνον ἅψεται σαμεῖον, καὶ τὸ διὰ τᾶς ἁφᾶς καὶ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον ἀχθὲν ὀρθὸν ἐσσεῖται ποτὶ τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον.

Ἁπτέσθω γὰρ κατὰ πλείονα σαμεῖα. Λαφθέντων δὴ τῶν σαμείων, καθ' ἃ ἅπτεται τὸ ἐπίπεδον τοῦ σφαιροειδέος, καὶ ἀφ' ἑκατέρου αὐτῶν παρὰ τὸν ἄξονα εὐθειᾶν ἀχθεισᾶν καὶ διὰ τᾶν ἀχθεισᾶν ἐπιπέδου ἐκβληθέντος ἁ τομὰ ἐσσεῖται ὀξυγωνίου κώνου τομά, καὶ τὰ σαμεῖα ἐσσοῦνται ἐν τᾷ τοῦ κώνου τομᾷ. Ἁ οὖν μεταξὺ τῶν σαμείων εὐθεῖα ἐντὸς ἐσσεῖται τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς· ὥστε καὶ τᾶς τοῦ σφαιροειδέος ἐπιφανείας ἐντὸς ἐσσεῖται. Ἔστιν δὲ ἁ εὐθεῖα ἐν τῷ ἐπιψαύοντι ἐπιπέδῳ, διότι καὶ τὰ σαμεῖα· τοῦ οὖν ἐπιψαύοντος ἐπιπέδου ἐσσεῖταί τι ἐντὸς τοῦ σφαιροειδέος. Οὐκ ἔστιν δέ· ὑπέκειτο γὰρ μὴ τέμνειν. Δῆλον οὖν, ὅτι καθ' ἓν σαμεῖον μόνον ἅψεται. Ὅτι δὲ τὸ διὰ τᾶς ἁφᾶς καὶ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον ἀχθὲν ὀρθὸν ἐσσεῖται ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἐπιψαῦον, ὁμοίως τοῖς περὶ τῶν κωνοειδέων σχημάτων.

Εἴ κα τῶν κωνοειδέων ἢ τῶν σφαιροειδέων σχημάτων ὁποιονοῦν ἐπιπέδῳ τμαθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ τᾶς γενομένας τομᾶς ἐπιψαύουσά τις ἀχθῇ εὐθεῖα, καὶ διὰ τᾶς ἐπιψαυούσας ἐπίπεδον ἀνασταθῇ ὀρθὸν ποτὶ τὸ τέμνον, ἐπιψαύει τοῦ σχήματος κατὰ τὸ αὐτὸ σαμεῖον, καθ' ὃ καὶ ἁ εὐθεῖα ἐπιψαύει τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς.

Οὐ γὰρ ἅψεται κατ' ἄλλο σαμεῖον τᾶς ἐπιφανείας αὐτοῦ. Εἰ δὲ μή, ἁ ἀπὸ τοῦ σαμείου κάθετος ἀγομένα ἐπὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον πεσεῖται ἐκτὸς τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς·

6 δὴ Heiberg : δὲ BDEGH ‖ 8 εὐθειᾶν ἀχθεισᾶν Torellius : εὐθεῖαι ἀχθῶσιν BDEGH ‖ 21 κωνοειδέων ἢ τῶν add. Barrowius ‖ 29 ἐκτὸς Commandinus : ἐντὸς BDEGH.

tombera sur la droite tangente du moment que les plans sont perpendiculaires l'un à l'autre[1] ; or ceci est impossible ; car on a démontré qu'elle tombera à l'intérieur[2] (sc. de la section conique).

Si deux plans parallèles sont tangents à un ellipsoïde de révolution, la droite qui joint les points de contact passera par le centre de l'ellipsoïde.

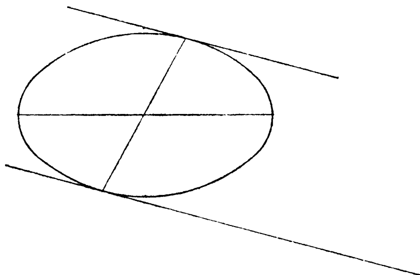


Fig. 83.

La proposition est évidente dans le cas où les plans tangents sont perpendiculaires à l'axe ; mais qu'ils ne soient pas perpendiculaires ; le plan passant par l'axe et par l'un des points de contact sera ainsi perpendiculaire au plan tangent[3] et, par conséquent, aussi à un plan qui lui est parallèle. Nécessairement, donc, c'est le même plan qui passe par l'axe et par chacun des points de contact. Sinon, il y aura deux plans perpendiculaires au même plan et passant par une même droite non perpendiculaire à ce dernier plan ; nous avions en effet supposé que l'axe n'est pas perpendiculaire aux plans parallèles ; il s'ensuit que l'axe et les points de contact seront situés dans le même plan, et que ce plan coupera l'ellipsoïde en passant par l'axe. Son intersection (sc. avec l'ellipsoïde) sera donc une ellipse[4], ses intersections avec les plans

1. Cf. Eucl. XI, def. 4.
2. Cf. prop. 11, 4e partie.
3. Cf. prop. 16, 1re partie.
4. Cf. prop. 11, 3e partie.

ἐπὶ γὰρ τὰν ἐπιψαύουσαν πεσεῖται, ἐπεὶ ὀρθὰ ποτ' ἄλλαλά ἐντι τὰ ἐπίπεδα· ὅπερ ἀδύνατον· ἐδείχθη γάρ, ὅτι ἐντὸς πεσεῖται.

Εἴ κα τῶν σφαιροειδέων τινὸς σχημάτων δύο ἐπίπεδα παράλληλα ἐπιψαύωντι, ἁ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα διὰ τοῦ κέντρου τοῦ σφαιροειδέος πορεύσεται.

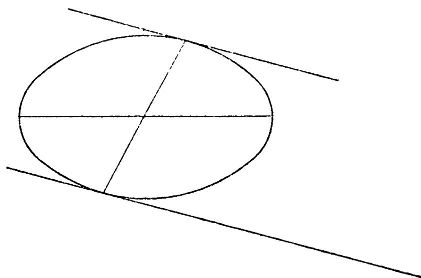


Fig. 83.

Εἰ μὲν οὖν κα ποτ' ὀρθὰς τῷ ἄξονι τὰ ἐπίπεδα ἔωντι, δῆλον· ἄλλ' ἔστω μὴ ποτ' ὀρθάς. Τὸ δὴ ἐπίπεδον τὸ ἀχθὲν διὰ τοῦ ἄξονος καὶ τᾶς ἁφᾶς τᾶς ἑτέρας ὀρθὸν ἐσσεῖται ποτὶ τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον· ὥστε καὶ ποτὶ τὸ παράλληλον αὐτῷ. Ἀναγκαῖον ἄρα τὸ αὐτὸ εἶμεν ἐπίπεδον τὸ διὰ τοῦ ἄξονος καὶ ἑκατερᾶν τᾶν ἁφᾶν ἀγμένον. Εἰ δὲ μή, ἐσσοῦνται δύο ἐπίπεδα ποτὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ὀρθὰ διὰ τᾶς αὐτᾶς γραμμᾶς ἀγμένα οὐκ ἐούσας ὀρθᾶς ποτὶ τὸ ἐπίπεδον· ὑπέκειτο γὰρ ὁ ἄξων μὴ εἶμεν ὀρθὸς ποτὶ τὰ παραλληλα ἐπίπεδα· ἐν τῷ αὐτῷ ἄρα ἐσσοῦνται ἐπιπέδῳ ὅ τε ἄξων καὶ αἱ ἁφαί, καὶ τετμακὸς ἐσσεῖται τὸ σφαιροειδὲς διὰ τοῦ ἄξονος. Ἁ οὖν τομὰ ἐσσεῖται ὀξυγωνίου κώνου τομά, αἱ δὲ τῶν ἐπιψαυόντων ἐπιπέδων τομαὶ

2 ἐντι τὰ Heiberg : ἔωντι DEGH ‖ 5 ἐπιψαύωντι G : ἐπιψαύοντι DEH ‖ 7 κα ποτ' Heiberg : κατ' BDEGH ‖ 13 ὀρθὰ BG : ὀρθὰν DEH ‖ 19 ἐπιψαυόντων Heiberg : ἐπιψαυουσῶν DEGH.

tangents seront des droites parallèles[1] tangentes à l'ellipse aux points de contact des plans ; or si deux droites parallèles sont tangentes à une ellipse, le centre de l'ellipse et les points de contact seront alignés.

17.

Si on mène deux plans parallèles tangents à un ellipsoïde de révolution et qu'on fait passer par le centre de l'ellipsoïde un plan parallèle aux plans tangents, les droites menées, par la section produite, parallèlement à la droite joignant les points de contact tomberont en dehors de l'ellipsoïde.

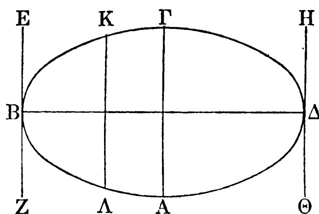


Fig. 84.

Supposons remplies les conditions indiquées et prenons un point sur la section produite ; faisons passer un plan par le point ainsi pris et par la droite joignant les points de contact ; ce plan coupera donc l'ellipsoïde et les plans parallèles. Que l'ellipse[2] ΑΒΓΔ soit son intersection avec l'ellipsoïde, que les droites EZ et HΘ soient ses intersections avec les plans tangents ;

1. Cf. Eucl. XI, 16.
2. Cette précision sur la nature de la section ΑΒΓΔ, en contradiction avec la ligne 6 de la p. 195, est probablement l'addition d'un copiste ; cf. Heiberg I, p. 331.

παράλληλοι ἐσσοῦνται καὶ ἐπιψαύουσαι τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς κατὰ τὰς ἁφὰς τῶν ἐπιπέδων · εἰ δέ κα δύο εὐθεῖαι ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἐπιψαύωντι παράλληλοι ἐοῦσαι, τό τε κέντρον τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς καὶ αἱ ἁφαὶ ἐπ' εὐθείας ἐσσοῦνται.

ιζ'.

Εἴ κα τῶν σφαιροειδέων σχημάτων ὁποτερουοῦν δύο παράλληλα ἐπίπεδα ἀχθῇ ἐπιψαύοντα, ἀχθῇ δέ τι ἐπίπεδον διὰ τοῦ κέντρου τοῦ σφαιροειδέος παρὰ τὰ ἐπιψαύοντα, αἱ διὰ τᾶς γενομένας τομᾶς ἀγόμεναι εὐθεῖαι παρὰ τὰν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν ἐκτὸς πεσοῦνται τοῦ σφαιροειδέος.

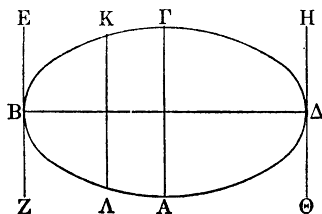


Fig. 84.

Ὑποκείσθω τὰ εἰρημένα, καὶ λελάφθω τι σαμεῖον ἐπὶ τᾶς γενομένας τομᾶς, διὰ δὲ τοῦ γενομένου σαμείου καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσας ἐπίπεδον ἄχθω · τεμεῖ δὴ τοῦτο τό τε σφαιροειδὲς καὶ τὰ παράλλαλα ἐπίπεδα. Ἔστω οὖν ἁ μὲν τοῦ σφαιροειδέος τομὰ ἁ ΑΒΓΔ [ὀξυγωνίου κώνου τομά], αἱ δὲ τῶν ἐπιπέδων τῶν ψαυόντων τομαὶ αἱ ΕΖ, ΗΘ εὐθεῖαι, τὸ δὲ λαφθὲν σαμεῖον τὸ Α, ἁ δὲ

1 καὶ Heiberg : αἱ BDEGH || 5 ἐσσοῦνται B : ἔωντι DEGH || 16 δὴ Nizzius : δὲ BDEGH || 19 δὲ alt. Nizzius : δὴ DEGH etiam B.

soit A le point pris, ΒΔ la droite joignant les points d'intersection ; cette droite passera par le centre[1] ; soit ΓΑ la trace du plan parallèle aux plans tangents (sc. dans le plan passant par A et ΒΔ) ; ΓΑ passera par le centre du moment que le plan lui-même y passe. Puisque donc ΑΒΓΔ est ou bien un cercle ou bien une ellipse[2], que les deux droites EZ et HΘ y sont tangentes et que la droite ΑΓ, qui leur est parallèle, passe par le centre, il est évident que les droites menées de A et Γ parallèlement à ΒΔ sont tangentes à la section[3] et tomberont en dehors de l'ellipsoïde.

Mais si le plan parallèle aux plans tangents ne passe pas par le centre, comme le plan de trace ΚΛ, il est évident que parmi les droites menées à partir de la section (sc. parallèlement à ΒΔ) celles qui sont menées du côté du petit segment tomberont en dehors de l'ellipsoïde et que celles qui sont menées du côté opposé tomberont à l'intérieur.

18.

De tout ellipsoïde coupé par un plan passant par le centre le volume et la surface sont divisés en deux parties égales par le plan.

Coupons en effet l'ellipsoïde par un plan passant par le centre ; il sera ainsi coupé par un plan qui ou bien passe par l'axe, ou bien est perpendiculaire à l'axe ou n'est pas perpendiculaire à l'axe. Si le plan sécant passe par l'axe ou est perpendiculaire à l'axe, il est évident que le volume et la surface sont divisés en deux parties égales ; car il est manifeste que l'une des parties de la figure, et la surface de l'une des parties, sont superposables à l'autre partie et à la surface de l'autre partie.

1. Cf. prop. 16, 3e partie.
2. Cf. prop. 14.
3. Cf. Apollonius, *Con.* I, 17.

τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσα ἔστω ἁ ΒΔ· πεσεῖται δὲ αὕτα διὰ τοῦ κέντρου· ἁ δὲ τοῦ παραλλήλου ἐπιπέδου τοῖς ἐπιψαυόντεσσιν ἐπιπέδοις τομὰ ἁ ΓΑ· ἐσσεῖται δὲ αὕτα διὰ τοῦ κέντρου ἀγμένα, ἐπεὶ καὶ τὸ ἐπίπεδον. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ἁ ΑΒΓΔ ἤτοι κύκλος ἢ ὀξυγωνίου κώνου τομά, καὶ ἐπιψαύοντι αὐτᾶς δύο εὐθεῖαι αἱ ΕΖ, ΗΘ, διὰ δὲ τοῦ κέντρου ἆκται παράλληλος αὐταῖς ἁ ΑΓ, δῆλον ὡς αἱ ἀπὸ τῶν Α, Γ ἀγόμεναι σαμείων παρὰ τὰν ΒΔ ἐπιψαύοντι τᾶς τομᾶς καὶ ἐκτὸς πεσοῦνται τοῦ σφαιροειδέος.

Εἰ δέ κα τὸ παράλληλον ἐπίπεδον τοῖς ἐπιψαυόντεσσι μὴ διὰ τοῦ κέντρου ἀγμένον ᾖ, ὡς τὸ ΚΛ, δῆλον ὡς τᾶν ἀπὸ τᾶς τομᾶς ἀγομενᾶν εὐθειᾶν αἱ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ γενόμενα τῷ ἐλάσσονι τμάματι ἐκτὸς πεσοῦνται τοῦ σφαιροειδέος, αἱ δὲ ἐπὶ θάτερα ἐντός.

ιη΄.

Πᾶν σχῆμα σφαιροειδὲς ἐπιπέδῳ τμαθὲν διὰ τοῦ κέντρου δίχα τέμνεται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου καὶ αὐτὸ καὶ ἁ ἐπιφάνεια αὐτοῦ.

Τετμάσθω γὰρ τὸ σφαιροειδὲς ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ κέντρου· ἤτοι δὴ καὶ διὰ τοῦ ἄξονος ἐσσεῖται τετμαμένον ἢ ποτ' ὀρθὰς ἢ μὴ ποτ' ὀρθὰς τῷ ἄξονι. Εἰ μὲν οὖν διὰ τοῦ ἄξονος τέμνεται ἢ ποτ' ὀρθᾶς τῷ ἄξονι, δῆλον ὡς δίχα τέμνεταί τε αὐτὸ καὶ ἁ ἐπιφάνεια αὐτοῦ· φανερὸν γὰρ ὅτι ἐφαρμόζει τὸ ἕτερον μέρος αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἕτερον καὶ ἁ ἐπιφάνεια τοῦ ἑτέρου μέρους ἐπὶ τὰν τοῦ ἑτέρου.

1 δὲ Heiberg : δὴ BDEGH ‖ 6 ἐπιψαύοντι EH : ἐπιψαύωντι DG ‖ αὐτᾶς B : αὐταὶ DEGH ‖ 8 ἐπιψαύοντι E : ἐπιψαύωντι DGH ‖ 9 καὶ add. Torellius ‖ 10 κα Heiberg : καὶ BDEGH ‖ 11 μὴ Heiberg : σαμείοις μὴ BDEGH ἐπιπέδοις μὴ Torellius ‖ 12 ἀγομενᾶν Heiberg : τᾶν γενομενᾶν BDEGH τᾶς γενομένας Nizzius ‖ 13 τῷ Heiberg : τῷ τε DEGH ‖ 17 ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου DEGH : om. B ‖ 21 ἢ μὴ ποτ' ὀρθὰς add. Torellius ‖ 23 τε Heiberg : τὸ DEGH et ipsum B ‖ 25 τοῦ alt. add. Heiberg.

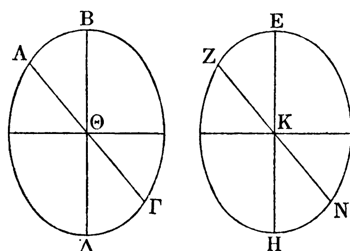


Fig. 85.

Mais que l'ellipsoïde soit coupé par un plan ne passant pas par l'axe ni perpendiculaire à l'axe. Coupons alors l'ellipsoïde par un plan perpendiculaire au plan sécant et passant par l'axe ; que l'ellipse ΑΒΓΔ soit son intersection avec la figure même ; soit ΒΔ l'axe de l'ellipse et l'axe de l'ellipsoïde, Θ le centre de l'ellipse ; que la droite ΑΓ soit la trace de ce plan dans le plan coupant l'ellipsoïde en passant par son centre. Prenons dès lors un autre ellipsoïde égal et semblable à l'ellipsoïde donné et coupons-le par un plan passant par le centre ; que sa section soit l'ellipse ΕΖΗΝ ; soit ΕΗ l'axe de cette ellipse et l'axe de l'ellipsoïde[1], Κ le centre de l'ellipse ; menons par Κ la corde ΖΝ de manière que l'angle qu'elle fait en Κ soit égal à l'angle en Θ ; faisons passer par ΖΝ un plan perpendiculaire au plan de la section ΕΖΗΝ ; il y a ainsi deux ellipses ΑΒΓΔ et ΕΖΗΝ égales et semblables entre elles ; elles sont donc superposables l'une à l'autre, le segment de droite ΕΗ se plaçant sur ΒΔ et ΖΝ sur ΑΓ. Mais aussi le plan de trace ΝΖ coïncide avec le plan de trace ΑΓ, parce que les deux plans passent par la même droite et sont perpendiculaires

1. Cf. prop. 11, 3e partie.

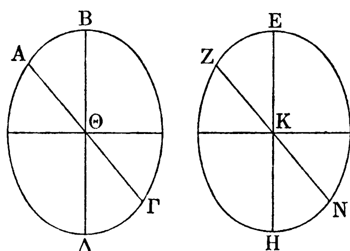


Fig. 85.

Ἀλλ' ἔστω μὴ διὰ τοῦ ἄξονος τετμαμένον μήτε ποτ' ὀρθὰς τῷ ἄξονι. Τμαθέντος δὴ τοῦ σφαιροειδέος ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον διὰ τοῦ ἄξονος αὐτοῦ μὲν τοῦ σχήματος τομὰ ἔστω ἁ ΑΒΓΔ ὀξυγωνίου κώνου τομά, διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἔστω καὶ ἄξων τοῦ σφαιροειδέος ἁ ΒΔ καὶ κέντρον τὸ Θ, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ τετμακότος διὰ τοῦ κέντρου τὸ σφαιροειδὲς ἔστω τομὰ ἁ ΑΓ εὐθεῖα. Λελάφθω δή τι καὶ ἄλλο σφαιροειδὲς ἴσον καὶ ὁμοῖον τούτῳ, καὶ τμαθέντος αὐτοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ἐπιπέδῳ τομὰ ἔστω ἁ ΕΖΗΝ ὀξυγωνίου κώνου τομά, διάμετρος δὲ αὐτᾶς καὶ ἄξων τοῦ σφαιροειδέος ἁ ΕΗ καὶ κέντρον τὸ Κ, καὶ διὰ τοῦ Κ ἄχθω ἁ ΖΝ γωνίαν ποιοῦσα τὰν Κ ἴσαν τᾷ Θ, ἀπὸ δὲ τᾶς ΖΝ ἐπίπεδον ἔστω ἀνεστακὸς ὀρθὸν ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστιν ἁ ΕΖΗΝ τομά· ἐντὶ δὴ δύο ὀξυγωνίων κώνων τομαὶ αἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΝ ἴσαι καὶ ὁμοῖαι ἀλλάλαις· ἐφαρμόζοντι οὖν ἐπ' ἀλλάλας τεθείσας τᾶς ΕΗ ἐπὶ τὰν ΒΔ καὶ τᾶς ΖΝ ἐπὶ τὰν ΑΓ. Ἐφαρμόζει δὲ καὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ κατὰ τὰν ΝΖ τῷ ἐπιπέδῳ τῷ κατὰ τὰν ΑΓ, ἐπεὶ ἀπὸ τᾶς αὐτᾶς γραμμᾶς ποτὶ τὸ

7 τὸ σφαιροειδὲς BH : τοῦ σφαιροειδὲς D τοῦ σφαιροειδέος EG || 12 ZN ms. B : ZH mss. DEGH || 15 δὴ δύο Heiberg : διὰ τῶν DEGH δὴ τῶν Torellius || 16 ἀλλάλας Torellius : ἄλλας BDEGH || 17 τᾶς alt. Torellius : ἁ DEGH || 18 τὸ alt. G : τῷ DEGH.

au même plan ; il y aura donc aussi coïncidence entre le segment découpé de l'ellipsoïde par le plan de trace NZ du côté du point E et le segment découpé de l'autre ellipsoïde par le plan de trace AΓ du côté du point B, entre les segments qui restent et entre les surfaces des segments. Mais si on place aussi le segment de droite EH sur BΔ de manière que le point E coïncide avec Δ et H avec B et que le segment de droite compris entre les points N et Z coïncide avec le segment compris entre A et Γ, il est évident que les ellipses se superposeront l'une à l'autre et que le point Z tombera sur Γ, et le point N sur A. De la même manière aussi le plan de trace NZ coïncide avec le plan de trace AΓ, et des segments découpés par le plan de trace NZ celui qui est situé du côté du point H coïncide avec le segment découpé par le plan de trace AΓ du côté du point B, alors que le segment du côté de E coïncide avec le segment du côté de Δ. Mais du moment que le même segment coïncide avec chacun des segments (sc. de l'ellipsoïde donné), il est évident que les deux segments sont égaux ; pour les mêmes raisons les surfaces sont elles aussi égales.

19.

Un segment donné étant découpé d'un conoïde de l'une ou de l'autre espèce par un plan perpendiculaire à l'axe, ou une partie non supérieure à la moitié étant découpée de la même manière d'un ellipsoïde de révolution de l'une ou de l'autre espèce, il est possible d'inscrire (sc. dans le segment découpé) une figure solide et de (sc. lui) circonscrire une autre figure solide, dont chacune est composée de cylindres de même hauteur, de manière que l'excès de la figure circonscrite

αὐτὸ ἐπίπεδον ἀμφότερα ὀρθά ἐντι· ἐφαρμόζει οὖν καὶ τὸ τμᾶμα τὸ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ἀποτεμνόμενον τοῦ κατὰ τὰν ΝΖ ἀπὸ τοῦ σφαιροειδέος τὸ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ Ε τῷ ἑτέρῳ τμάματι τῷ ἀποτεμνομένῳ ἀπὸ τοῦ ἑτέρου σφαιροειδέος ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κατὰ τὰν ΑΓ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ Β καὶ τὸ λοιπὸν τμᾶμα ἐπὶ τὸ λοιπὸν καὶ αἱ ἐπιφάνειαι τῶν τμαμάτων ἐπὶ τὰς ἐπιφανείας. Πάλιν δὲ καὶ τεθείσας τᾶς ΕΗ ἐπὶ τὰν ΒΔ οὕτως, ὥστε τὸ μὲν Ε κατὰ τὸ Δ κεῖσθαι, τὸ δὲ Η κατὰ τὸ Β, τὰν δὲ μεταξὺ τῶν Ν, Ζ σαμείων γραμμὰν ἐπὶ τὰν μεταξὺ τῶν Α, Γ σαμείων, δῆλον ὡς αἵ τε τῶν ὀξυγωνίων κώνων τομαὶ ἐφαρμοξοῦντι ἐπ' ἀλλάλας, καὶ τὸ μὲν Ζ ἐπὶ τὸ Γ πεσεῖται, τὸ δὲ Ν ἐπὶ τὸ Α. Ὁμοίως καὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ κατὰ τὰν ΝΖ ἐφαρμόζει τῷ ἐπιπέδῳ τῷ κατὰ τὰν ΑΓ, καὶ τῶν τμαμάτων τῶν ἀποτεμνομένων ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κατὰ τὰν ΝΖ τὸ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ Η ἐφαρμόζει τῷ τμάματι τῷ ἀποτεμνομένῳ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κατὰ τὰν ΑΓ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ Β, τὸ δὲ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ Ε τῷ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ Δ. Ἐπεὶ δὲ τὸ αὐτὸ τμᾶμα ἐφ' ἑκάτερον τῶν τμαμάτων ἐφαρμόζει, δῆλον ὅτι ἴσα ἐντὶ τὰ τμάματα· διὰ ταὐτὰ δὲ καὶ αἱ ἐπιφάνειαι.

ιθ'.

Τμάματος δοθέντος ὁποτερουοῦν τῶν κωνοειδέων ἀποτετμαμένου ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα ἢ τῶν σφαιροειδέων ὁποτερουοῦν μὴ μείζονος ἡμίσους τοῦ σφαιροειδέος ὁμοίως ἀποτεμνομένου δυνατόν ἐστι σχῆμα στερεὸν ἐγγράψαι καὶ ἄλλο περιγράψαι ἐκ κυλίνδρων ἴσον ὕψος ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφόμενον σχῆμα τοῦ

1 ὀρθά add. Heiberg ‖ 3 τὰ αὐτὰ τῷ Ε Torellius : que ad partem e B τᾶς DEGH ‖ 11 ἐφαρμοξοῦντι Heiberg : ἐφαρμοζοῦντι DEH ἐφαρμόζοντι BG ‖ 19 ἐφ' ἑκάτερον Heiberg : ἑκάτερον DEGH ἑκατέρῳ Torellius ‖ 25 ἐστι Heiberg : ἔσται BDEGH ‖ σχῆμα Barrowius : τμᾶμα DEGH ‖ 27 συγκείμενον B : τῶν συγκειμένων DEGH.

sur la figure inscrite soit inférieur à toute grandeur solide proposée.

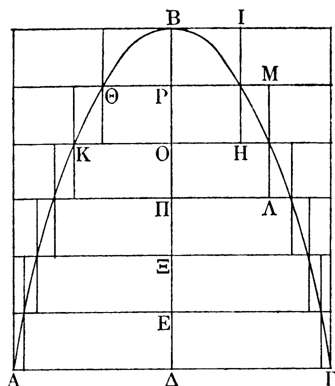


Fig. 86.

Soit donné un segment tel que ΑΒΓ ; coupons-le par un plan passant par l'axe ; que l'intersection de ce plan avec le segment soit la section conique ΑΒΓ[1], que son intersection avec le plan découpant le segment soit la droite ΑΓ ; soit ΒΔ l'axe du segment et l'axe de la section conique. Du moment donc qu'on a supposé que le plan découpant le segment est perpendiculaire à l'axe, son intersection avec l'ellipsoïde est un cercle dont le diamètre est ΑΓ[1]. Faisons passer par ce cercle un cylindre ayant pour axe ΒΔ ; mais la surface de ce cylindre tombera à l'extérieur du segment, puisqu'il est le segment d'un conoïde ou d'une partie de sphéroïde non supérieure à la moitié[2]. Ce cylindre étant divisé en deux parties égales par un plan perpendiculaire à l'axe, et cette opération étant répétée, la figure qui reste finira par être inférieure à la grandeur solide

1. Cf. prop. 11.
2. Cf. prop. 15, 1re et 2e partie, et prop. 17.

ἐγγραφέντος ἐλάσσονι ὑπερέχειν παντὸς τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος.

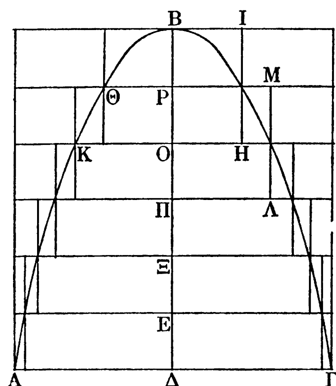


Fig. 86.

Δεδόσθω τμᾶμα, οἷόν τὸ ΑΒΓ, τμαθέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ μὲν τμάματος τομὰ ἔστω ἁ ΑΒΓ κώνου τομά, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτετμακότος τὸ τμᾶμα ἁ ΑΓ εὐθεῖα, ἄξων δὲ ἔστω τοῦ τμάματος καὶ διάμετρος τᾶς τομᾶς ἁ ΒΔ. Ἐπεὶ οὖν ὑπόκειται τὸ ἀποτέμνον ἐπίπεδον ὀρθὸν εἶμεν ποτὶ τὸν ἄξονα, ἁ τομὰ κύκλος ἐστί, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἁ ΓΑ. Ἀπὸ δὲ τοῦ κύκλου τούτου κύλινδρος ἔστω ἄξονα ἔχων τὰν ΒΔ· πεσεῖται δὲ ἁ ἐπιφάνεια αὐτοῦ ἐκτὸς τοῦ τμάματος, ἐπεί ἐστιν ἤτοι κωνοειδὲς ἢ σφαιροειδὲς μὴ μεῖζον τοῦ ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδέος. Τοῦ δὴ κυλίνδρου τούτου ἀεὶ δίχα τεμνομένου ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα ἐσσεῖταί ποτε τὸ καταλειπόμενον ἔλασσον τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος· ἔστω δὴ τὸ κατα-

4 τοῦ μὲν add. Heiberg || τομὰ B : τομᾶς DEGH || 8 ποτὶ Heiberg : ἐπὶ BDEGH || 10 τὰν scripsi ex 199, 2, 25 ; 201, 17, 24, 28 ; 202, 18 ; 204, 10, 13 ; 205, 4, 8 : τὸν codd. || 15 δὴ Heiberg : δὲ BDEGH.

proposée[1] ; que ce reste soit donc le cylindre ayant pour base le cercle de diamètre ΑΓ et pour axe ΕΔ, et qu'il soit inférieur à la grandeur solide proposée. Divisons donc ΒΔ en segments égaux à ΕΔ par les points Ρ, Ο, Π, Ξ, menons des points de division des parallèles à ΑΓ jusqu'à la section conique et faisons passer par ces parallèles des plans perpendiculaires à ΒΔ ; leurs sections seront donc des cercles ayant leurs centres sur ΒΔ[2]. Par chacun de ces cercles faisons passer deux cylindres dont chacun a un axe égal à ΕΔ, l'un du côté du cercle où est situé le point Δ, l'autre du côté de Β ; dans le segment se trouvera donc inscrit une figure solide composée des cylindres construits du côté de Δ, et autour du segment sera circonstruite une autre figure, composée des cylindres construits du côté de Β. Il nous reste à montrer que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite est inférieur à la grandeur solide proposée. Chacun donc des cylindres de la figure inscrite est égal au cylindre construit sur le même cercle du côté de Β ; le cylindre ΘΗ est ainsi égal au cylindre ΘΙ, ΚΛ est égal à ΚΜ, et de même pour les autres cylindres ; tous les cylindres sont donc égaux un à un. Il est donc évident que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite est le cylindre ayant pour base le cercle de diamètre ΑΓ et pour axe ΕΔ ; or ce cylindre est inférieur à la grandeur solide donnée.

1. Cf. Eucl. X, 1.
2. Cf. prop. 11.

λελειμμένον ἀπ' αὐτοῦ κύλινδρος ὁ ἔχων βάσιν τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, ἄξονα δὲ τὰν ΕΔ, ἐλάσσων τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος. Διαιρήσθω δὴ ἁ ΒΔ ἐς τὰς ἴσας τᾷ ΕΔ κατὰ τὰ Ρ, Ο, Π, Ξ, καὶ ἀπὸ τᾶν διαιρέσιων ἄχθων εὐθεῖαι παρὰ τὰν ΑΓ ἔστε ποτὶ τὰν τοῦ κώνου τομάν, ἀπὸ δὲ τᾶν ἀχθεισᾶν ἐπίπεδα ἀνεστακέτω ὀρθὰ ποτὶ τὰν ΒΔ· ἐσσοῦνται δὴ αἱ τομαὶ κύκλοι τὰ κέντρα ἔχοντες ἐπὶ τᾶς ΒΔ. Ἀφ' ἑκάστου δὴ τῶν κύκλων δύο κύλινδροι ἀναγεγράφθων ἑκάτερος ἔχων ἄξονα ἴσον τῷ ΕΔ, ὁ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τοῦ κύκλου, ἐφ' ἅ ἐστι τὸ Δ, ὁ δὲ ἐπὶ τὰ αὐτά, ἐφ' ἅ ἐστι τὸ Β· ἐσσεῖται δή τι ἐν τῷ τμάματι σχῆμα στερεὸν ἐγγεγραμμένον ἐκ τῶν κυλίνδρων συγκείμενον τῶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἀναγραφέντων, ἐφ' ἅ ἐστι τὸ Δ, καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον συγκείμενον ἐκ τῶν κυλίνδρων τῶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἀναγραφέντων, ἐφ' ἃ τὸ Β ἐστίν. Λοιπὸν δέ ἐστι δεῖξαι ὅτι τὸ περιγεγραμμένον τοῦ ἐγγεγραμμένου ὑπερέχει ἐλάσσονι τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος. Ἕκαστος δὴ τῶν κυλίνδων τῶν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι ἴσος ἐστὶ τῷ κυλίνδρῳ τῷ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἀναγραφομένῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ Β, ὡς ὁ μὲν ΘΗ τῷ ΘΙ, ὁ δὲ ΚΛ τῷ ΚΜ, καὶ οἱ ἄλλοι ὡσαύτως· καὶ πάντες δὴ οἱ κύλινδροι πάντεσσιν ἴσοι ἐντί. Δῆλον οὖν ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου ὑπερέχει τῷ κυλίνδρῳ τῷ βάσιν ἔχοντι τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, ἄξονα δὲ τὰν ΕΔ· οὗτος δέ ἐστιν ἐλάσσων τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος.

2 τὰν alt. scripsi cf. p. 198 l. 10 : τὸν codd. || 3 ἐλάσσων Torellius : ἔλασσον DEGH || 4 τᾷ Torellius : τᾶς DEGH || 5 ἔστε BG : ἔσται DEH || 9 ἀναγεγράφθων Torellius : ἀναγεγράφθω DEG ἀναγεγράφθωσαν H || 10 κύκλου Heiberg : κυλίνδρου BDEGH || 20 τῷ pr. GH : τὸ DE || 21 δὴ Heiberg : δὲ BDEGH.

20.

Un segment donné étant découpé d'un conoïde de l'une ou de l'autre espèce par un plan non perpendiculaire à l'axe, ou une partie non supérieure à la moitié étant découpée de la même manière d'un ellipsoïde de révolution de l'une ou de l'autre espèce, il est possible d'inscrire dans le segment une figure solide et de lui circonscrire une autre figure solide, dont chacune est composée de troncs de cylindre de même hauteur, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite soit inférieur à toute grandeur solide proposée.

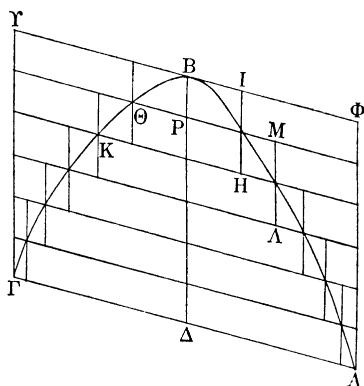


Fig. 87.

Soit donné un segment tel qu'il a été défini ; coupons la figure par un autre plan, passant par l'axe et perpendiculaire au plan découpant le segment donné ; que l'intersection de ce plan avec la figure soit la section conique ΑΒΓ, que son intersection avec le plan découpant le segment soit la droite ΓΑ. Du moment donc qu'on a supposé que le plan découpant le segment n'est

κʹ.

Τμάματος δοθέντος ὁποτερουοῦν τῶν κωνοειδέων ἀποτετμαμένου ἐπιπέδῳ μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα ἢ τῶν σφαιροειδέων ὁποτερουοῦν μὴ μείζονος ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδέος ὁμοίως ἀποτετμαμένου δυνατόν ἐστιν εἰς τὸ τμᾶμα σχῆμα στερεὸν ἐγγράψαι καὶ ἄλλο περιγράψαι ἐκ κυλίνδρων τόμων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφομένου ὑπερέχειν ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος.

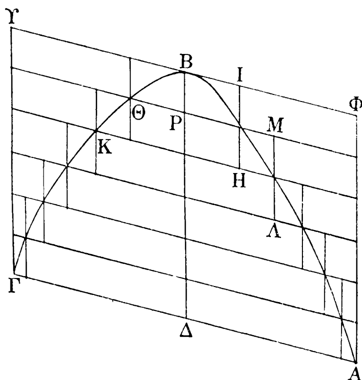


Fig. 87.

Δεδόσθω τμᾶμα, οἷον εἴρηται, τμαθέντος δὲ τοῦ σχήματος ἐπιπέδῳ ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἀποτετμακὸς τὸ δοθὲν τμᾶμα τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἁ ΑΒΓ κώνου τομά, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτετμακότος τὸ τμᾶμα ἁ ΓΑ εὐθεῖα. Ἐπεὶ οὖν ὑπόκειται τὸ ἐπίπεδον τὸ ἀποτετμακὸς τὸ τμᾶμα μὴ εἶμεν ὀρθὸν ποτὶ τὸν

4 ἡμίσεος Heiberg : ἡμίσους G ἡμικυκλίου BDEH || 6 σχῆμα add. Torellius || καὶ ἄλλο περιγράψαι B : om. DEGH.

pas perpendiculaire à l'axe, son intersection sera une ellipse dont l'axe est ΑΓ. Menons donc parallèlement à ΑΓ la tangente ΦΥ à la section conique, point de contact Β, et faisons passer par ΦΥ le plan parallèle au plan passant par ΑΓ ; ce plan sera tangent à la figure en Β[1] ; si maintenant le segment est découpé d'un paraboloïde de révolution, menons de Β la droite ΒΔ parallèlement à l'axe ; s'il est découpé d'un hyperboloïde de révolution, joignons le sommet du cône asymptotique de l'hyperboloïde à Β et prolongeons la droite de jonction selon ΒΔ ; s'il est découpé d'un ellipsoïde, soit ΒΔ le segment intercepté sur la droite menée (sc. du centre de l'ellipsoïde) à Β ; or il est évident que ΒΔ divise ΑΓ en deux parties égales ; le point Β sera donc le sommet du segment, et la droite ΒΔ en sera l'axe. Nous avons donc une ellipse décrite autour de l'axe ΑΓ et un segment de droite ΒΔ érigé au centre dans un plan perpendiculaire au plan de l'ellipse, le plan perpendiculaire passant par l'un des axes de l'ellipse ; il est donc possible de trouver un cylindre ayant pour axe ΒΔ et tel que l'ellipse décrite autour de l'axe ΑΓ sera située dans sa surface[2] ; mais la surface de ce cylindre tombera en dehors du segment, puisque le segment est découpé soit d'un conoïde[3], soit d'un sphéroïde[4] dont il ne dépasse pas la moitié. Il existera donc un tronc de cylindre ayant pour base l'ellipse décrite autour de l'axe ΑΓ et pour axe ΒΔ ; si on divise donc le tronc de cylindre en deux parties égales (sc. et qu'on répète cette opération) au moyen de plans parallèles au plan passant par ΑΓ, la figure qui reste finira par être inférieure à la grandeur solide proposée[5]. Que le tronc de cylindre ayant pour base l'ellipse d'axe ΑΓ et pour axe ΕΔ soit inférieur à la grandeur solide proposée. Divisons donc ΔΒ en segments de droite égaux à ΔΕ, menons par les points de division

1. Cf. prop. 16, 2e partie.
2. Cf. prop. 9.
3. Cf. prop. 15, 1re et 2e partie.
4. Cf. prop. 17.
5. Cf. Eucl. X, 1.

ἄξονα, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ὀξυγωνίου κώνου τομά, διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ ΑΓ. Ἔστω δὴ παράλληλος τᾷ ΑΓ ἁ ΦΥ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς, ἐπιψαυέτω δὲ κατὰ τὸ Β, καὶ ἀπὸ τᾶς ΦΥ ἀνεστακέτω ἐπίπεδον παράλληλον τῷ κατὰ τὰν ΑΓ· ἐπιψαύσει δὲ τοῦτο τοῦ σχήματος κατὰ τὸ Β· καὶ εἰ μέν ἐστι τὸ τμᾶμα ὀρθογωνίου κωνοειδέος, ἀπὸ τοῦ Β ἄχθω παρὰ τὸν ἄξονα ἁ ΒΔ, εἰ δὲ ἀμβλυγωνίου, ἀπὸ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδὲς εὐθεῖα ἀχθεῖσα ἐπὶ τὸ Β ἐκβεβλήσθω ἁ ΒΔ, εἰ δὲ σφαιροειδέος, ἐπὶ τὸ Β ἀχθεῖσα εὐθεῖα ἀπολελάφθω ἁ ΒΔ· δῆλον δὲ ὅτι τέμνει ἁ ΒΔ δίχα τὰν ΑΓ· ἐσσεῖται οὖν τὸ μὲν Β κορυφὰ τοῦ τμάματος, ἁ δὲ ΒΔ ἄξων. Ἔστιν δή τις ὀξυγωνίου κώνου τομὰ περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, καὶ γραμμὰ ἁ ΒΔ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀνεστάκουσα ἐν ὀρθῷ ἐπιπέδῳ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστιν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, διὰ τᾶς ἑτέρας διαμέτρου ἐόντος τοῦ ἐπιπέδου· δυνατὸν οὖν ἐστιν κύλινδρον εὑρεῖν ἄξονα ἔχοντα τὰν ΒΔ, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ· πεσεῖται δὲ ἁ ἐπιφάνεια αὐτοῦ ἐκτὸς τοῦ τμάματος, ἐπεί ἐστιν ἤτοι κωνοειδέος ἢ σφαιροειδέος τμᾶμα καὶ οὐ μεῖζόν ἐστιν ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδέος. Ἐσσεῖται δή τις κυλίνδρου τόμος βάσιας μὲν ἔχων τὰν τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰν τὰν περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, ἄξονα δὲ τὰν ΒΔ· τοῦ οὖν τόμου δίχα τεμνομένου ἐπιπέδοις παραλλήλοις τῷ ἐπιπέδῳ τῷ κατὰ τὰν ΑΓ ἐσσεῖται τὸ καταλειπόμενον ἔλασσον τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος. Ἔστω τόμος βάσιν μὲν ἔχων τὰν τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰν τὰν περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, ἄξονα δὲ τὰν ΕΔ, ἐλάσσων τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος. Διῃρήσθω δὴ ἁ ΔΒ ἐς τὰς ἴσας τᾷ ΔΕ, καὶ ἀπὸ τᾶν διαιρέσιων ἄχθων

2 ἔστω δὴ παράλληλος τᾷ ΑΓ Torellius : om. BDEGH ‖ 22 δή Heiberg : δέ BDEGH ‖ βάσιας DEG : βάσιν BH ‖ τὰν B : τὰς DEGH ‖ 23 τομὰν B : τομὰς DEGH.

des droites parallèles à ΑΓ jusqu'à la section conique et faisons passer par ces droites des plans parallèles au plan passant par ΑΓ; ces plans coupent donc la surface du segment, et les sections seront des ellipses semblables à l'ellipse d'axe ΑΓ, puisque les plans sont parallèles[1]. Faisons donc passer par chacune des ellipses deux troncs de cylindre, l'un du côté de l'ellipse où est situé le point Δ, l'autre du côté de B, tous ayant un axe égal à ΔE. Nous aurons ainsi des figures solides, l'une inscrite dans le segment, l'autre circonscrite, composées de troncs de cylindre de même hauteur. Il reste à montrer que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite est inférieur à la grandeur solide proposée. Mais on montrera de la même manière que plus haut[2] que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite est égal au tronc de cylindre ayant pour base l'ellipse de diamètre ΑΓ et pour axe EΔ ; or ce tronc de cylindre est inférieur à la grandeur solide proposée.

21.

Après ces prémisses, nous allons démontrer les théorèmes relatifs aux figures qui avaient été proposés.

Tout segment de paraboloïde découpé par un plan perpendiculaire à l'axe est équivalent aux trois demis du cône ayant même base et même axe que le segment.

Soit en effet un segment de paraboloïde découpé par un plan perpendiculaire à l'axe ; coupons-le par

1. Cf. prop. 14, fin.
2. Cf. prop. 19.

εὐθεῖαι παρὰ τὰν ΑΓ ἔστε ποτὶ τὰν τοῦ κώνου τομάν, ἀπὸ δὲ τᾶν ἀχθεισᾶν ἐπίπεδα ἀνεστακότων παράλληλα τῷ κατὰ τὰν ΑΓ ἐπιπέδῳ· τέμνοντι δὴ ταῦτα τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ τμάματος, καὶ ἐσσοῦνται ὀξυγωνίων κώνων τομαὶ ὁμοῖαι τᾷ περὶ τὰν ΑΓ διάμετρον, ἐπεὶ παράλληλά ἐντι τὰ ἐπίπεδα. Ἀφ' ἑκάστας δὴ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἀναγεγράφθων κυλίνδρου τόμοι δύο, ὁ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς τῷ Δ, ὁ δὲ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ Β, ἄξονα ἔχοντες ἴσον τῷ ΔΕ· ἐσσοῦνται δή τινα σχήματα στερεά, τὸ μὲν ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ τμάματι, τὸ δὲ περιγεγραμμένον, ἐκ κυλίνδρου τόμων ἴσον ὕψος ἐχόντων συγκείμενα. Λοιπὸν δέ ἐστι δεῖξαι ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσονι ὑπερέχει τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος. Δειχθήσεται δὲ ὁμοίως τῷ προτέρῳ ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου ὑπερέχει τῷ τόμῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὰν τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰν τὰν περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, ἄξονα δὲ τὰν ΕΔ· οὗτος δέ ἐστιν ἐλάσσων τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος.

κα'.

Τούτων προγεγραμμένων ἀποδεικνύωμες τὰ προβεβλημένα τῶν σχημάτων.

Πᾶν τμᾶμα ὀρθογωνίου κωνοειδέος ἀποτετμαμένον ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα ἡμιόλιόν ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν.

Ἔστω γὰρ τμᾶμα ὀρθογωνίου κωνοειδέος ἀποτετμαμένον ὀρθῷ ἐπιπέδῳ ποτὶ τὸν ἄξονα, καὶ τμαθέντος αὐτοῦ

1 εὐθεῖαι BG : εὐθεῖα DEH ‖ ἔστε Torellius : ἔσται BDEGH ‖ 2 ἀνεστακότων DEGH : ἀνεστακόντων Ahrens ‖ 6 ἀφ' Heiberg : ἐφ' BDEGH ‖ 8 τᾶς add. Heiberg ‖ τῷ EG : τὸ DH ‖ 14 ἐλάσσονι B : ἔλασσον DEGH ‖ 23 ἀποτετμαμένον B : ἀποτετμημένου DEGH ‖ 25 τὸν αὐτόν B : om. DEGH.

un autre plan, passant par l'axe ; que l'intersection de ce plan avec la surface soit la parabole ABΓ[1] ; que son intersection avec le plan découpant le segment soit la droite ΓA ; soit BΔ l'axe du segment ; soit, de plus, un cône ayant même base et même axe que le segment, et soit B son sommet. Il faut montrer que le segment de paraboloïde est équivalent aux trois demis de ce cône.

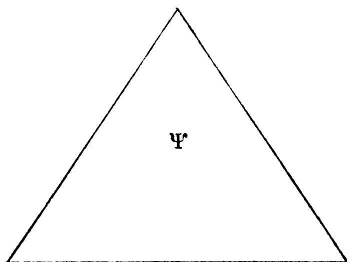


Fig. 88.

Construisons en effet un cône Ψ valant les trois demis du cône dont la base est le cercle de diamètre AΓ et dont l'axe est BΔ ; soit, de plus, un cylindre ayant pour base le cercle de diamètre AΓ et pour axe BΔ ; le cône Ψ sera donc équivalent à la moitié du cylindre, du moment que le cône Ψ est équivalent aux trois demis du cône (sc. ayant même base et même hauteur que le cylindre) ; je dis que le segment de paraboloïde est équivalent au cône Ψ.

Car s'il ne lui est pas équivalent, il est plus grand ou plus petit. Qu'il soit d'abord, si possible, plus grand. Inscrivons donc dans le segment une figure solide et circonscrivons-lui une autre figure solide, toutes deux composées de cylindres de même hauteur, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite soit inférieur à l'excès du segment de paraboloïde sur

1. Cf. prop. 11, 1re partie.

ἐπιπέδῳ ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος τᾶς μὲν ἐπιφανείας τομὰ ἔστω ἁ ΑΒΓ ὀρθογωνίου κώνου τομά, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτέμνοντος τὸ τμᾶμα ἁ ΓΑ εὐθεῖα, ἄξων δὲ ἔστω τοῦ τμάματος ἁ ΒΔ, ἔστω δὲ καὶ κῶνος τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, οὗ κορυφὰ τὸ Β. Δεικτέον ὅτι τὸ τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος ἡμιόλιόν ἐστι τοῦ κώνου τούτου.

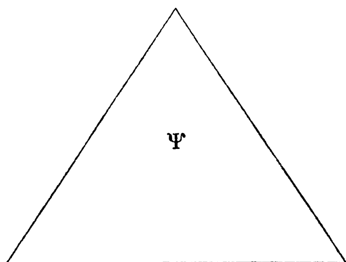


Fig. 88.

Ἐκκείσθω γὰρ κῶνος ὁ Ψ ἡμιόλιος ἐὼν τοῦ κώνου, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, ἄξων δὲ ἁ ΒΔ, ἔστω δὲ καὶ κύλινδρος βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, ἄξονα δὲ τὰν ΒΔ · ἐσσεῖται οὖν ὁ Ψ κῶνος ἡμίσεος τοῦ κυλίνδρου [ἐπείπερ ἡμιόλιός ἐστιν ὁ Ψ κῶνος τοῦ αὐτοῦ κώνου] · λέγω ὅτι τὸ τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος ἴσον ἐστὶ τῷ Ψ κώνῳ.

Εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσον, ἤτοι μεῖζόν ἐντι ἢ ἔλασσον. Ἔστω δὴ πρότερον, εἰ δυνατόν, μεῖζον. Ἐγγεγράφθω δὴ σχῆμα στερεὸν εἰς τὸ τμᾶμα, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι

9 ὁ DEGH : ὁ κύκλος ὁ B || ἄξων δὲ ἁ ms. B : ἄξονα δὲ τὰν DEGH || 11 ἡμίσεος Heiberg : ἡμίσεος ὅλι DEH ἡμιόλιος G ἡμίσεος ὅλου B || 17 ἄλλο EGH : ἄλλῳ D || 18 συγκείμενον B : τῶν συγκειμένων DEGH.

le cône Ψ[1] ; que des cylindres, dont est composée la figure circonscrite, le plus grand soit celui qui a pour base le cercle de diamètre ΑΓ et pour axe ΕΔ, que le plus petit soit celui qui a pour base le cercle de diamètre ΣΤ et pour axe ΒΙ ; que des cylindres, dont est composée la figure inscrite, le plus grand soit celui qui a pour base le cercle de diamètre ΚΛ et pour axe ΔΕ, et que le plus petit soit celui qui a pour base le cercle de diamètre ΣΤ et pour axe ΘΙ ; prolongeons les plans (sc. de base) de tous les cylindres jusqu'à la surface du cylindre ayant pour base le cercle de diamètre ΑΓ

Β
Ρ Σ
Τ
Ι
Θ
Ν
Ο
Ζ
Κ
Λ
Π
Ξ
Ε
Α
Δ
Γ

Fig. 89.

et pour axe ΒΔ ; le cylindre entier sera ainsi divisé en cylindres d'un nombre égal à celui des cylindres de la figure circonscrite et égaux en grandeur au plus grand d'entre eux. Et comme l'excès de la figure circonscrite au segment sur la figure inscrite est inférieur à l'excès du segment sur le cône, il est évident qu'à

1. Cf. prop. 19.

ᾗ ἁλίκῳ ὑπερέχει τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ Ψ κώνου, καὶ ἔστω τῶν κυλίνδρων, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ περιγραφὲν σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, ἄξονα δὲ τὰν ΕΔ, ἐλάχιστος δὲ ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΣΤ, ἄξονα δὲ τὰν ΒΙ, τῶν δὲ κυλίνδρων, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ ἐγγραφὲν σχῆμα, μέγιστος μὲν ἔστω ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΚΛ, ἄξονα δὲ τὰν ΔΕ, ἐλάχιστος δὲ ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΣΤ, ἄξονα δὲ τὰν ΘΙ, ἐκϐεϐλήσθω δὲ τὰ ἐπίπεδα πάντων τῶν κυλίνδρων ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ,

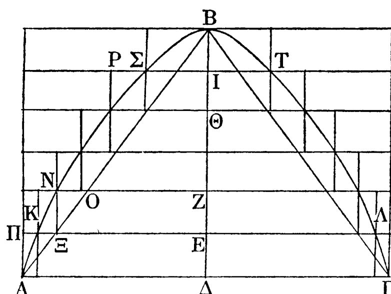


Fig. 89.

ἄξονα δὲ τὰν ΒΔ· ἐσσεῖται δὴ ὁ ὅλος κύλινδρος διῃρημένος εἰς κυλίνδρους τῷ μὲν πλήθει ἴσους τοῖς κυλίνδροις τοῖς ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι, τῷ δὲ μεγέθει ἴσους τῷ μεγίστῳ αὐτῶν. Καὶ ἐπεὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα περὶ τὸ τμᾶμα ἐλάσσονι ὑπερέχει τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἢ τὸ τμᾶμα τοῦ κώνου, δῆλον ὅτι καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον

1 ᾗ ἁλίκῳ Heiberg : πηλίκῳ DEGH quam quanto B ‖ τὸ GHE : τῷ D ‖ 14 τοῖς κυλίνδροις DEGH : om. B ‖ 17 ἐγγεγραμμένου B : περιγεγραμμένου DEGH.

son tour la figure inscrite dans le segment est supérieure au cône Ψ[1]. Le premier cylindre de ceux qui figurent dans le cylindre entier, celui qui a pour axe ΔE, a donc au premier cylindre de la figure inscrite, celui qui a pour axe ΔE, le même rapport que le carré sur ΔA a au carré[2] sur KE ; or ce dernier rapport est égal au rapport de BΔ à BE et au rapport de ΔAà EΞ. On montrera de la même manière que le rapport du deuxième des cylindres contenus dans le cylindre entier, celui qui a pour axe EZ, au deuxième des cylindres de la figure inscrite est aussi égal au rapport de ΠE, c'est-à-dire de ΔA, à ZO, et le rapport de chacun des autres cylindres, contenus dans le cylindre entier et ayant des axes égaux à ΔE, à chacun des cylindres de la figure inscrite, ayant le même axe, sera égal au rapport entre la moitié du diamètre de la base (sc. du cylindre contenu dans le cylindre entier) et le segment qui y est intercepté entre les droites AB et BΔ ; il s'ensuit que le rapport de la somme des cylindres contenus dans le cylindre ayant pour base le cercle de diamètre AΓ et pour axe ΔB à la somme des cylindres dans la figure inscrite sera égal au rapport entre la somme des rayons des cercles de base dans les cylindres indiqués à la somme de segments interceptés sur ces rayons entre les droites AB et BΔ. Or la somme des rayons indiqués est supérieure au double de la somme des segments indiqués diminuée de AΔ ; par conséquent, la somme des cylindres contenus dans le

1. On a en effet par hypothèse, en désignant par T, P, E et Ψ les volumes du segment, de la figure circonscrite, de la figure inscrite et du cône Ψ,

(1) $P - E < T - \Psi$.

D'autre part,

(2) $P > T$.

On renforce donc l'inégalité (1) en substituant à T la grandeur P supérieure à T, d'où :

(3) $P - E < P - \Psi$,

et par conséquent $E > \Psi$.

2. Cf. Eucl. XII, 11.

σχῆμα ἐν τῷ τμάματι μεῖζόν ἐστι τοῦ Ψ κώνου. Ὁ δὴ πρῶτος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ὁ ἔχων ἄξονα τὰν ΔΕ ποτὶ τὸν πρῶτον κύλινδρον τῶν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν ΔΕ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ΔΑ ποτὶ τὰν ΚΕ δυνάμει· οὗτος δέ ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει ἁ ΒΔ ποτὶ τὰν ΒΕ καὶ τῷ ὃν ἔχει ἁ ΔΑ ποτὶ τὰν ΕΞ. Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ ὁ δεύτερος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ὁ ἔχων ἄξονα τὰν ΕΖ ποτὶ τὸν δεύτερον κύλινδρον τῶν ἐν τῷ ἐγγεγραμμέῳ σχήματι τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον, ὃν ἁ ΠΕ, τουτέστιν ἁ ΔΑ, ποτὶ τὰν ΖΟ, καὶ τῶν ἄλλων κυλίνδρων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἄξονα ἐχόντων ἴσον τᾷ ΔΕ ποτὶ ἕκαστον τῶν κυλίνδρων τῶν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι ἄξονα ἐχόντων τὸν αὐτὸν ἕξει τοῦτον τὸν λόγον, ὃν ἁ ἡμίσεια τᾶς διαμέτρου τᾶς βάσιος αὐτοῦ ποτὶ τὰν ἀπολελαμμέναν ἀπ' αὐτᾶς μεταξὺ τᾶν ΑΒ, ΒΔ εὐθειᾶν· καὶ πάντες οὖν οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ κυλίνδρῳ, οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, ἄξων δὲ [ἐστὶν] ἁ ΔΒ εὐθεῖα, ποτὶ πάντας τοὺς κυλίνδρους τοὺς ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, ὃν πᾶσαι αἱ εὐθεῖαι αἱ ἐκ τῶν κέντρων τῶν κύκλων, οἵ ἐντι βάσιες τῶν εἰρημένων κυλίνδρων, ποτὶ πάσας τὰς εὐθείας τὰς ἀπολελαμμένας ἀπ' αὐτᾶν μεταξὺ τᾶν ΑΒ, ΒΔ. Αἱ δὲ εἰρημέναι εὐθεῖαι τῶν εἰρημένων χωρὶς τᾶς ΑΔ μείζονές ἐντι ἢ διπλάσιαι· ὥστε καὶ οἱ κύλινδροι πάντες οἱ ἐν τῷ

2 ὁ add. Heiberg ‖ 3 τῶν B : τὸν DEGH ‖ 6 τῷ G : τὸν DEH ‖ 8 τὰν scripsi, cf. p. 198, 10 : τὸν codd. ‖ 9 : τῶν B : τὸν DEGH ‖ 10 ἔχειν GH : εἶχεν DE ἔχων Torellius ‖ ΖΟ Heiberg : ΖΕ mss. BDEGH ‖ 12 ἴσον — 13 ἐχόντων add. Nizzius ‖ 15 αὐτοῦ Nizzius : αὐτᾶς DEGH ‖ 16 οὖν add. Heiberg ‖ 18 ΔΒ Heller : ΔΙ ms. B, ΔΓ mss. DEGH ‖ 19 ἐγγεγραμμένῳ BH : γεγραμμένῳ DEG ‖ 21 ἐντι βάσιες Heiberg : ἐν τῇ βάσει εἰσὶν BDEGH ‖ 22 ἀπ' αὐτᾶν Heiberg : ἀπὸ τᾶς BDEGH ‖ 23 τᾶς Torellius : τᾶν DEGH ‖ μείζονές B : μείζους E μείζων DGH ‖ 24 ἐν DEGH : in toto B.

cylindre d'axe ΔB est aussi supérieure au double de la figure inscrite[1] ; le cylindre entier, d'axe ΔB est donc supérieur au double de la figure inscrite. Mais il était équivalent au double du cône Ψ[2] ; la figure inscrite est donc inférieure au cône Ψ, ce qui est impossible puisqu'on a montré qu'elle est supérieure à Ψ. Il s'ensuit que le (sc. segment) conoïde n'est pas supérieur au cône Ψ. Mais il ne lui est pas non plus inférieur ; construisons en effet de nouveau la figure inscrite et la figure circonscrite de manière que l'excès (sc. de cette dernière sur la figure inscrite) soit inférieur à l'excès du cône Ψ sur le segment conoïde[3], les autres constructions étant les mêmes que plus haut. Du moment donc que la figure inscrite est inférieure au segment et que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite est inférieur à l'excès du cône Ψ sur le segment, il est évident que la figure circonscrite est inférieure au cône Ψ. De nouveau le premier cylindre dans le cylindre entier, celui qui a pour axe ΔE, a au premier cylindre de la figure circonscrite, ayant le même axe EΔ, le même rapport que le carré sur AΔ a à lui-même, et le second cylindre du cylindre entier, celui qui a pour axe EZ, a au deuxième cylindre de la figure circonscrite, celui qui a pour axe EZ, le même rapport que le carré sur ΔA a au carré sur KE ; or ce dernier rapport est égal au rapport de BΔ à BE et au rapport de ΔA à EΞ ; et chacun des autres cylindres du cylindre entier, dont les axes sont égaux à ΔE, a à chacun des cylindres de la figure circonscrite, dont les

1. Cf. au commencement de ce traité la définition 3.
2. Cf. le commencement de cette proposition, p. 203, l. 11.
3. Cf. prop. 19.

κυλίνδρῳ, οὗ ἄξων ἁ ΔΒ, μείζονές ἐντι ἢ διπλάσιοι τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος· πολλῷ ἄρα καὶ ὁ ὅλος κύλινδρος, οὗ ἄξων ἁ ΔΒ, μείζων ἐντὶ ἢ διπλασίων τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος. Τοῦ δὲ Ψ κώνου ἦν διπλασίων· ἔλασσον ἄρα τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ Ψ κώνου· ὅπερ ἀδύνατον· ἐδείχθη γὰρ μεῖζον. Οὐκ ἄρα ἐστὶν μεῖζον τὸ κωνοειδὲς τοῦ Ψ κώνου. Ὁμοίως δὲ οὐδὲ ἔλασσον· πάλιν γὰρ ἐγγεγράφθω τὸ σχῆμα καὶ περιγεγράφθω, ὥστε ὑπερέχειν [ἕκαστον] ἐλάσσονι ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει ὁ Ψ κῶνος τοῦ κωνοειδέος, καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον κατεσκευάσθω. Ἐπεὶ οὖν ἔλασσόν ἐστι τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ τμάματος, καὶ τὸ ἐγγραφὲν τοῦ περιγραφέντος ἐλάσσονι λείπεται ἢ τὸ τμᾶμα τοῦ Ψ κώνου, δῆλον ὡς ἔλασσόν ἐστι τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ Ψ κώνου. Πάλιν δὲ ὁ πρῶτος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ὁ ἔχων ἄξονα τὰν ΔΕ ποτὶ τὸν πρῶτον κύλινδρον τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν τὸν αὐτὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν ΕΔ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΔ τετράγωνον ποτὶ τὸ αὐτό, ὁ δὲ δεύτερος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ὁ ἔχων ἄξονα τὰν ΕΖ ποτὶ τὸν δεύτερον κύλινδρον τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν ΕΖ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ΔΑ ποτὶ τὰν ΚΕ δυνάμει· οὗτος δέ ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει ἁ ΒΔ ποτὶ τὰν ΒΕ, καὶ τῷ ὃν ἔχει ἁ ΔΑ ποτὶ τὰν ΕΞ· καὶ τῶν ἄλλων κυλίνδρων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἄξονα ἐχόντων ἴσον τᾷ ΔΕ ποτὶ ἕκαστον τῶν κυλίνδρων τῶν ἐν τῷ περιγιγραμμένῳ σχήματι

1 οὗ Heiberg : οὗ ὁ DEGH ‖ ἁ scripsi ex l. 3 : ὁ codd. ‖ ΔΒ Heller : ΔΙ codd. ‖ 4 ἔλασσον EGH : ἐλάσσων D ‖ 9 ἐλάσσονι B : ἐλάσσων DEGH ‖ ἢ ἁλίκῳ Heiberg : quam in quanto B ἢ πάλιν κω DEH ἢ πηλίκῳ G ‖ 16 τῶν Heiberg : τὸν BDFG ‖ 17 τὸν τὸν Heiberg : τὸν DEGH ‖ τὰν Heiberg : τᾷ DEGH ‖ 18 ἔχει B : εἶχε DEGH ‖ 19 κυλίνδρῳ G : κυλίνδρων DEH ‖ 20 τῶν Heiberg : τὸν BDEGH ‖ 22 τὰν G : τᾷ DEH ‖ 25 ἴσον Torellius : ἴσαν DEGH.

axes sont les mêmes, le rapport qu'a la moitié du diamètre de sa base au segment qui en est intercepté entre les droites AB et BΔ ; il s'ensuit que le rapport de la somme des cylindres contenus dans le cylindre entier d'axe BΔ à la somme des cylindres dans la figure circonscrite est égal au rapport de la somme de tous les rayons à la somme des segments (sc. interceptés). Or la somme des rayons des cercles de base des cylindres est inférieure au double de la somme des segments interceptés sur ces rayons, augmentée de AΔ[1] ; il est donc évident que la somme des cylindres contenus dans le cylindre entier est à son tour inférieure au double de la somme des cylindres dans la figure circonscrite ; il s'ensuit que le cylindre ayant pour base le cercle de diamètre AΓ et pour axe BΔ est inférieur au double de la figure circonscrite ; or il n'est pas inférieur, mais supérieur au double, puisqu'il est double du cône Ψ et qu'on a démontré que la figure circonscrite est inférieure au cône Ψ. Le segment de conoïde n'est donc pas inférieur, lui non plus, au cône Ψ. Mais on a montré qu'il ne lui est pas, non plus, supérieur ; il est donc équivalent aux trois demis du cône ayant même base et même axe que le segment.

22.

Même si le segment est découpé du paraboloïde par un plan non perpendiculaire à l'axe, il n'en sera pas moins équivalent aux trois demis du segment de cône ayant même base et même hauteur que le segment.

Soit un segment de paraboloïde découpé de la manière indiquée ; coupons-le par un plan passant par

1. Cf. la définition 3 au commencement de ce traité.

ἄξονα ἐχόντων τὸν αὐτὸν ἕξει τοῦτον τὸν λόγον, ὃν ἁ ἡμίσεια τᾶς διαμέτρου τᾶς βάσιος αὐτοῦ ποτὶ τὰν ἀπολελαμμέναν ἀπ' αὐτᾶς μεταξὺ τᾶν ΑΒ, ΒΔ εὐθειᾶν· καὶ πάντες οὖν οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, οὗ ἄξων ἐστὶν ἁ ΒΔ εὐθεῖα, ποτὶ πάντας τοὺς κυλίνδρους τοὺς ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, ὃν πᾶσαι αἱ εὐθεῖαι ποτὶ πάσας τὰς εὐθείας. Αἱ δὲ εὐθεῖαι πᾶσαι αἱ ἐκ τῶν κέντρων τῶν κύκλων, οἳ βάσιές ἐντι τῶν κυλίνδρων, τᾶν εὐθειᾶν πασᾶν τᾶν ἀπολελαμμενᾶν ἀπ' αὐτᾶν σὺν τᾷ ΑΔ ἐλάσσονές ἐντι ἢ διπλάσιαι· δῆλον οὖν ὅτι καὶ οἱ κύλινδροι πάντες οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἐλάσσονές ἐντι ἢ διπλάσιοι τῶν κυλίνδρων τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι· ὁ ἄρα κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, ἄξονα δὲ τὰν ΒΔ, ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλασίων τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος. Οὐκ ἔστι δέ, ἀλλὰ μείζων ἢ διπλάσιος· τοῦ γὰρ Ψ κώνου διπλασίων ἐστί, τὸ δὲ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλαττον ἐδείχθη τοῦ Ψ κώνου. Οὐκ ἄρα ἐστὶν οὐδὲ ἔλασσον τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ Ψ κώνου. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ μεῖζον· ἡμιόλιον ἄρα ἐστὶν τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν.

κβ′.

Καὶ τοίνυν εἴ κα μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα ἐπιπέδῳ ἀποτμαθῇ τὸ τμᾶμα ἀπὸ τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος, ὁμοίως ἡμιόλιον ἐσσεῖται τοῦ ἀποτμάματος τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν.

Ἔστω τμᾶμα ὀρθογωνίου κωνοειδέος ἀποτετμαμένον, ὡς εἴρηται, καὶ τμαθέντος αὐτοῦ ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος

2 διαμέτρου τᾶς add. Nizzius || 4 οὖν Torellius : γοῦν DEGH || οὗ Nizzius : ὧν BDEGH || 9 τᾶν pr. B : πρὸς τᾶν DEGH || 10 τᾷ EG : τὰν DH || 13 κύκλον BG : κύλινδρον DEH || 19 οὐδὲ G : οὔτε DEH.

l'axe et perpendiculaire au plan découpant le segment ; que son intersection avec la figure soit la parabole ΑΒΓ[1] ; que son intersection avec le plan découpant le segment soit la droite ΑΓ ; soit ΦΥ une tangente parallèle à ΑΓ dont le point de contact avec la parabole soit Β ; menons la droite ΒΔ parallèlement à l'axe ; elle divisera donc ΑΓ en deux parties égales[2] ; faisons passer par ΦΥ un plan parallèle au plan de trace ΑΔ ; ce plan sera donc tangent[3] au paraboloïde en Β ; le sommet du segment sera ainsi le point Β, et son axe ΒΔ. Du moment donc que le plan de trace ΑΓ coupe le paraboloïde en n'étant pas perpendiculaire à l'axe, sa section sera une ellipse dont le grand axe est ΑΓ[4]. On a donc une ellipse, ayant pour grand axe ΓΑ, et un segment de droite ΒΔ, issu du centre de l'ellipse et situé dans un plan passant par l'axe de l'ellipse et perpendiculaire au plan de l'ellipse ; il est donc possible de trouver un cylindre dont l'axe est situé sur la droite ΒΔ et tel que l'ellipse soit située dans sa surface[5] ; mais il est possible de trouver aussi un cône ayant pour sommet le point Β et tel que l'ellipse soit située dans sa surface[6] ; nous aurons donc un tronc de cylindre ayant pour base l'ellipse, décrite autour de ΑΓ comme axe, et pour axe la droite ΒΔ, et un segment de cône ayant même base et même axe que le tronc de cylindre et le segment. Il faut montrer que le segment de paraboloïde est équivalent aux trois demis de ce cône.

Soit donc le cône Ψ, équivalent aux trois demis de ce segment de cône ; dès lors, le tronc de cylindre ayant même base et même axe que le segment sera équivalent

1. Cf. prop. 11, 1re partie.
2. Cf. Archimède, *La quadrature de la parabole*, prop. 1.
3. Cf. prop. 16, 2e partie.
4. Cf. prop. 12.
5. Cf. prop. 9.
6. Cf. prop. 8.

ὀρθῷ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἀποτετμακὸς τὸ τμᾶμα τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἁ ΑΒΓ ὀρθογωνίου κώνου τομά, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτετμακότος τὸ τμᾶμα ἁ ΑΓ εὐθεῖα, παρὰ δὲ τὰν ΑΓ ἁ ΦΥ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς κατὰ τὸ Β, καὶ ἁ ΒΔ ἄχθω παρὰ τὸν ἄξονα· τεμεῖ δὴ αὕτα δίχα τὰν ΑΓ· ἀπὸ δὲ τᾶς ΦΥ ἐπίπεδον ἀνεστακέτω παράλληλον τῷ κατὰ τὰν ΑΔ· ἐπιψαύσει δὴ τοῦτο τὸ κωνοειδὲς κατὰ τὸ Β, καὶ ἐσσεῖται τοῦ τμάματος κορυφὰ τὸ Β σαμεῖον, ἄξων δὲ ἁ ΒΔ. Ἐπεὶ οὖν τὸ ἐπίπεδον τὸ κατὰ τὰν ΑΓ οὐ ποτ' ὀρθὰς ἐὸν τῷ ἄξονι τετμάκει τὸ κωνοειδές, ἁ τομά ἐστιν ὀξυγωνίου κώνου τομά, διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ μείζων ἁ ΑΓ. Ἐούσας δὴ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς περὶ διάμετρον τὰν ΓΑ καὶ γραμμᾶς τᾶς ΒΔ, ἅ ἐστιν ἀπὸ τοῦ κέντρου τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἀνεστάκουσα ἐν ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ἀνεστακότι ἀπὸ τᾶς διαμέτρου ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστιν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, δυνατόν ἐστι κύλινδρον εὑρεῖν τὸν ἄξονα ἔχοντα ἐπ' εὐθείας τᾷ ΒΔ, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά· δυνατὸν δέ ἐστι καὶ κῶνον εὑρεῖν κορυφὰν ἔχοντα τὸ Β σαμεῖον, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ ἐσσεῖται· ὥστε ἐσσεῖται τόμος κυλίνδρου τις βάσιν ἔχων τὰν τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰν τὰν περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, ἄξονα δὲ τὰν ΒΔ, καὶ ἀπότμαμα κώνου βάσιν ἔχον τὰν αὐτὰν τῷ τε τόμῳ καὶ τῷ τμάματι, ἄξονα δὲ τὸν αὐτόν. Δεικτέον, ὅτι τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα ἡμιόλιόν ἐστι τούτου τοῦ κώνου.

Ἔστω δὴ ὁ Ψ κῶνος ἡμιόλιος τοῦ ἀποτμάματος τούτου· ἐσσεῖται δὴ ὁ τόμος τοῦ κυλίνδρου ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν διπλάσιος τοῦ Ψ

1 τμᾶμα Heiberg : σχῆμα BDEGH ‖ 2 τομὰ pr. B : om. DEGH ‖ κώνου BG : om. DEH ‖ 7 δὴ Heiberg : δὲ BDEGH ‖ 15 τᾶς add. Heiberg ‖ 21 ὥστε ἐσσεῖται Heiberg : ἐσσεῖται δὴ Torellius om. BDEGH ‖ 25 τὸ τοῦ Heiberg : τὸ DEGH τοῦ Torellius.

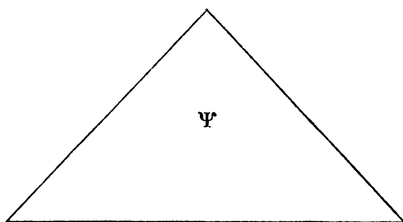


Fig. 90.

au double du cône Ψ ; car ce dernier vaut les trois demis du segment de cône ayant même base et même axe que le segment (sc. de paraboloïde), et le segment de cône indiqué est le tiers du tronc de cylindre ayant même base et même axe que le segment[1]. Nécessairement donc le segment de paraboloïde est équivalent au cône Ψ.

En effet, s'il ne lui est pas équivalent, il est ou bien supérieur ou inférieur. Qu'il soit d'abord, si possible, supérieur. Inscrivons donc dans le segment une figure solide et circonscrivons-lui en une autre, chacune de ces figures étant composée de troncs de cylindre de hauteurs égales, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite soit inférieur à l'excès du segment de paraboloïde sur le cône Ψ[2], et prolongeons les plans (sc. de base) des troncs jusqu'à la surface du tronc de cylindre ayant même base et même axe que le segment. De nouveau donc le rapport du premier des troncs contenus dans le tronc de cylindre entier, celui qui a pour axe ΔE, au premier tronc de la figure inscrite, d'axe ΔE, est égal au rapport du carré sur AΔ au carré sur KE, puisque les troncs de cylindre de même

1. Cf. prop. 10, 2e partie.
2. Cf. prop. 20.

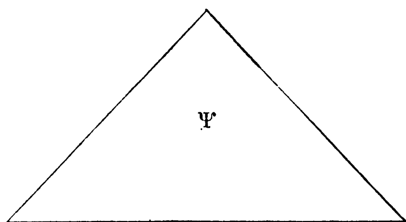


Fig. 90.

κώνου · οὗτος γὰρ ἡμιόλιός ἐστι τοῦ ἀποτμάματος τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τὸ δὲ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τὸ εἰρημένον τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ τόμου τοῦ κυλίνδρου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. Ἀναγκαῖον δή ἐστι τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα ἴσον εἶμεν τῷ Ψ κώνῳ.

Εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσον, ἤτοι μεῖζόν ἐστι ἢ ἔλασσον. Ἔστω δὴ πρότερον, εἰ δυνατόν, μεῖζον. Ἐγγεγράφθω δή τι εἰς τὸ τμᾶμα σχῆμα στερεόν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων τόμων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενα, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ Ψ κώνου, καὶ διάχθω τὰ ἐπίπεδα τῶν τόμων ἔστε ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ τόμου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. Πάλιν δὴ ὁ πρῶτος τόμος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ τόμῳ ὁ ἔχων ἄξονα τὰν ΔΕ ποτὶ τὸν πρῶτον τόμον τῶν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν ΔΕ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΔ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΚΕ · οἱ γὰρ τόμοι οἱ ἴσον ὕψος ἔχοντες

6 δή Heiberg : δέ BDEGH ‖ 10 σχῆμα add. Torellius ‖ 14 διάχθω add. Heiberg ‖ ἔστε Heiberg : ἐσσεῖται DEGH ‖ 17 ΔΕ ms. B : ΑΕ mss. DEGH.

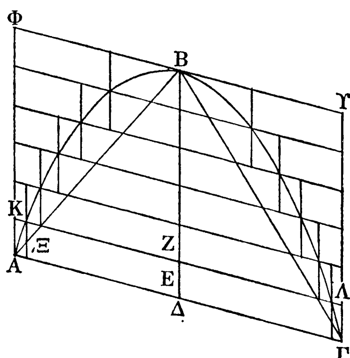


Fig. 91.

hauteur ont entre eux le même rapport que leurs bases[1], que les bases, étant des ellipses semblables[2], ont le même rapport que les carrés sur les axes correspondants[3], et que les segments de droite AΔ et KE sont les moitiés des axes correspondants. Or le rapport du carré sur AΔ au carré sur KE est égal au rapport du segment de droite BΔ à BE[4], puisque BΔ est parallèle à l'axe (sc. de la parabole section) et que AΔ et KE sont parallèles à la tangente en B ; et le rapport de BΔ à BE est égal au rapport de AΔ à EΞ ; le premier tronc du tronc de cylindre entier aura donc au premier tronc de la figure inscrite le même rapport qu'a AΔ à EΞ ; le rapport de chacun des autres troncs du tronc de cylindre entier, ayant des axes égaux à ΔE, à chacun des troncs de la figure inscrite, ayant les mêmes axes, est égal au rapport entre la moitié de l'axe de ses bases et le segment intercepté sur cette moitié entre les droites AB et BΔ. On montrera donc de la même manière que plus haut[5] que la figure inscrite est

1. Cf. prop. 10.
2. Cf. prop. 14, coroll.
3. Cf. prop. 6, coroll.
4. Cf. *La quadr. de la parab.*, prop. 3.
5. Cf. prop. 21.

Fig. 91.

τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ποτ' ἀλλάλους ταῖς βάσεσιν, αἱ δέ βάσιες αὐτῶν, ἐπεὶ ὁμοῖαί ἐντι ὀξυγωνίων κώνων τομαί, τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον, ὃν αἱ ὁμόλογοι διάμετροι αὐτῶν δυνάμει, ἡμίσειαι δέ ἐντι τῶν ὁμολόγων διαμέτρων αἱ ΑΔ, ΚΕ. Ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ ΑΔ ποτὶ τὰν ΚΕ δυνάμει, τοῦτον ἔχει ἁ ΒΔ ποτὶ τὰν ΒΕ μάκει, ἐπεὶ ἁ μὲν ΒΔ παρὰ τὰν διάμετρόν ἐστιν, αἱ δὲ ΑΔ, ΚΕ παρὰ τὰν κατὰ τὸ Β ἐπιψαύουσαν· ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ ΒΔ ποτὶ τὰν ΒΕ, τοῦτον ἔχει ἁ ΑΔ ποτὶ τὰν ΕΞ· ἕξει οὖν ὁ πρῶτος τόμος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ τόμῳ ποτὶ τὸν πρῶτον τόμον τῶν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ΑΔ ποτὶ τὰν ΕΞ· καὶ τῶν ἄλλων τόμων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ τόμῳ ἄξονα ἴσον ἐχόντων τᾷ ΔΕ ποτὶ ἕκαστον τῶν τόμων τῶν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν αὐτὸν ἄξονα ἐχόντων τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ἡμίσεια τᾶς διαμέτρου τᾶν βάσιων αὐτοῦ ποτὶ τὰν ἀπολελαμμέναν ἀπ' αὐτᾶς μεταξὺ τᾶν ΑΒ, ΒΔ. Δειχθήσεται οὖν ὁμοίως τοῖς πρότερον τὸ μὲν ἐγγεγραμμένον

13 ἐχόντων G : ἔχοντα DEH || 15 τᾶν βάσιων BDEGH : τᾶς βάσεως Nizzius.

supérieure au cône Ψ, et que le tronc de cylindre ayant même base et même axe que le segment de paraboloïde est supérieur au double de la figure inscrite ; ce tronc de cylindre est donc aussi supérieur au double du cône Ψ. Mais il n'est pas supérieur, mais égal au double de Ψ. Il s'ensuit que le segment de paraboloïde n'est pas supérieur au cône Ψ. Mais on montrera par le même raisonnement qu'il ne lui est pas, non plus, inférieur ; il est donc évident qu'il lui est égal. Le segment de paraboloïde est donc équivalent aux trois demis du segment de cône ayant même base et même axe que le segment.

23.

Si d'un paraboloïde de révolution deux segments sont découpés, l'un par un plan perpendiculaire à l'axe, l'autre par un plan non perpendiculaire, et que les axes des deux segments sont égaux, les segments seront équivalents.

Découpons en effet d'un paraboloïde de révolution deux segments de la manière indiquée ; coupons le paraboloïde par un plan passant par l'axe, et par un autre plan, perpendiculaire à l'axe ; que l'intersection (sc. du plan passant par l'axe) avec le paraboloïde soit la parabole ΑΒΓ, diamètre ΒΔ[1] ; que les intersections avec les plans (sc. découpants) soient les droites ΑΖ et ΕΓ, ΕΓ étant l'intersection avec le plan perpendiculaire à l'axe, ΖΑ l'intersection avec le plan non perpendiculaire ; soient ΒΘ et ΚΛ les axes, égaux entre eux, des segments, et Β et Λ leurs sommets ; il faut montrer que le segment de paraboloïde de sommet Β est équivalent au segment de paraboloïde de sommet Λ.

Du moment, en effet, que de la même parabole sont découpés deux segments ΑΛΖ et ΕΒΓ, et que leurs diamètres ΚΛ et ΒΘ sont égaux, le triangle ΑΛΚ

1. Cf. prop. 11, 1re partie.

σχῆμα μεῖζον ἐὸν τοῦ Ψ κώνου, ὁ δὲ τοῦ κυλίνδρου τόμος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν μείζων ἐὼν ἢ διπλασίων τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος· ὥστε καὶ τοῦ Ψ κώνου μείζων ἐσσεῖται ἢ διπλασίων. Οὐκ ἔστι δέ, ἀλλὰ διπλασίων. Οὐκ ἄρα ἐστὶ μεῖζον τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ Ψ κώνου. Διὰ τῶν αὐτῶν δὲ δειχθήσεται ὅτι οὐδὲ ἔλασσόν ἐστιν· δῆλον οὖν ὅτι ἴσον. Ἡμιόλιον ἄρα ἐστὶ τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ ἀποτμάματος τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν.

κγ'.

Εἴ κα τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος δύο τμάματα ἀποτμαθέωντι ἐπιπέδοις, τὸ μὲν ἕτερον ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, τὸ δὲ ἕτερον μὴ ὀρθῷ, ἔωντι δὲ οἱ τῶν τμαμάτων ἄξονες ἴσοι, ἴσα ἐσσοῦνται τὰ τμάματα.

Ἀποτετμάσθω γὰρ ὀρθογωνίου κωνοειδέος δύο τμάματα, ὡς εἴρηται, τμαθέντος δὲ τοῦ κωνοειδέος ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος [καὶ ἄλλῳ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα] τοῦ μὲν κωνοειδέος ἔστω τομὰ ἁ ΑΒΓ ὀρθογωνίου κώνου τομά, διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ ΒΔ, τῶν δὲ ἐπιπέδων αἱ ΑΖ, ΕΓ εὐθεῖαι, τοῦ μὲν ὀρθοῦ ποτὶ τὸν ἄξονα ἁ ΕΓ, τοῦ δὲ μὴ ὀρθοῦ ἁ ΖΑ, ἄξονες δὲ ἔστων τῶν τμαμάτων αἱ ΒΘ, ΚΛ ἴσαι ἀλλάλαις, κορυφαὶ δὲ τὰ Β, Λ· δεικτέον ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος, οὗ κορυφὰ τὸ Β, τῷ τμάματι τοῦ κωνοειδέος, οὗ κορυφὰ τὸ Λ.

Ἐπεὶ γὰρ ἀπὸ τᾶς αὐτᾶς ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς δύο τμάματά ἐντι ἀφῃρημένα τό τε ΑΛΖ καὶ τὸ ΕΒΓ, καί ἐντι αὐτῶν αἱ διάμετροι ἴσαι αἱ ΚΛ, ΒΘ, ἴσον ἐστὶ τὸ τρίγω-

4 μείζων DH : μεῖζον EG ‖ 7 ἔλασσόν Basil. : ἐλάσσων DEGH ‖ 24 τοῦ pr. add. Heiberg ‖ 28 αἱ pr. add. Heiberg.

Fig. 92.

est équivalent au triangle EΘB ; car on a démontré que le triangle AΛZ est équivalent au triangle EBΓ[1]. Abaissons donc la perpendiculaire AX sur le prolongement de KΛ. Puisque BΘ est égal à KΛ, EΘ sera égal à AX. Inscrivons donc dans le segment de sommet B un cône ayant même base et même axe que le segment, et dans le segment de sommet Λ un segment de cône de même base et de même axe que le segment ; abaissons du point Λ la perpendiculaire ΛN sur AZ ; ΛN sera donc la hauteur[2] du segment de cône de sommet Λ. Or le rapport entre le segment de cône de sommet Λ et le cône de sommet B est le produit du rapport des bases par le rapport des hauteurs[3] ; il est donc le produit du rapport entre l'aire de l'ellipse d'axe AZ et le cercle[4] de diamètre EΓ par le rapport de NΛ à BΘ. Mais le rapport entre l'aire de l'ellipse et ce cercle

1. Cf. prop. 3 et prop. 11, 1re partie.
2. Cf. *La quadr. de la parab.*, 17.
3. Cf. prop. 10.
4. Cf. prop. 11, 1re partie, et prop. 12.

Fig. 92.

νον τὸ ΑΛΚ τῷ ΕΘΒ· δέδεικται γὰρ ὅτι τὸ ΑΛΖ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΕΒΓ τριγώνῳ. Ἄχθω δὴ ἁ ΑΧ κάθετος ἐπὶ τὰν ΚΛ ἐκβληθεῖσαν. Καὶ ἐπεὶ ἴσαι αἱ ΒΘ, ΚΛ, ἴσαι καὶ αἱ ΕΘ, ΑΧ. Ἔστω δὴ ἐν τῷ τμάματι, οὗ κορυφὰ τὸ Β, κῶνος ἐγγεγραμμένος τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, ἐν δὲ τῷ τμάματι, οὗ κορυφὰ τὸ Λ, ἀπότμαμα κώνου τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, ἄχθω δὲ ἀπὸ τοῦ Λ κάθετος ἐπὶ τὰν ΑΖ ἁ ΛΝ· ἐσσεῖται δὴ αὕτα ὕψος τοῦ ἀποτμάματος τοῦ κώνου, οὗ κορυφὰ τὸ Λ. Τὸ δὲ ἀπότμαμα τοῦ κώνου, οὗ κορυφὰ τὸ Λ, καὶ ὁ κῶνος, οὗ κορυφὰ τὸ Β, τὸν συγκείμενον λόγον ἔχοντι ποτ' ἄλλαλα ἔκ τε τοῦ τῶν βάσιων λόγου καὶ ἐκ τοῦ τῶν ὑψέων· τὸν συγκείμενον οὖν ἔχοντι λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς τᾶς περὶ διάμετρον τὰν ΑΖ ποτὶ τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΕΓ, καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἁ ΝΛ ποτὶ τὰν ΒΘ. Τὸ δὲ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου

7 ἔχον EG : ἔχων DH ‖ 9 δὴ B : δι' DEGH ‖ 12 ἔχοντι EG : ἔχωντι DH.

est égal au rapport entre le rectangle ayant pour côtés les axes de l'ellipse et le carré sur ΕΓ[1]. Le rapport du segment de cône de sommet Λ au cône de sommet B est à son tour le produit du rapport de ΚΛ à ΕΘ par le rapport de ΝΛ à ΒΘ ; car ΚΛ est la moitié de l'axe de la base du segment de cône de sommet Λ, ΕΘ est la moitié du diamètre de la base du cône, et ΛΝ et ΒΘ sont les hauteurs de ces figures. Or le rapport de ΛΝ à ΒΘ est égal au rapport de ΛΝ à ΚΛ, puisque ΒΘ est égal à ΚΛ. Mais le rapport de ΛΝ à ΚΛ est aussi égal au rapport de ΧΑ à ΑΚ ; le rapport du segment de cône au cône est donc lui aussi égal au produit du rapport de ΑΚ à ΑΧ — puisque ΑΧ est égal à ΕΘ[2] — par le rapport de ΛΝ à ΒΘ ; mais l'un des rapports indiqués, celui de ΑΚ à ΑΧ, est égal au rapport de ΛΚ à ΛΝ[3] ; il s'ensuit que le rapport du segment de cône au cône est égal au produit du rapport de ΛΚ à ΛΝ par le rapport de ΛΝ à ΒΘ ; mais ΒΘ est égal à ΚΛ ; il est donc évident que le segment de cône de sommet Λ est équivalent au cône de sommet B. Il est donc manifeste que les segments de paraboloïde sont eux aussi équivalents, puisque l'un d'eux est équivalent aux trois demis du cône[4], l'autre aux trois demis du segment de cône, cône et segment de cône étant équivalents entre eux[5].

24.

Si on découpe d'un paraboloïde de révolution deux segments par des plans menés de quelque manière que ce soit, les segments ont entre eux le même rapport que les carrés sur leurs axes.

1. Cf. prop. 5.
2. Cf. prop. 12 et Eucl. I, 34.
3. Cf. Eucl. VI, 4.
4. Cf. prop. 21.
5. Cf. prop. 22.

κώνου τομᾶς ποτὶ τὸν αὐτὸν κύκλον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν διαμέτρων ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΕΓ [ἔχει καὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου, οὗ κορυφὰ τὸ Λ, πρὸς τὸν κῶνον, οὗ κορυφὰ τὸ Β, τὸν συγκείμενον λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἁ ΚΑ ποτὶ τὰν ΕΘ, καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἁ ΝΛ ποτὶ τὰν ΒΘ · ἁ μὲν γὰρ ΚΑ ἡμισέα ἐντὶ τᾶς διαμέτρου τᾶς βάσιος τᾶς τοῦ ἀποτμήματος τοῦ κώνου, οὗ κορυφὰ τὸ Λ, ἁ δὲ ΕΘ ἡμισέα τᾶς διαμέτρου τᾶς βάσεως τοῦ κώνου, αἱ δὲ ΛΝ, ΒΘ ὕψεά ἐντι αὐτῶν. Ἔχει δὲ ἁ ΛΝ ποτὶ τὰν ΒΘ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν καὶ ποτὶ τὰν ΚΛ, ἐπεὶ ἁ ΒΘ ἴση ἐστὶ τᾷ ΚΛ. Ἔχει δὲ καὶ ἁ ΛΝ ποτὶ τὰν ΚΛ, ὃν ἁ ΧΑ ποτὶ τὰν ΑΚ] · ἔχοι οὖν κα καὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου ποτὶ τὸν κῶνον τὸν συγκείμενον λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἁ ΑΚ ποτὶ τὰν ΑΧ · ἴσα γάρ ἐστιν ἁ ΑΧ τᾷ ΕΘ, καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἁ ΛΝ ποτὶ τὰν ΒΘ. Ὁ δὲ [ἐκ] τῶν εἰρημένων λόγων, ὁ τᾶς ΑΚ ποτὶ ΑΧ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τᾶς ΛΚ ποτὶ ΛΝ · τὸ ἄρα ἀπότμαμα ποτὶ τὸν κῶνον λόγον ἔχει, ὃν ἁ ΛΚ ποτὶ τὰν ΛΝ, καὶ ὃν ἔχει ἁ ΛΝ ποτὶ τὰν ΒΘ. Ἴσα δὲ ἁ ΒΘ τᾷ ΚΛ · δῆλον οὖν ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου, οὗ κορυφὰ τὸ Λ, τῷ κώνῳ, οὗ κορυφὰ τὸ Β. Φανερὸν οὖν ὅτι καὶ τὰ τμάματα ἴσα ἐντί, ἐπεὶ τὸ μὲν ἕτερον αὐτῶν ἡμιόλιόν ἐστι τοῦ κώνου, τὸ δὲ ἕτερον ἡμιόλιον τοῦ ἀποτμάματος τοῦ κώνου ἴσων ἐόντων.

κδ'.

Εἴ κα τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος δύο τμάματα ἀποτμαθέωντι ἐπιπέδοις ὁπωσοῦν ἀγμένοις, τὰ τμάματα ποτ' ἄλλαλα τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον τοῖς τετραγώνοις τοῖς ἀπὸ τῶν ἀξόνων αὐτῶν.

6 τᾶς διαμέτρου B : τᾶν διαμέτρων DEGH ‖ 7 βάσιος BGH : βάσιας DE ‖ 12 οὖν κα add. Heiberg ‖ 14 ΑΧ pr. B : ΑΓ mss. DEGH ‖ 16 ΛΚ Torellius : ΛΝ mss. BDEGH ‖ ΛΝ Torellius : ΛΚ mss. BDEGH ‖ 17 ΛΚ Torellius : ΛΝ mss. BDEGH ‖ ΛΝ Torellius : ΛΚ mss. BDEGH ‖ 28 αὐτῶν B : αὐτῆς DEGH.

Découpons en effet du paraboloïde de révolution deux segments au hasard, et soit K un segment de droite égal à l'axe de l'un des segments, Λ un segment de droite égal à l'axe de l'autre segment ; il faut montrer que les segments ont entre eux le même rapport que les carrés sur K et Λ.

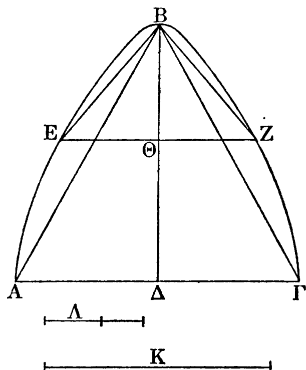


Fig. 93.

Coupons donc le paraboloïde par un plan passant par l'axe ; que son intersection avec le segment soit la parabole[1] ABΓ d'axe BΔ ; prenons BΔ égal à K et élevons en Δ le plan perpendiculaire à l'axe ; dès lors, le segment de paraboloïde ayant pour base le cercle de diamètre AΓ et pour axe BΔ est équivalent[2] au segment dont l'axe est égal à K. Si maintenant K est aussi égal à Λ, il est évident que les segments seront eux aussi équivalents l'un à l'autre, du moment que chacun d'eux est égal à la même grandeur ; de plus, les carrés sur K et Λ sont égaux, de façon que le rapport des segments sera égal au rapport des carrés sur les axes.

1. Cf. prop. 11, 1re partie.
2. Cf. prop. 23.

Ἀποτετμάσθω γὰρ τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος δύο τμάματα, ὡς ἔτυχεν, ἔστω δὲ τῷ μὲν τοῦ ἑτέρου τμάματος ἄξονι ἴσα ἁ Κ, τῷ δὲ τοῦ ἑτέρου ἴσα ἁ Λ· δεικτέον ὅτι τὰ τμάματα τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ποτ' ἄλλαλα τοῖς ἀπὸ τᾶν Κ, Λ τετραγώνοις.

Fig. 93.

Τμαθέντος δὴ τοῦ κωνοειδέος ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ τμάματος ἔστω τομὰ ἁ ΑΒΓ ὀρθογωνίου κώνου τομά, ἄξων δὲ ἁ ΒΔ, καὶ ἀπολελάφθω ἁ ΒΔ τᾷ Κ ἴσα, καὶ διὰ τοῦ Δ ἐπίπεδον ἐκβεβλήσθω ὀρθὸν ποτὶ τὸν ἄξονα· τὸ δὴ τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, ἄξονα δὲ τὰν ΒΔ ἴσον ἐστὶ τῷ τμάματι τῷ ἄξονα ἔχοντι ἴσον τᾷ Κ. Εἰ μὲν οὖν καὶ ἁ Κ ἴσα ἐστὶ τᾷ Λ, φανερὸν ὅτι καὶ τὰ τμάματα ἴσα ἐσσοῦνται ἀλλάλοις· ἑκάτερον γὰρ αὐτῶν ἴσον τῷ αὐτῷ· καὶ τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν Κ, Λ ἴσα· ὥστε τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον τὰ τμάματα τοῖς τετραγώνοις τοῖς ἀπὸ τῶν ἀξόνων.

2 τῷ G : τᾷ DEH ‖ 7 ἁ add. Basil. ‖ 10 δὴ Heiberg : δὲ BDEGH ‖ 13 Λ ms. B : Δ mss. DEGH ‖ 15 τᾶν Heiberg : τῶν DEGH ‖ Λ ms. B : Α mss. DEGH.

Mais si Λ n'est pas égal à K, que Λ soit égal à BΘ ; faisons passer par Θ le plan perpendiculaire à l'axe ; dès lors le segment ayant pour base le cercle de diamètre EZ et pour axe BΘ est équivalent au segment dont l'axe est égal à Λ. Inscrivons donc des cônes ayant pour bases les cercles de diamètres AΓ et EZ et pour sommet le point B ; le rapport du cône d'axe BΔ au cône d'axe BΘ est donc le produit du rapport du carré sur AΔ au carré sur ΘE par le rapport de ΔB à BΘ[1]. Or le rapport du carré sur ΔA au carré sur ΘE est égal au rapport[2] de BΔ à BΘ ; il s'ensuit que le rapport du cône d'axe BΔ au cône d'axe BΘ est égal au produit du rapport de ΔB à ΘB par le rapport de ΔB à BΘ ; mais ce produit est égal au rapport du carré sur ΔB au carré sur ΘB. Or le rapport du cône d'axe BΔ au cône d'axe ΘB est égal au rapport du segment de paraboloïde d'axe ΔB au segment d'axe ΘB[3], du moment que chacun (sc. de ces segments) vaut les trois demis (sc. du cône correspondant). D'autre part, le segment d'axe BΔ est équivalent au segment de paraboloïde dont l'axe est égal à K, et le segment d'axe ΘB est équivalent au segment de paraboloïde dont l'axe est égal à Λ, et BΔ est égal à K, ΘB égal à Λ ; il est donc évident que le rapport du segment de paraboloïde, dont l'axe est égal à K, au segment de paraboloïde, dont l'axe est égal à Λ, est égal au rapport du carré sur K au carré sur Λ.

1. Cf. prop. 10 et Eucl. XII, 2.
2. Cf. *La quadr. de la parab.*, prop. 3.
3. Cf. prop. 21.

Εἰ δὲ μὴ ἴσα ἐστὶν ἁ Λ τᾷ Κ, ἔστω ἁ Λ ἴσα τᾷ ΒΘ, καὶ διὰ τοῦ Θ ἐπίπεδον ἄχθω ὀρθὸν ποτὶ τὸν ἄξονα· τὸ δὴ τμᾶμα τὸ βάσιν ἔχον τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΕΖ, ἄξονα δὲ τὰν ΒΘ, ἴσον ἐστὶ τῷ τμάματι τῷ ἔχοντι ἄξονα ἴσον τᾷ Λ. Ἐγγεγράφθωσαν δὴ κῶνοι βάσιας μὲν ἔχοντες τοὺς κύκλους τοὺς περὶ διαμέτρους τὰς ΑΓ, ΕΖ, κορυφὰν δὲ τὸ Β σαμεῖον· ὁ δὴ κῶνος ὁ ἔχων ἄξονα τὰν ΒΔ ποτὶ τὸν κῶνον τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν ΒΘ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἁ ΑΔ ποτὶ τὰν ΘΕ δυνάμει, καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἁ ΔΒ ποτὶ τὰν ΒΘ μάκει. Ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ ΔΑ ποτὶ τὰν ΘΕ δυνάμει, τοῦτον ἔχει ἁ ΒΔ ποτὶ τὰν ΒΘ μάκει· ὁ ἄρα κῶνος ὁ ἔχων ἄξονα τὰν ΒΔ ποτὶ τὸν κῶνον τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν ΒΘ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἁ ΔΒ ποτὶ τὰν ΘΒ, καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἁ ΔΒ ποτὶ τὰν ΒΘ· οὗτος δέ ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΔΒ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΒ. Ὃν δὲ λόγον ἔχει ὁ κῶνος ὁ ἄξονα ἔχων τὰν ΒΔ ποτὶ τὸν κῶνον τὸν ἄξονα ἔχοντα τὰν ΘΒ, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον τὸ τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος τὸ ἄξονα ἔχον τὰν ΔΒ ποτὶ τὸ τμᾶμα τὸ ἄξονα ἔχον τὰν ΘΒ [ἑκάτερον γὰρ ἡμιόλιόν ἐστιν]. Καὶ ἔστιν τῷ μὲν τμάματι τῷ ἄξονα ἔχοντι τὰν ΒΔ ἴσον τὸ τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος τὸ ἄξονα ἔχον ἴσον τᾷ Κ, τῷ δὲ τμάματι τῷ ἄξονα ἔχοντι τὰν ΘΒ ἴσον τὸ τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος τὸ ἄξονα ἔχον ἴσον τᾷ Λ, καὶ τᾷ μὲν ΒΔ ἴσα ἁ Κ, τᾷ δὲ ΘΒ ἴσα ἁ Λ· δῆλον οὖν ὅτι τὸ τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος τὸ ἄξονα ἔχον ἴσον τᾷ Κ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ποτὶ τὸ τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος τὸ ἄξονα ἔχον ἴσον τᾷ Λ, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς Κ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς Λ.

2 δὴ Heiberg : δὲ BDEGH ‖ 5 τᾷ Heiberg : τῷ DEGH ‖ 7 δὴ Heiberg : δὲ DEGH ‖ 10 μάκει BG : μακῶν DEH ‖ 17 ΘΒ ms. B : ΕΒ mss. DEGH ‖ 18 ὁ add. Heiberg ‖ ΒΔ ms. B : ΚΔ mss. DEGH ‖ 22 τὸ add. Heiberg ‖ 23 ἴσον G : ἴσαν DEH ‖ 29 Λ mss. BG : Α mss. DEH.

25.

Tout segment d'un hyperboloïde de révolution découpé par un plan perpendiculaire à l'axe a au cône ayant même base et même hauteur que le segment le rapport qu'a la somme de l'axe du segment et du triple du segment ajouté à l'axe à la somme de l'axe du segment et du double du segment ajouté[1].

Soit un segment d'hyperboloïde de révolution découpé par un plan perpendiculaire à l'axe ; coupons-le par un autre plan, passant par l'axe ; que son intersection avec l'hyperboloïde soit l'hyperbole[2] ΑΒΓ ; que son intersection avec le plan découpant le segment soit la droite ΑΓ ; soit ΒΔ l'axe du segment, ΒΘ le segment ajouté, ΖΘ et ΖΗ des segments de droite égaux à ΒΘ. Il faut montrer que le rapport du segment d'hyperboloïde au cône ayant même base et même axe que le segment est égal au rapport de ΗΔ à ΖΔ.

Soit donc un cylindre ayant même base et même axe que le segment ; soient ΦΑ et ΓΥ des génératrices de ce cylindre ; soit aussi un cône Ψ ; que son rapport au cône ayant même base que le segment et pour axe ΒΔ soit égal au rapport de ΗΔ à ΔΖ ; je dis que le segment d'hyperboloïde est équivalent au cône Ψ.

En effet, s'il ne lui est pas équivalent, il sera ou bien supérieur ou inférieur. Qu'il soit d'abord, si possible, supérieur. Inscrivons donc au segment une figure solide et circonscrivons-lui en une autre, chacune composée

1. C'est-à-dire du segment joignant le sommet de l'hyperbole et le point de concours des asymptotes.

2. Cf. prop. 11, 2e partie.

κε′.

Πᾶν τμᾶμα ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος ἀποτετμαμένον ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ὕψος ἴσον τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ συναμφοτέραις ἴσα τῷ τε ἄξονι τοῦ τμάματος καὶ τᾷ τριπλασίᾳ τᾶς ποτεούσας τῷ ἄξονι ποτὶ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις τῷ τε ἄξονι τοῦ τμάματος καὶ τᾷ διπλασίᾳ τᾶς ποτεούσας τῷ ἄξονι.

Ἔστω τι τμᾶμα ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος ἀποτετμαμένον ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, καὶ τμαθέντος αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος ἁ τομὰ ἔστω αὐτοῦ μὲν τοῦ κωνοειδέος ἁ ΑΒΓ ἀμβλυγωνίου κώνου τομά, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτέμνοντος τὸ τμᾶμα ἁ ΑΓ εὐθεῖα, ἄξων δὲ ἔστω τοῦ τμάματος ἁ ΒΔ, ἁ δὲ ποτεοῦσα τῷ ἄξονι ἔστω ἁ ΒΘ καὶ τᾷ ΒΘ ἴσα ἁ ΖΘ καὶ ἁ ΖΗ. Δεικτέον ὅτι τὸ τμᾶμα ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει, ὃν ἁ ΗΔ ποτὶ τὰν ΖΔ.

Ἔστω δὴ κύλινδρος τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ ἔστωσαν αἱ ΦΑ, ΓΥ, ἔστω δὲ καὶ κῶνός τις, ἐν ᾧ τὸ Ψ, καὶ ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὰν ΒΔ τοῦτον ἐχέτω τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ ΗΔ ποτὶ τὰν ΔΖ· φαμὶ δὴ τὸ τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος ἴσον εἶμεν τῷ Ψ κώνῳ. Εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσον, ἤτοι μεῖζον ἢ ἔλασσόν ἐστιν. Ἔστω πρότερον, εἰ δυνατόν, μεῖζον. Ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸ τμᾶμα σχῆμα στερεόν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ

5 ἁ συναμφοτέραις Heiberg : συναμφοτέρᾳ BDEGH ‖ 13 ἁ ΑΓ ms. B : om. DEGH ‖ 14 ποτεοῦσα Heiberg: poteusa B ποτιοῦσα DE GH ‖ 16 τὸν alt. Torellius : τὰν DEGH ‖ 21 δὲ Heiberg : δὴ DEGH etiam B ‖ 23 ΗΔ ms. B : ΚΔ mss. DEGH ‖ 27 ἄλλο GH : ἄλλῳ DE.

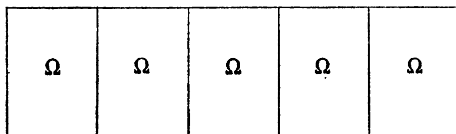


Fig. 94.

de cylindres de même hauteur, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite soit inférieur[1] à l'excès du segment d'hyperboloïde sur le cône Ψ ; prolongeons les plans (sc. de base) de tous les cylindres jusqu'à la surface du cylindre ayant pour base le cercle de diamètre ΑΓ et pour axe ΒΔ ; le cylindre entier sera donc décomposé en cylindres dont le nombre est égal à celui des cylindres dans la figure circonscrite et dont la grandeur est égale à celle du plus grand de ces derniers. Puisque l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite est inférieur à l'excès du segment sur le cône Ψ et que la figure circonscrite est supérieure au segment, il est évident que la figure inscrite est elle aussi supérieure au cône Ψ. Soit ΒΡ égal au tiers de ΒΔ ; ΗΔ sera donc triple[2] de ΘΡ. Puisque, de plus, le rapport du cylindre ayant pour base le cercle de diamètre ΑΓ et pour axe ΒΔ au cône

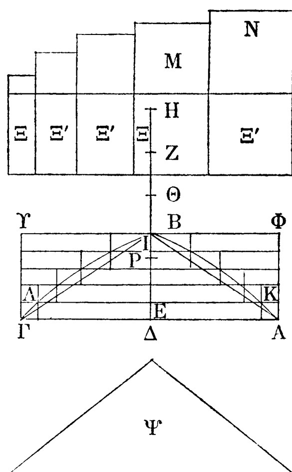


Fig. 95.

1. Cf. prop. 19.
2. Comme l'indique la figure, ΗΔ = ΗΒ+ΒΔ ; mais ΗΒ = 3 ΘΒ, et ΒΔ = 3 ΒΡ, d'où ΗΔ = 3 (ΘΒ+ΒΡ).
D'autre part, ΘΡ = ΘΒ+ΒΡ, d'où ΗΔ = 3 ΘΡ ; cf. Heiberg, I, p. 375.

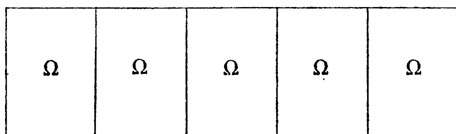


Fig. 94.

κυλίνδρων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ Ψ κώνου, διάχθω δὲ τὰ ἐπίπεδα πάντων τῶν κυλίνδρων ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, ἄξονα δὲ τὰν ΒΔ· ἐσσεῖται δὴ ὅλος ὁ κύλινδρος διῃρημένος εἰς κυλίνδρους τῷ μὲν πλήθει ἴσους τοῖς κυλίνδροις τοῖς ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι, τῷ δὲ μεγέθει ἴσους τῷ μεγίστῳ αὐτῶν. Καὶ ἐπεὶ ἐλάσσονι ὑπερέχει τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου ἢ τὸ τμᾶμα τοῦ Ψ κώνου, καὶ μεῖζόν ἐστι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ τμάματος, δῆλον ὅτι καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μεῖζόν ἐστι τοῦ Ψ κώνου. Ἔστω δὴ τρίτον μέρος τᾶς ΒΔ ἁ ΒΡ· ἐσσεῖται οὖν ἁ ΗΔ τριπλασία τᾶς ΘΡ. Καὶ ἐπεὶ ὁ μὲν κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, ἄξονα

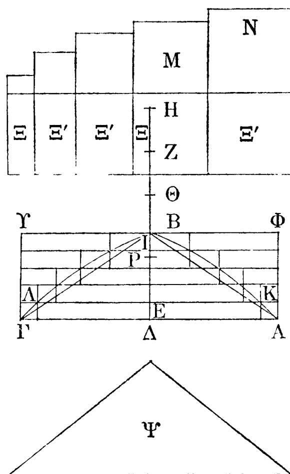


Fig. 95.

4 δὲ Heiberg : δὴ BDEGH ‖ 15 ἢ B : om. DEGH ‖ 23 ἐσσεῖται BEGH : ἕπειται D.

ayant même base et même axe est égal au rapport[1] de HΔ à ΘP, et que le rapport du cône indiqué au cône Ψ est égal au rapport de ZΔ à HΔ, du moment qu'il y a ici une proportion irrégulière de trois grandeurs[2], le rapport du cylindre indiqué au cône Ψ sera égal au rapport de ZΔ à ΘP[3]. Soient des segments de droite Ξ, d'un nombre égal à celui des segments de BΔ, et égaux, chacun, à ZB ; appliquons à chacun d'eux une aire excédant d'un carré ; que le plus grand soit égal au rectangle de côtés ZΔ et ΔB, que le plus petit soit égal au rectangle de côtés ZI et IB, que les côtés des figures excédentes se dépassent les uns les autres de la même longueur[4], puisque les segments qui leur sont égaux sur BΔ se dépassent les uns les autres de la même longueur ; que le côté de la plus grande figure excédente, soit N, soit égal à BΔ, le côté de la plus petite égal à BI ; soient aussi d'autres aires, marquées par Ω, d'un nombre égal à celui de ces figures, mais dont chacun a la grandeur de la plus grande des figures appliquées, c'est-à-dire du rectangle de côtés ZΔ et ΔB ; le rapport du cylindre ayant pour base le cercle de diamètre ΛΓ et pour axe ΔE au cylindre ayant pour base le cercle de diamètre KΛ et pour axe ΔE est donc égal au rapport du carré sur ΔA au carré sur KE[5] ; or ce rapport est le même que celui du rectangle de côtés ZΔ et BΔ au rectangle de côtés ZE et BE ; car cette proposition est vraie pour toute hyperbole[6], du moment que le double de la droite ajoutée à l'axe, c'est-à-dire de la droite menée du centre, est le côté transverse de la

1. Cf. Eucl. XII, 10 et prop. 10.
3. Cf. Eucl. V, def. 18.
3. Cf. Eucl. V, 23.
4. Cf. Eucl. VI, 29.
5. Cf. Eucl. XII, 11.
6. Cf. Apollonius, *Con.* I, 21.

δὲ τὰν ΒΔ, ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ ΗΔ ποτὶ τὰν ΘΡ, ἔχει δὲ καὶ ὁ εἰρημένος κῶνος ποτὶ τὸν Ψ κῶνον, ὃν ἁ ΖΔ ποτὶ τὰν ΗΔ, ἕξει ἄρα μεγεθέων τριῶν ἀνομοίως τῶν λόγων τεταγμένων τὸν αὐτὸν λόγον ὁ κύλινδρος ὁ εἰρημένος ποτὶ τὸν Ψ κῶνον, ὃν ἁ ΖΔ ποτὶ τὰν ΘΡ. Ἔστωσαν δὲ γραμμαὶ κείμεναι, ἐφ᾽ ἆν τὰ Ξ, τῷ μὲν πλήθει ἴσαι τοῖς τμαμάτεσσιν τοῖς ἐν τᾷ ΒΔ εὐθείᾳ, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα ἴσα τᾷ ΖΒ, καὶ παρ᾽ ἑκάσταν αὐτᾶν παραπεπτωκέτω χωρίον ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ τὸ μὲν μέγιστον ἔστω ἴσον τῷ ὑπὸ ΖΔΒ, τὸ δὲ ἐλάχιστον ἴσον τῷ ὑπὸ ΖΙΒ, αἱ δε πλευραὶ τῶν ὑπερβλημάτων τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχόντων [καὶ γὰρ αἱ ἴσαι αὐταῖς αἱ ἐπὶ τᾶς ΒΔ εὐθείας τῷ ἴσῳ ἀλλάλων ὑπερέχουσιν], καὶ ἔστω ἁ μὲν τοῦ μεγίστου ὑπερβλήματος πλευρά, ἐφ᾽ ἆς τὸ Ν, ἴσα τᾷ ΒΔ, ἁ δὲ τοῦ ἐλαχίστου ἴσα τᾷ ΒΙ, ἔστω δὲ καὶ ἄλλα χωρία, ἐν οἷς τὸ Ω, τῷ μὲν πλήθει ἴσα τούτοις, τῷ δὲ μεγέθει ἕκαστον ἴσον τῷ μεγίστῳ τῷ ὑπὸ τᾶν ΖΔΒ· ὁ δὴ κύλινδρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, ἄξονα δὲ τὰν ΔΕ, ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν βάσιν μὲν ἔχοντα τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΚΛ, ἄξονα δὲ τὰν ΔΕ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ΔΑ ποτὶ τὰν ΚΕ δυνάμει· οὗτος δέ ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΖΔ, ΒΔ ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΖΕ, ΒΕ· ἐν πάσᾳ γὰρ τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομᾷ τοῦτο συμβαίνει [ἁ γὰρ διπλασία τᾶς ποτεούσας, τουτέστι τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου, πλαγία ἐστὶ τοῦ εἴδους πλευρά]. Καὶ ἔστι τῷ μὲν

2 ἄξονα DEGH : conum B || 4 μεγεθέων τριῶν Heiberg : lac. B ἀμετρίᾳ DEGH || ἀνομοίως Commandinus : ὁμοίως BDEGH || 5 τεταγμένων Commandinus : τεταραγμένων BEH τεταραγμένον DG || 6 ὃν B : om. DEGH || ΘΡ Basil. : ΘΟ mss. DEGH || 7 δὲ Heiberg : δὲ αἱ DEGH || 8 τᾷ Torellius : τῷ DEGH || 11 ἴσον pr. et alt. Basil. : ἐν BDEGH || 12 ΖΙΒ Heiberg : ΖΟΒ mss. DEGH || 15 τὸ Ν mss. GH : τὸν BDE.

figure. Or le rectangle de côtés ZΔ et BΔ est égal à l'aire ΞN, et le rectangle de côtés ZE et BE égal à l'aire ΞM, puisque Ξ est égal à ZB, M à BE, N à BΔ ; il s'ensuit que le rapport du cylindre ayant pour base le cercle de diamètre AΓ et pour axe ΔE au cylindre ayant pour base le cercle de diamètre KΛ et pour axe ΔE sera égal au rapport de l'aire Ω à l'aire ΞM. On démontrera de la même manière que le rapport de chacun des autres cylindres du cylindre entier, ayant leurs axes égaux à ΔE, au cylindre de la figure inscrite, ayant le même axe, est égal au rapport de l'aire Ω à l'aire qui lui correspond parmi les aires appliquées à Ξ et excédents d'un carré. Il y a donc une suite de grandeurs, à savoir les cylindres contenus dans le cylindre entier, dont chacun à son axe égal à ΔE, et une autre suite de grandeurs, à savoir les aires Ω, en même nombre que les cylindres, et ces deux suites sont telles que les grandeurs qui y sont contenues ont deux à deux le même rapport, puisque les cylindres sont égaux entre eux et les aires Ω égales entre elles ; parmi les cylindres, certains sont en rapport avec d'autres cylindres, à savoir avec ceux de la figure inscrite, sauf le dernier, qui n'a de rapport avec aucune figure ; parmi les aires Ω, certaines sont en rapport avec d'autres aires, à savoir avec celles qui sont appliquées à Ξ et qui excèdent d'un carré, les aires qui se correspondent ayant toutes le même rapport, sauf la dernière, qui n'a de rapport avec aucune figure ; il est donc évident que le rapport entre la somme des cylindres dans le cylindre entier et la somme des cylindres dans la figure inscrite sera

ὑπὸ τᾶν ΖΔ, ΒΔ περιεχομένῳ ἴσον τὸ ΞΝ χωρίον, τῷ δὲ ὑπὸ τᾶν ΖΕ, ΒΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ΞΜ · ἁ γὰρ Ξ ἴσα ἐστὶ τᾷ ΖΒ, ἁ δὲ Μ τᾷ ΒΕ, ἁ δὲ Ν τᾷ ΒΔ · ὁ ἄρα κύλινδρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, ἄξονα δὲ τὰν ΔΕ, ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν βάσιν ἔχοντα τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΚΛ, ἄξονα δὲ τὰν ΔΕ, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, ὃν τὸ Ω χωρίον ποτὶ τὸ ΞΜ. Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ τῶν ἄλλων κυλίνδρων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἄξονα ἔχων τὰν ἴσαν τᾷ ΔΕ ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα τὸν αὐτὸν ἄξονα τοῦτον ἔχων τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ Ω χωρίον ποτὶ τὸ ὁμόλογον τῶν παρὰ τὰν Ξ παραπεπτωκότων ὑπερϐαλλόντων τετραγώνῳ. Ἔστιν δή τινα μεγέθεα, οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ὧν ἕκαστος ἄξονα ἔχει ἴσον τᾷ ΔΕ, καὶ ἄλλα μεγέθεα, τὰ χωρία, ἐν οἷς τὸ Ω, ἴσα τούτοις τῷ πλήθει, κατὰ δύο μεγέθεα τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, ἐπεὶ οἵ τε κύλινδροι ἴσοι ἐντὶ ἀλλάλοις καὶ τὰ Ω χωρία ἴσα ἀλλάλοις, λέγονται δὲ τῶν τε κυλίνδρων τινὲς ποτὶ ἄλλους κυλίνδρους τοὺς ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, ὁ δὲ ἔσχατος οὐδὲ ποθ' ἓν λέγεται, καὶ τῶν χωρίων, ἐν οἷς τὰ Ω, ποτ' ἄλλα χωρία τὰ παρὰ τὰν Ξ παραπεπτωκότα ὑπερϐάλλοντα εἴδει τετραγώνῳ, τὰ [δὲ] ὁμόλογα ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις, τὸ δὲ ἔσχατον οὐδὲ ποθ' ἓν λέγεται · δῆλον οὖν ὅτι καὶ πάντες οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ποτὶ πάντας τοὺς κυλίνδρους τοὺς ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, ὃν

1 ΞΝ add. Basil. : om. BDEGH ‖ 2 ἴσον ἐστὶ τὸ ΞΜ · ἁ γὰρ Ξ add. Basil. ‖ 3 M ms. B : N mss. DEGH ‖ 12 ὁμόλογον B : ὃν λόγον DEGH ‖ τῶν Torellius : τᾶν DEGH ‖ παρὰ Torellius : περὶ BDEGH ‖ 12-13 παραπεπτωκότων Torellius : περιπεπτωκότων DEGH ‖ 13 ὑπερϐαλλόντων Heiberg : ὑπερϐάλλον τῷ BDEGH ‖ 19 τοὺς add. Heiberg ‖ 20 ποθ' ἓν B : πόθεν DEGH ‖ 23 αὐτοῖς add. Nizzius ‖ ποθ' ἓν B : πόθεν DEGH ‖ 25 τῷ add. Heiberg.

égal au rapport entre la somme des aires Ω et la somme des aires appliquées sauf la plus grande[1]. Mais on a démontré que le rapport de la somme des aires Ω à la somme des aires appliquées sauf la plus grande est supérieur au rapport entre la somme de N et de Ξ et la somme de la moitié de Ξ et du tiers de N[2] ; le rapport du cylindre entier à la figure inscrite est par conséquent lui aussi supérieur au rapport de ZΔ à ΘP, qui est, comme nous l'avons montré, le rapport entre le cylindre entier et le cône Ψ ; le cylindre entier a donc à la figure inscrite un plus grand rapport qu'au cône Ψ. Le cône Ψ est donc supérieur à la figure inscrite[3], ce qui est impossible, puisqu'on a montré que la figure inscrite est supérieure au cône Ψ. Le segment d'hyperboloïde n'est donc pas supérieur au cône Ψ.

Mais il ne lui est pas non plus inférieur. Qu'il le soit en effet, si possible. Inscrivons donc de nouveau au segment une figure solide et circonscrivons-lui en une autre, chacune étant composée de cylindres de même hauteur, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite soit inférieur à l'excès du cône sur le segment, les autres constructions étant les mêmes que plus haut. Du moment donc que la figure inscrite est inférieure au segment et que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite est inférieur à l'excès du cône Ψ sur le segment, il est évident que la figure circonscrite est elle aussi inférieure au cône Ψ. De nouveau donc le rapport du premier des cylindres contenus dans le cylindre entier, ayant pour axe ΔE, au premier cylindre de la figure circonscrite, d'axe ΔE, est égal au rapport de l'aire Ω à la somme des aires Ξ et N, — et Ω est égal à la somme de Ξ et N —, et le rapport de chacun des autres cylindres du cylindre entier, ayant des axes égaux à ΔE, au cylindre de même rang de la figure circonscrite, ayant le même axe,

1. Cf. prop. 1.
2. Cf. prop. 2.
3. Cf. Eucl. V, 8.

πάντα τὰ Ω χωρία ποτὶ πάντα τὰ παραβλήματα χωρὶς τοῦ μεγίστου. Δέδεικται δὲ ὅτι πάντα τὰ Ω χωρία ποτὶ πάντα τὰ παραβλήματα χωρὶς τοῦ μεγίστου μείζω λόγον ἔχοντι ἢ ὃν ἁ ΝΞ ποτὶ τὰν ἴσαν συναμφοτέραις τᾷ τε ἡμισείᾳ τᾶς Ξ καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τᾶς Ν· ὥστε καὶ ὅλος ὁ κύλινδρος ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μείζονα ἔχει λόγον ἢ ὃν ἁ ΖΔ ποτὶ τὰν ΘΡ· ὃν ὁ ὅλος κύλινδρος ἔχων ἐδείχθη ποτὶ τὸν Ψ κῶνον· μείζονα οὖν ἔχει λόγον ὁ ὅλος κύλινδρος ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἢ ποτὶ τὸν Ψ κῶνον. Ὥστε μείζων ἐστὶν ὁ Ψ κῶνος τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος· ὅπερ ἀδύνατον· ἐδείχθη γὰρ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μεῖζον τοῦ Ψ κώνου· οὐκ ἄρα μεῖζον τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ Ψ κώνου.

Οὐδὲ τοίνυν ἔλασσον. Ἔστω γάρ, εἰ δυνατόν, ἔλασσον. Πάλιν οὖν ἐγγεγράφθω εἰς τὸ τμᾶμα σχῆμα στερεόν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει ὁ κῶνος τοῦ τμάματος, καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ κατεσκευάσθω. Ἐπεὶ οὖν ἔλασσόν ἐστι τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ τμάματος, καὶ ἐλάσσονι ὑπερέχει τὸ περιγεγραμμένον τοῦ ἐγγεγραμμένου ἢ ὁ Ψ κῶνος τοῦ τμάματος, δῆλον ὅτι καὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσόν ἐστι τοῦ Ψ κώνου. Πάλιν δὴ ὅ τε κύλινδρος ὁ πρῶτος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ὁ ἔχων ἄξονα τὰν ΔΕ ποτὶ τὸν πρῶτον κύλινδρον τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν ΔΕ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ Ω χωρίον ποτὶ τὸ ΞΝ [ἴσον γὰρ ἑκάτερον], καὶ τῶν ἄλλων κυλίνδρων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἄξονα ἐχόντων τὰν ἴσαν τᾷ ΔΕ ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι κατ' αὐτὸν ἐόντα καὶ ἄξονα

15 τμᾶμα BDGH : om. E ‖ σχῆμα BE : om. DGH ‖ 29 ἐχόντων τὰν Heiberg : ἔχων τὰν E ἐχόντων DGH.

est égal au rapport de l'aire Ω à l'aire qui lui correspond parmi les aires appliquées à Ξ, augmentée de l'excès, puisque chacun des cylindres circonscrits, sauf le plus grand, est égal à chacun des cylindres inscrits, y compris le plus grand ; le rapport du cylindre entier à la figure circonscrite sera donc égal au rapport de la somme des aires Ω à la somme des aires appliquées augmentées des figures excédentes[1]. Mais on a démontré aussi que le rapport de la somme des aires Ω à la somme des autres aires est inférieur[2] au rapport de la somme de Ξ et de N à la somme de la moitié de Ξ et du tiers de N ; par conséquent le rapport du cylindre entier à la figure circonscrite est inférieur au rapport de ZΔ à ΘP. Mais le rapport de ZΔ à ΘP est égal au rapport du cylindre entier au cône Ψ ; le rapport du même cylindre à la figure circonscrite est donc inférieur à son rapport au cône Ψ. La figure circonscrite est par conséquent supérieure[3] au cône Ψ, ce qui est impossible ; car on avait démontré que la figure circonscrite est inférieure au cône Ψ. Il s'ensuit que le segment d'hyperboloïde n'est pas inférieur au cône Ψ. Mais du moment qu'il ne lui est ni supérieur ni inférieur, la proposition est démontrée.

26.

Même si le segment d'hyperboloïde est découpé par un plan non perpendiculaire à l'axe, son rapport au segment du cône ayant même base et même axe que le segment sera égal au rapport entre la somme de l'axe du segment et du triple du segment ajouté et la somme de l'axe et du double du segment ajouté.

1. Cf. prop. 1.
2. Cf. prop. 2.
3. Cf. Eucl. V, 8.

ἔχοντα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἕξει τὸν λόγον, ὃν τὸ Ω χωρίον ποτὶ τὸ ὁμόλογον τῶν παρὰ τὰν Ξ παραβλημάτων σὺν τῷ ὑπερβλήματι, διὰ τὸ ἕκαστον τῶν περιγεγραμμένων χωρὶς τοῦ μεγίστου ἴσον εἶμεν ἑκάστῳ τῶν ἐγγεγραμμένων σὺν τῷ μεγίστῳ· ἕξει οὖν καὶ ὁ ὅλος κύλινδρος ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν πάντα τὰ Ω χωρία ποτὶ τὰ παραβλήματα σὺν τοῖς ὑπερβλημάτεσσιν. Δέδεικται δὲ πάλιν πάντα τὰ Ω χωρία ποτὶ πάντα τὰ ἕτερα ἐλάσσω λόγον ἔχοντα τοῦ ὃν ἔχει ἁ ΞΝ ποτὶ τὰν ἴσαν συναμφοτέραις τᾷ τε ἡμισέᾳ τᾶς Ξ καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τᾶς Ν· ὥστε καὶ ὅλος ὁ κύλινδρος ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἐλάσσονα λόγον ἕξει ἢ ἁ ΖΔ ποτὶ τὰν ΘΡ. Ἀλλ' ὡς ἁ ΖΔ ποτὶ τὰν ΘΡ, ὁ ὅλος κύλινδρος ποτὶ τὸν Ψ κῶνον· ἐλάσσονα οὖν λόγον ἔχει ὁ αὐτὸς κύλινδρος ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἢ ποτὶ τὸν Ψ. Ὥστε μεῖζόν ἐστι τὸ περιγεγραμμένον τοῦ Ψ κώνου· ὅπερ ἀδύνατον· ἐδείχθη γὰρ ἔλαττον ἐὸν τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ Ψ κώνου. Οὐκ ἄρα ἔλασσόν ἐστι τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ Ψ κώνου. Ἐπεὶ δὲ οὔτε μεῖζον οὔτε ἔλασσόν ἐστιν, δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

κϛ΄.

Καὶ τοίνυν εἴ κα μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα τῷ ἐπιπέδῳ ἀποτμαθῇ τὸ τμᾶμα τοῦ ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος, ποτὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τὸ βάσιν ἔχον τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἕξει τὸν λόγον, ὃν ἁ συναμφοτέραις ἴσα τῷ τε ἄξονι τοῦ τμάματος καὶ τᾷ τριπλασίᾳ τᾶς ποτεούσας τῷ ἄξονι ποτὶ τὰν ἴσαν συναμφοτέραις τῷ τε ἄξονι καὶ τᾷ διπλασίᾳ τᾶς ποτεούσας τῷ ἄξονι.

1 τὸν alt. add. Basil. ‖ ὃν B Basil. : om. DEGH ‖ 4 εἶμεν Torellius : ἐστὶν DE εἶναι GH ‖ 15 τὸν Heiberg : τὸ DEGH ‖ 24 τὸ B τοῦ DEGH ‖ ἔχον BD : ἔχοντος EGH ‖ 25-26 ἁ συναμφοτέραις Basil. : simul utrique B αἱ συναμφότεραι DEGH.

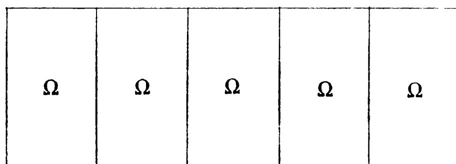


Fig. 96.

Soit en effet un segment d'hyperboloïde découpé par un plan de la manière indiquée ; coupons cette figure par un autre plan, passant par l'axe et perpendiculaire au plan découpant le segment ; que son intersection avec la figure soit l'hyperbole[1] ΑΒΓ ; que son intersection avec le plan découpant le segment soit la droite ΓΑ ; soit Θ le sommet du cône asymptotique de l'hyperboloïde ; menons par Β parallèlement à ΑΓ la tangente ΦΥ à l'hyperbole, point de contact Β, et prolongeons la droite joignant Θ à Β ; cette droite divise donc ΑΓ en deux parties égales, et le sommet du segment sera Β, son axe ΒΔ, le segment ajouté ΒΘ ; soient ΘΖ et ΖΗ deux segments de droite égaux à ΒΘ ; faisons passer par ΦΥ un plan parallèle au plan de trace ΑΓ ; il sera donc tangent[2] à l'hyperboloïde en Β. De plus, puisque le plan passant par ΑΓ coupe l'hyperboloïde sans être perpendiculaire à l'axe, la section sera une ellipse ; soit ΓΑ son grand axe[3] ; nous avons donc une ellipse décrite autour de son axe ΑΓ et une droite ΒΔ issue de son centre et située dans un plan passant par son axe et perpendiculaire au plan de l'ellipse ; il est par conséquent possible de trouver un cylindre ayant son axe sur la droite ΒΔ et tel que

1. Cf. prop. 11, 2e partie.
2. Cf. prop. 16, 2e partie.
3. Cf. prop. 13.

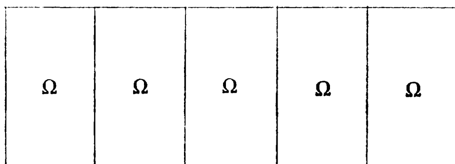


Fig. 96.

Ἔστω γὰρ τμᾶμα ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος ἀποτετμαμένον ἐπιπέδῳ, ὡς εἴρηται, τμαθέντος δὲ ἐπιπέδῳ τοῦ σχήματος ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἀποτετμακὸς τὸ τμᾶμα τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἁ ΑΒΓ ἀμβλυγωνίου κώνου τομά, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτετμακότος τὸ τμᾶμα ἁ ΓΑ εὐθεῖα, κορυφὰ δὲ ἔστω τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδὲς τὸ Θ σαμεῖον, καὶ ἄχθω διὰ τοῦ Β παρὰ τὰν ΑΓ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς ἁ ΦΥ, ἐπιψαυέτω δὲ κατὰ τὸ Β, καὶ ἀπὸ τοῦ Θ ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευχθεῖσα ἐκβεβλήσθω· τεμεῖ δὴ αὕτα δίχα τὰν ΑΓ, καὶ ἐσσεῖται κορυφὰ μὲν τοῦ τμάματος τὸ Β σαμεῖον, ἄξων δὲ ἁ ΒΔ, ἁ δὲ ποτεοῦσα τῷ ἄξονι ἁ ΒΘ· τᾷ δὲ ΒΘ ἴσα ἔστω ἅ τε ΘΖ καὶ ἁ ΖΗ, ἀπὸ δὲ τᾶς ΦΥ ἐπίπεδον ἀνεστακέτω τι παράλληλον τῷ κατὰ τὰν ΑΓ· ἐπιψαύσει δὴ τοῦ κωνοειδέος κατὰ τὸ Β. Καὶ ἐπεὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ κατὰ τὰν ΑΓ οὐκ ἐὸν ὀρθὸν ποτὶ τὸν ἄξονα τετμάκει τὸ κωνοειδές, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ὀξυγωνίου κώνου τομά, διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ μείζων ἁ ΓΑ· ἐούσας δὴ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ καὶ τᾶς ΒΔ γραμμᾶς ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀνεστακούσας ἐν ἐπιπέδῳ, ὅ ἐστιν ἀπὸ τᾶς διαμέτρου ὀρθὸν ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστιν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, δυνατόν ἐστι κύλινδρον εὑρεῖν τὸν ἄξονα ἔχοντα ἐπ' εὐθείας τᾷ ΒΔ, οὗ ἐν τᾷ

10 δὴ αὕτα B : διὰ τὰ αὐτὰ DEGH ‖ 15 δὴ Heiberg : δὲ BDEGH ‖ ἐπεὶ τὸ Basil. : ἐσσεῖ τὸ DE ἐσσεῖται GH ‖ 18 ἐούσας δὴ Basil. : ἐοῦσα ἄλλη DEGH ‖ 19 τομᾶς Basil. : τομὰ BDEGH ‖ 23 εὐθείας B : εὐθειῶν DEGH.

l'ellipse d'axe ΑΓ soit dans sa surface[1]. Ce cylindre étant trouvé, nous aurons un tronc de cylindre ayant même base et même axe que le segment ; son autre base sera le plan passant par ΦΥ. Mais il sera possible aussi de trouver un cône ayant pour sommet le point B et tel que l'ellipse décrite autour de ΑΓ comme axe soit située dans sa surface[2]. Ce cône étant trouvé, nous aurons donc aussi un segment de cône ayant même base et même axe que le tronc de cylindre et le segment d'hyperboloïde ; il faut montrer que le rapport entre le segment d'hyperboloïde et le segment de cône indiqué est égal au rapport de ΗΔ à ΔΖ.

En effet, que le rapport de ΗΔ à ΔΖ soit égal au rapport d'un cône Ψ au segment de cône. Si donc le segment d'hyperboloïde n'est pas équivalent au cône Ψ, qu'il lui soit, si cela est possible, supérieur. Inscrivons donc dans le segment d'hyperboloïde une figure solide et circonscrivons-lui en une autre, chacune étant composée de troncs de cylindre ayant même hauteur, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite soit inférieur à l'excès du segment d'hyperboloïde sur le cône Ψ[3]. Du moment donc que l'excès de la figure circonscrite, qui est supérieure au segment, sur la figure inscrite est inférieur à l'excès du segment sur le cône Ψ, il est évident que la figure inscrite est supérieure au cône Ψ. Prolongeons donc les plans (sc. de base) de tous les troncs de cylindre inscrits

1. Cf. prop. 9.
2. Cf. prop. 8.
3. Cf. prop. 20.

ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ ἁ περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ. Εὑρεθέντος οὖν ἐσσεῖταί τις κυλίνδρου τόμος τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, ἁ δὲ ἑτέρα βάσις αὐτοῦ ἐσσεῖται τὸ ἐπίπεδον τὸ κατὰ τὰν ΦΥ. Πάλιν δὲ καὶ κῶνον εὑρεῖν δυνατόν ἐστι κορυφὰν ἔχοντα τὸ Β σαμεῖον, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ ἁ περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ. Εὑρεθέντος οὖν καὶ ἀπότμαμά τι ἐσσεῖται κώνου βάσιν ἔχον τὰν αὐτὰν τῷ τε τόμῳ καὶ τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν· δεικτέον ὅτι τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα ποτὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τὸ εἰρημένον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ΗΔ ποτὶ τὰν ΔΖ.

Ὃν γὰρ ἔχει λόγον ἁ ΗΔ ποτὶ τὰν ΔΖ, τοῦτον ἐχέτω ὁ Ψ κῶνος ποτὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου. Εἰ οὖν μή ἐστιν ἴσον τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τῷ κώνῳ τῷ Ψ, ἔστω, εἰ δυνατόν ἐστιν, μεῖζον. Ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα σχῆμα στερεόν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρου τόμων ἴσον ὕψος ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ Ψ κώνου. Ἐπεὶ οὖν τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα μεῖζον ἐὸν τοῦ τμάματος ἐλάσσονι ὑπερέχει τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἢ τὸ τμᾶμα τοῦ Ψ κώνου, δῆλον ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ Ψ κώνου. Διάχθω δὴ τὰ ἐπίπεδα τῶν τόμων τῶν ἐγγεγραμμένων ἐν τῷ τμάματι πάντων ἔστε

1 ἁ alt. add. Heiberg || 7 ἁ alt. add. Heiberg || 8-9 καὶ ἀπότμαμά τι ἐσσεῖται κώνου βάσιν ἔχον τὰν αὐτὰν τῷ τε τόμῳ καὶ τῷ τμάματι add. Commandinus et Heiberg || 13 γὰρ BE : γοῦν DEGH || ἁ ΗΔ add. Torellius || ἐχέτω B : ἔχει DEBH || 15-16 ἔστω, εἰ δυνατόν ἐστιν B : εἰ γὰρ μὴ δυνατόν ἐστιν DEGH εἰ δυνατόν, ἔστω Commandinus εἰ μέν ἐστι δυνατόν, ἔστω Torellius || 17 ἄλλο BG : ἄλλῳ DEH || 18 κυλίνδρου BDEGH : κυλίνδρων Basil. || 22 σχήματος Basil. : τμήματος BDEGH || 25 τμάματι Heiberg : σχήματι BDEGH || ἔστε Torellius : ἐσσεῖται DEGH.

dans le segment jusqu'à la surface du tronc de cylindre ayant même base et même axe que le segment; prenons BP égal au tiers de BΔ et répétons les autres constructions antérieures. De nouveau donc le rapport du premier des troncs contenus dans le tronc entier, ayant pour axe ΔE, au premier des troncs de la figure inscrite, ayant pour axe ΔE, est égal au rapport du carré sur AΔ au carré sur KE ; car les troncs de cylindre de même hauteur ont entre eux le même rapport que leurs bases[1], et leurs bases, étant des ellipses semblables[2], ont entre elles le même rapport que les carrés sur leurs axes correspondants[3]. Or le rapport du carré sur AΔ au carré sur KE est égal au rapport du rectangle de côtés ZΔ et ΔB au rectangle de côtés ZE et EB[4], puisque ZΔ passe par le point de concours Θ des asymptotes, et que AΔ et KE sont parallèles à la tangente en B; or le rectangle de côtés ZΔ et ΔB est équivalent à l'aire Ω, et le rectangle de côtés ZE et EB est équivalent à la somme des aires Ξ et M. Le rapport du premier tronc du tronc de cylindre entier, ayant pour

Fig. 97.

1. Cf. prop. 10.
2. Cf. prop. 14, coroll.
3. Cf. prop. 6, coroll.
4. Cf. Apollonius, *Con.*, I, 21.

ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ τόμου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, καὶ ἅ τε ΒΡ τρίτον μέρος ἔστω τᾶς ΒΔ, καὶ τἆλλα τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον κατεσκευάσθω. Πάλιν δὴ ὁ πρῶτος τόμος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ τόμῳ ὁ ἔχων ἄξονα τὰν ΔΕ ποτὶ τὸν πρῶτον τόμον τῶν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν ΔΕ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΔ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΚΕ· οἱ γὰρ τόμοι οἱ ἴσον ὕψος ἔχοντες τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ποτ' ἀλλάλους, ὅνπερ αἱ βάσιες αὐτῶν, αἱ δὲ βάσιες αὐτῶν, ἐπεὶ ὁμοῖαί ἐντι ὀξυγωνίων κώνων τομαί, τὸν αὐτὸν [οὖν] λόγον ἔχοντι ποτ' ἀλλάλας, ὃν αἱ ὁμόλογοι διάμετροι αὐτᾶν δυνάμει. Ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΔ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΚΕ, τοῦτον ἔχει τὸ ὑπὸ τᾶν ΖΔΒ περιεχόμενον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΖΕΒ, ἐπεί ἐστιν ἁ μὲν ΖΔ ἀγμένα διὰ τοῦ Θ, καθ' ὃ αἱ ἔγγιστα συμπίπτοντι, αἱ δὲ ΑΔ, ΚΕ παρὰ τὰν κατὰ τὸ Β ἐπιψαύουσαν· ἔστιν δὲ τὸ μὲν ὑπὸ τᾶν ΖΔΒ περιεχόμενον ἴσον τῷ Ω χωρίῳ, τὸ δὲ ὑπὸ τᾶν ΖΕΒ τῷ ΞΜ· ἔχει οὖν ὁ πρῶτος τόμος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ τόμῳ ὁ ἔχων ἄξονα τὰν

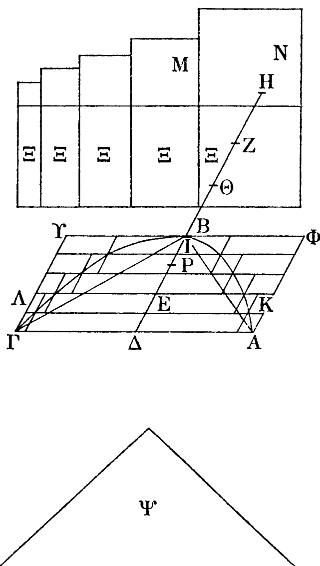


Fig. 97.

11 τῶν Heiberg : τὸν BDEGH ‖ 20 αἱ δὲ βάσιες αὐτῶν add. Commandinus ‖ 24 ΖΔΒ ms. B : ΖΛΒ mss. DEGH ‖ 25-26 ὃ αἱ Torellius : ἃς BDEGH ‖ 27 ΖΔΒ ms. B : ΖΛΒ mss. DEGH.

axe ΔE, au premier tronc de la figure inscrite, ayant pour axe ΔE, est donc égal au rapport de l'aire Ω à la somme des aires Ξ et M ; de même chacun des autres troncs du tronc de cylindre entier, dont l'axe est égal à ΔE, a au tronc, qui occupe dans la figure inscrite le même rang et qui a un axe égal à ΔE, le même rapport qu'a l'aire Ω à l'aire qui lui correspond parmi les aires appliquées au segment de droite Ξ avec l'excès d'un carré. Nous avons donc de nouveau une suite de grandeurs, à savoir les troncs du tronc de cylindre entier, et une autre suite de grandeurs, à savoir les aires Ω, d'un nombre égal à celui des troncs et ayant deux à deux le même rapport avec eux ; les troncs sont en rapport avec d'autres troncs, ceux de la figure inscrite, sauf le dernier, qui n'a de rapport avec aucune figure, et les aires Ω sont en rapport avec d'autres aires, celles qui sont appliquées à Ξ avec des excès carrés, les aires qui se correspondent ayant le même rapport, mais la dernière n'étant en rapport avec aucune figure ; il est donc évident que le rapport de la somme des troncs à la somme des troncs sera lui aussi égal au rapport de la somme des aires Ω à la somme des aires appliquées sauf la plus grande[1]. Or le rapport entre la somme des aires Ω et la somme des aires appliquées sauf la plus grande est supérieur au rapport[2] de la somme des segments de droite Ξ et N à la somme de la moitié de Ξ et du tiers de N ; le rapport du tronc de cylindre entier à la figure inscrite est donc supérieur au rapport de la somme de Ξ et de N à la somme de la moitié de Ξ et du tiers de N, et par conséquent aussi au rapport de ZΔ à ΘP. Le rapport du tronc de cylindre entier à la figure inscrite est donc supérieur à son rapport au cône Ψ, ce qui est impossible, puisqu'on a démontré

1. Cf. prop. 1.
2. Cf. prop. 2.

ΔΕ ποτὶ τὸν πρῶτον τόμον τῶν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν ΔΕ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ Ω χωρίον ποτὶ τὸ ΞΜ· καὶ τῶν ἄλλων δὲ τόμων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ τόμῳ ἄξονα ἐχόντων τὰν ἴσαν τᾷ ΔΕ ποτὶ τὸν τόμον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι κατ' αὐτὸν ἐόντα καὶ ἄξονα ἔχοντα τὰν ἴσαν τᾷ ΔΕ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ Ω χωρίον ποτὶ τὸ ὁμόλογον τῶν παρὰ τὰν Ξ παραπεπτωκότων ὑπερβαλλόντων εἴδει τετραγώνῳ. Πάλιν οὖν ἐντί τινα μεγέθεα, οἱ τόμοι οἱ ἐν τῷ ὅλῳ τόμῳ, καὶ ἄλλα μεγέθεα, τὰ χωρία, ἐν οἷς τὸ Ω, ἴσα τῷ πλήθει τοῖς τόμοις καὶ κατὰ δύο τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντα αὐτοῖς, λέγονται δὲ οἱ τόμοι ποτ' ἄλλους τόμους τοὺς ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, ὁ δὲ ἔσχατος τόμος οὐδὲ ποθ' ἓν λέγεται, τὰ δὲ Ω χωρία ποτ' ἄλλα χωρία τὰ παρὰ τὰν Ξ παραπεπτωκότα ὑπερβάλλοντα εἴδεσι τετραγώνοις, τὰ ὁμόλογα ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις, τὸ δὲ ἔσχατον οὐδὲ ποθ' ἓν λέγεται· δῆλον οὖν ὅτι καὶ πάντες οἱ τόμοι ποτὶ πάντας τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, ὃν πάντα τὰ Ω χωρία ποτὶ πάντα τὰ παραβλήματα χωρὶς τοῦ μεγίστου. Πάντα δὲ τὰ Ω χωρία ποτὶ πάντα τὰ παραβλήματα χωρὶς τοῦ μεγίστου μείζονα λόγον ἔχοντι ἢ ὃν ἁ ΞΝ ποτὶ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις τᾷ τε ἡμισέᾳ τᾶς Ξ καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τᾶς Ν· μείζονα οὖν λόγον ἔχει ὅλος ὁ τόμος ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ὃν ἔχει ἁ ΞΝ ποτὶ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις τᾷ τε ἡμισέᾳ τᾶς Ξ καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τᾶς Ν· ὥστε καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἁ ΖΔ ποτὶ τὰν ΘΡ. Μείζονα οὖν ἔχει λόγον ὁ ὅλος τόμος ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἢ ποτὶ τὸν Ψ κῶνον·

1 τῶν Heiberg : τὸν BDEGH ‖ 4 τὰν add. Heiberg ‖ 6 τὰν add. Heiberg ‖ 7-8 τὰν Ξ Basil. : τᾷ ΝΞ mss. DEH τὰν ΝΞ mss. BG ‖ 9 τόμοι οἱ BG : om. DEH ‖ 11 ἔχοντα Torellius : ἔχωντι DH ἔχοντι BEG ‖ 12 ἄλλους G alios B ἀλλάλους DEH ‖ 13 ποθ' ἓν B : πόθεν DEGH ‖ 14 τὰ alt. add. Heiberg ‖ 16 ποθ' ἓν B : πόθεν DEGH ‖ 27 τὸν EG : τὸ DH.

que la figure inscrite est supérieure au cône Ψ. Le segment d'hyperboloïde n'est donc pas supérieur au cône Ψ.

Mais si le segment d'hyperboloïde est inférieur au cône Ψ, inscrivons au segment une figure solide et circonscrivons-lui en une autre, chacune étant composée de troncs de cylindre de même hauteur, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite soit inférieur à l'excès du cône Ψ sur le segment ; onmontrera alors de la même manière que la figure circonscrite est inférieure au cône Ψ, et que le rapport du tronc de cylindre ayant même base et même axe que le segment à la figure circonscrite est inférieur à son rapport au cône Ψ, ce qui est impossible[1]. Le segment d'hyperboloïde n'est donc pas, non plus, inférieur au cône Ψ. La proposition est donc vraie.

27.

Si un ellipsoïde de révolution, de l'une ou de l'autre espèce, est coupé par un plan passant par le centre et perpendiculaire à l'axe, la moitié de l'ellipsoïde est équivalente au double du cône ayant même base et même axe que le segment.

Soit un ellipsoïde coupé par un plan passant par le centre et perpendiculaire à l'axe ; coupons-le par un autre plan, passant par l'axe ; que son intersection avec la figure soit l'ellipse[2] ΑΒΓΔ ; soit ΒΔ l'axe de l'ellipse et l'axe de l'ellipsoïde, et Θ le centre ; cela ne fera pas de différence, que ΒΔ soit le grand axe de l'ellipse ou le petit axe ; soit ΓΑ la droite d'intersection du plan découpant la figure (sc. avec le plan passant

1. Cf. Eucl. V, 10.
2. Cf. prop. 11, 3e partie.

ὅπερ ἀδύνατον· ἐδείχθη γὰρ μεῖζον ἐὸν τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ Ψ κώνου. Οὐκ ἔστιν οὖν μεῖζον τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ Ψ κώνου.

Εἰ δὲ ἔλασσόν ἐστι τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ Ψ κώνου, ἐγγραφέντος εἰς τὸ τμᾶμα σχήματος στερεοῦ καὶ ἄλλου περιγραφέντος ἐκ κυλίνδρου τόμων ἴσον ὕψος ἐχόντων συγκειμένου, ὥστε τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει ὁ Ψ κῶνος τοῦ τμάματος, πάλιν ὁμοίως δειχθήσεται τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσον ἐὸν τοῦ Ψ κώνου καὶ ὁ τοῦ κυλίνδρου τόμος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἐλάσσονα λόγον ἔχων ἢ ποτὶ τὸν Ψ κῶνον· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἔστιν οὖν οὐδ' ἔλασσον τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ Ψ κώνου. Δῆλον οὖν τὸ προτεθέν.

κζ′.

Παντὸς σχήματος σφαιροειδέος ἐπιπέδῳ τμαθέντος διὰ τοῦ κέντρου ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα τὸ ἁμίσεον τοῦ σφαιροειδέος διπλάσιόν ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν.

Ἔστω σφαιροειδὲς σχῆμα ἐπιπέδῳ τετμαμένον διὰ τοῦ κέντρου ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, τμαθέντος δὲ αὐτοῦ ἄλλῳ ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἁ ΑΒΓΔ ὀξυγωνίου κώνου τομά, διάμετρος δὲ αὐτᾶς καὶ ἄξων τοῦ σφαιροειδέος ἁ ΒΔ, κέντρον δὲ τὸ Θ· διοίσει δὲ οὐδέν, εἴτε ἁ μείζων ἐστὶ διάμετρος ἁ ΒΔ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς εἴτε ἁ ἐλάσσων· τοῦ δὲ τετμακότος ἐπιπέδου τὸ σχῆμα τομὰ ἔστω ἁ ΓΑ εὐθεῖα· ἐσσεῖται δὴ αὔτα διὰ

1 μεῖζον ἐὸν BG : μείξεον DEH ‖ 13 ἔχων ἢ Torellius : ἔχοντι EG ἔχωντι DH ‖ 21 σχῆμα Basil. : τμῆμα BDEGH ‖ 23 σχήματος Basil. : τμήματος BDEGH ‖ ἁ add. Heiberg.

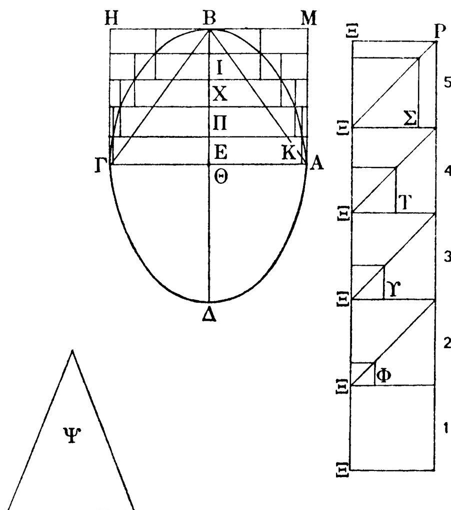


Fig. 98.

par l'axe) ; cette droite passera donc par Θ et fera des angles droits avec BΔ, puisqu'on a supposé que le plan (sc. découpant) passe par le centre et est perpendiculaire à l'axe[1]. Il faut montrer que la moitié de l'ellipsoïde, à savoir le segment ayant pour base le cercle de diamètre AΓ et pour sommet le point B, est équivalent au double du cône ayant même base et même axe que le segment.

Soit en effet un cône Ψ, double du cône ayant même base que le segment et le même axe ΘB ; je dis donc que la moitié de l'ellipsoïde est équivalente au cône Ψ.

Si la moitié de l'ellipsoïde n'est pas équivalente au cône Ψ, qu'elle lui soit d'abord, si possible, supérieure. Inscrivons donc au segment, moitié de l'ellipsoïde,

1. Cf. Eucl. XI, 18 et XI, def. 4.

Fig. 98.

τοῦ Θ καὶ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας ποτὶ τὰν ΒΔ, ἐπεὶ τὸ ἐπίπεδον ὑπόκειται διὰ τοῦ κέντρου τε ἄχθαι καὶ ὀρθὸν εἶμεν ποτὶ τὸν ἄξονα. Δεικτέον ὅτι τὸ ἁμίσεον τοῦ σφαιροειδέος τμᾶμα τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, κορυφὰν δὲ τὸ Β σαμεῖον, διπλάσιόν ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν.

Ἔστω γὰρ κῶνός τις, ἐν ᾧ τὸ Ψ, διπλασίων τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τὰν ΘΒ· φαμὶ δὴ τὸ ἁμίσεον τοῦ σφαιροειδέος ἴσον εἶμεν τῷ Ψ κώνῳ.

Εἰ οὖν μή ἐστιν ἴσον τὸ ἁμίσεον τοῦ σφαιροειδέος τῷ Ψ κώνῳ, ἔστω πρῶτον, εἰ δυνατόν, μεῖζον. Ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸ τμᾶμα τὸ ἁμίσεον τοῦ σφαιροειδέος σχῆμα

2 τε ἄχθαι Heiberg : τετάχθαι BDEGH ‖ 10 δὴ G : δὲ BDEGH.

une figure solide et circonscrivons-lui en une autre, chacune étant composée de cylindres de même hauteur, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite soit inférieur[1] à l'excès de la moitié de l'ellipsoïde sur le cône Ψ. Du moment donc que l'excès de la figure circonscrite, qui est supérieure à la moitié de l'ellipsoïde, sur la figure inscrite est inférieur à l'excès de la moitié de l'ellipsoïde sur le cône Ψ, il est évident que la figure inscrite au segment, moitié de l'ellipsoïde, est, elle aussi, supérieure au cône Ψ. Soit donc un cylindre ayant pour base le cercle de diamètre ΑΓ et pour axe ΒΘ. Puisque donc ce cylindre est le triple du cône ayant même base et même axe que le segment[2], et que le cône Ψ est le double du même cône, il est évident que le cylindre est équivalent aux trois demis du cône Ψ. Prolongeons donc les plans (sc. de base) de tous les cylindres, dont est composée la figure inscrite, jusqu'à la surface du cylindre ayant même base et même axe que le segment ; le cylindre entier sera ainsi décomposé en cylindres en même nombre que les cylindres contenus dans la figure circonscrite et d'une grandeur égale à celle du plus grand d'eux. Soient donc des segments de droite Ξ, en même nombre que les segments sur ΒΘ et égaux, chacun, à ΒΘ ; construisons sur chacun un carré et retranchons du dernier carré un gnomon d'une largeur égale à ΒΙ ; ce gnomon sera donc équivalent[3] au rectangle de côtés ΒΙ et ΙΔ ; du carré voisin de celui-ci retranchons

1. Cf. prop. 19.
2. Cf. Eucl. XII, 10 et prop. 10.
3. Cf. Eucl. II, 5.

στερεόν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει τὸ ἁμίσεον τοῦ σφαιροειδέος τοῦ Ψ κώνου. Ἐπεὶ οὖν μεῖζον ἐὸν τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἁμίσεος τοῦ σφαιροειδέος ἐλάσσονι ὑπερέχει τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἢ τὸ ἁμίσεον τοῦ σφαιροειδέος τοῦ Ψ κώνου, δῆλον οὖν ὅτι καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῷ τμάματι τῷ ἁμισέῳ τοῦ σφαιροειδέος μεῖζόν ἐστι τοῦ Ψ κώνου. Ἔστω δὴ κύλινδρος βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, ἄξονα δὲ τὰν ΒΘ. Ἐπεὶ οὖν οὗτος ὁ κύλινδρος τριπλάσιός ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, ὁ δὲ Ψ κῶνος διπλάσιός ἐστι τοῦ αὐτοῦ κώνου, δῆλον ὡς ὁ κύλινδρος ἡμιόλιός ἐστι τοῦ Ψ κώνου. Ἐκβεβλήσθω δὴ τὰ ἐπίπεδα τῶν κυλίνδρων πάντων, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, ἔστε ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν· ἐσσεῖται δὴ ὁ ὅλος κύλινδρος διαιρημένος εἰς κυλίνδρους τῷ μὲν πλήθει ἴσους τοῖς κυλίνδροις τοῖς ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι, τῷ δὲ μεγέθει ἴσους τῷ μεγίστῳ αὐτῶν. Ἔστων [δὴ] οὖν γραμμαὶ κείμεναι, ἐφ' ἂν τὰ Ξ, τῷ πλήθει ἴσαι τοῖς τμαμάτεσσι τοῖς τᾶς ΒΘ εὐθείας, τῷ δὲ μεγέθει ἴσα ἑκάστᾳ τᾷ ΒΘ, καὶ ἀπὸ ἑκάστας τετράγωνον ἀναγεγράφθω, ἀφαιρήσθω δὲ ἀπὸ μὲν τοῦ ἐσχάτου τετραγώνου γνώμων πλάτος ἔχων ἴσον τᾷ ΒΙ· ἐσσεῖται δὴ οὗτος ἴσος τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ΒΙ, ΙΔ· ἀπὸ δὲ τοῦ παρ' αὐτῷ

2 ἐχόντων BGH : ἔχον τὸν DE ‖ 6 ἐλάσσονι B : ἔλασσον DEGH ‖ 8 τῷ ἁμισέῳ Heiberg : τοῦ ἁμίσεος BDEH τοῦ ἁμίσεως G ‖ 16 ἔστε Torellius : ἐσσεῖται BDEGH ‖ 19 διαιρημένος Heiberg : διαιρούμενος DEGH ‖ 21 ἔστων H : ἔστω D ἔστωσαν EG ‖ 22 ἴσαι G : ἴσα DEH ‖ 25 δὲ Heiberg : δὴ DEGH etiam B ‖ 26 ἴσον H : ἴσαν DEGH ‖ δὴ Nizzius : δὲ BDEGH.

un gnomon d'une largeur égale au double de BI ; ce gnomon-là sera équivalent au rectangle de côtés BX et XΔ ; et ainsi de suite, en retranchant du carré voisin un gnomon, dont la largeur est d'un segment supérieure à la largeur du gnomon retranché précédemment ; chaque gnomon sera donc équivalent au rectangle ayant pour côtés les segments de BΔ, dont l'un est égal à la largeur du gnomon. Il s'ensuit que ce qui reste du deuxième carré est un carré dont le côté est égal à ΘE. Or le rapport du premier des cylindres, contenus dans le cylindre entier, qui a pour axe ΘE, au premier des cylindres de la figure inscrite, ayant le même axe ΘE, est égal[1] au rapport du carré sur AΘ au carré sur KE, et par conséquent aussi au rapport[2] du rectangle de côtés BΘ et ΘΔ au rectangle de côtés BE et EΔ ; le cylindre aura donc au cylindre le même rapport que le premier carré a au gnomon retranché du deuxième carré. De la même manière aussi le rapport de chacun des cylindres, ayant son axe égal à ΘE, au cylindre de la figure inscrite ayant même axe est égal au rapport du carré de même rang que lui au gnomon retranché du carré qui suit immédiatement. Nous avons donc une suite de grandeurs, à savoir les cylindres contenus dans le cylindre entier, et une autre suite, à savoir les carrés sur les segments de droite Ξ, en même nombre que les cylindres et ayant deux à deux le même rapport ; les cylindres sont en rapport avec d'autres grandeurs, à savoir les cylindres de la figure inscrite, sauf le dernier qui n'a de rapport avec aucune figure, et les carrés

1. Cf. Eucl. XII, 2 et XII, 11.
2. Cf. Apollonius, *Con.*, I, 21.

τετραγώνου γνώμων ἀφαιρήσθω πλάτος ἔχων διπλάσιον τᾶς ΒΙ· ἐσσεῖται δὴ οὗτος ἴσος τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ΒΧ, ΧΔ· καὶ ἀεὶ ἀπὸ τοῦ ἐχομένου τετραγώνου γνώμων ἀφαιρήσθω, οὗ πλάτος ἑνὶ τμάματι μεῖζον τοῦ πλάτεος τοῦ πρὸ αὐτοῦ ἀφαιρημένου γνώμονος· ἐσσεῖται δὴ ἕκαστος αὐτῶν ἴσος τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν τᾶς ΒΔ τμαμάτων, ὧν τὸ ἕτερον τμᾶμα ἴσον ἐστὶ τῷ πλάτει τοῦ γνώμονος. Ἐσσεῖται δὴ καὶ [ἀπὸ] τοῦ τετραγώνου τοῦ δευτέρου τὸ λοιπὸν τετράγωνον τὰν πλευρὰν ἔχον ἴσαν τᾷ ΘΕ. Ὁ δὲ κύλινδρος ὁ πρῶτος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ὁ ἔχων ἄξονα τὰν ΘΕ ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν πρῶτον τῶν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν αὐτὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν ΘΕ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΘ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΚΕ· ὥστε καὶ ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν ΒΘ, ΘΔ περιεχόμενον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΒΕ, ΕΔ περιεχόμενον· ἔχει οὖν ὁ κύλινδρος ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ πρῶτον τετράγωνον ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀπὸ τοῦ δευτέρου τετραγώνου ἀφαιρημένον. Ὁμοίως δὲ καὶ τῶν ἄλλων κυλίνδρων ἕκαστος ἄξονα ἐχόντων ἴσον τᾷ ΘΕ ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι καὶ ἔχοντα ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ὁμοίως τεταγμένον αὐτῷ ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀπὸ τοῦ ἑπομένου αὐτῷ τετραγώνου ἀφαιρημένον. Ἐντὶ δή τινα μεγέθεα, οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, καὶ ἄλλα, τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν ΞΞ, ἴσα τῷ πλήθει τοῖς κυλίνδροις καὶ κατὰ δύο τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντα, λέγονται δὲ οἱ κύλινδροι ποτ' ἄλλα μεγέθεα, τοὺς κυλίνδρους τοὺς ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, ὁ δὲ

1 τετραγώνου BEH : τετραγώνων DG || 4 οὗ add. Heiberg || ἑνὶ Heiberg : μὲν ἡ DEGH || 10 τᾷ G : τὰν BDEH || 12 ἔχοντα B : ἔχοντι DEGH || 15 ΒΘ Basil. : ΒΑ mss. DEGH || τὸ ὑπὸ BG : om. DEH || 16 κύλινδρον Basil. : κύκλον BDEGH || 20 ἴσον H : ἴσαν DEG || 22 τὸ alt. add. Heiberg || 25 ὅλῳ add. Torellius || τὰ pr. add. Heiberg.

sont en rapport avec d'autres grandeurs, à savoir (sc. les gnomon) retranchés des carrés, les grandeurs correspondantes ayant les mêmes rapports, sauf que le dernier carré n'a de rapport avec aucune figure ; le rapport de la somme des cylindres contenus dans le cylindre entier à la somme des autres cylindres sera donc égal au rapport de la somme des carrés à la somme des gnomon retranchés d'eux[1] ; il s'ensuit que le rapport du cylindre ayant même base et même axe que le segment à la figure inscrite est égal au rapport de la somme des carrés à la somme des gnomon retranchés des carrés. Or la somme des carrés est supérieure aux trois demis de la somme des gnomon retranchés des carrés ; car on s'est donné une suite de segments de droite ΞΡ, ΞΣ, ΞΤ, ΞΥ, ΞΦ, ΞΨ, ΞΩ, qui se dépassent l'un l'autre de la même longueur et dont le plus petit est égal à la différence, et une autre suite, celle des segments entre les deux Ξ, en même nombre que les segments de la première suite, mais dont chacun est égal en grandeur au plus grand segment (sc. de la première suite) ; la somme des carrés sur les segments dont chacun est égal au plus grand segment (sc. ΞΡ) est donc inférieure au triple de la somme des carrés sur les segments se dépassant les uns les autres d'une même longueur, mais supérieure au triple de la somme des aires qui restent sauf le carré sur le plus grand segment ; cette proposition a été démontrée en effet dans le traité des spirales[2]. Mais comme la somme des carrés est inférieure au triple de la somme des autres carrés, qui sont retranchés des premiers, il est évident qu'elle est supérieure aux trois demis de la somme des aires qui restent ; elle est donc supérieure aux trois demis de la somme des gnomon. Par conséquent le cylindre ayant même base et même axe

Cf. prop. 1.
Cf. *Des spirales,* prop. 10, coroll.

ἔσχατος οὐδὲ ποθ' ἓν λέγεται, καὶ τὰ τετράγωνα ποτ' ἄλλα μεγέθεα, τοὺς ἀπὸ τῶν τετραγώνων ἀφαιρημένους, τὰ ὁμόλογα ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις, τὸ δὲ ἔσχατον τετράγωνον οὐδὲ ποθ' ἓν λέγεται· πάντες οὖν οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ποτὶ πάντας τοὺς ἑτέρους κυλίνδρους τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, ὃν πάντα τὰ τετράγωνα ποτὶ πάντας τοὺς γνώμονας τοὺς ἀφαιρημένους ἀπ' αὐτῶν· ὁ ἄρα κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν πάντα τὰ τετράγωνα ποτὶ πάντας τοὺς γνώμονας τοὺς ἀφαιρημένους ἀπ' αὐτῶν. Τὰ δὲ τετράγωνα πάντων τῶν γνωμόνων τῶν ἀφαιρημένων ἀπ' αὐτῶν μείζονά ἐντι ἢ ἡμιόλια· ἐντὶ γάρ τινες γραμμαὶ κείμεναι αἱ ΞΡ, ΞΣ, ΞΤ, ΞΥ, ΞΦ [ΞΨ, ΞΩ] τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερέχουσαι, καὶ ἁ ἐλαχίστα ἴσα τᾷ ὑπεροχᾷ, ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι γραμμαί, ἐφ' ἆν τὰ δύο Ξ, Ξ, τῷ μὲν πλήθει ἴσαι ταύταις, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα ἴσα τᾷ μεγίστᾳ· τὰ οὖν τετράγωνα τὰ ἀπὸ πασᾶν, ἆν ἐστιν ἑκάστα ἴσα τᾷ μεγίστᾳ, πάντων μὲν τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν ἐλάσσονά ἐντι ἢ τριπλάσια, τῶν δὲ λοιπῶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας μείζονα ἢ τριπλάσια· τοῦτο γὰρ ἐν τοῖς περὶ τᾶν ἑλίκων ἐκδεδομένοις δέδεικται. Ἐπεὶ δὲ πάντα τὰ τετράγωνα ἐλάσσονά ἐντι ἢ τριπλάσια τῶν ἑτέρων τετραγώνων, ἅ ἐντι ἀφαιρημένα ἀπ' αὐτῶν, δῆλον ὅτι τῶν λοιπῶν μείζονά ἐντι ἢ ἡμιόλια· τῶν οὖν γνωμόνων μείζονά ἐντι ἢ ἡμιόλια. Ὥστε καὶ ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὰν

1 ποθ 'ἐν B : πόθεν DEGH ‖ 4 ποθ' ἓν B : πόθεν DEGH ‖ 12 ἢ BG : om. DEH ‖ 17 τᾷ GH : τῷ DE ‖ 18 ἆν B : ἃ DEGH ‖ τῶν add. Heiberg ‖ 19 τᾶν τῷ ἴσῳ B : τῶν ἴσων DEGH τᾶν ἴσῳ Torellius ‖ 21 μείζονα ἢ τριπλάσια B : μεῖζον ἢ τριπλάσιον DEGH ‖ 23 τριπλάσια Basil. : διπλάσια BDEGH ‖ 26 ἡμιόλια G : ἡμιολίῳ DEH.

que le segment est lui aussi supérieur aux trois demis de la figure inscrite, ce qui est impossible, puisque le cylindre est égal aux trois demis du cône Ψ, et qu'on a démontré que la figure inscrite est supérieure au cône Ψ. La moitié de l'ellipsoïde n'est donc pas supérieure au cône Ψ.

Mais elle ne lui est pas, non plus, inférieure. Inscrivons donc de nouveau à la moitié de l'ellipsoïde une figure solide et circonscrivons-lui en une autre, les deux figures étant composées de cylindres de même hauteur, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite soit inférieur à l'excès du cône Ψ sur la moitié de l'ellipsoïde, les autres constructions étant les mêmes que plus haut. Du moment donc que la figure inscrite est inférieure au segment, il est évident que la figure circonscrite est elle aussi inférieure au cône Ψ. De nouveau donc le rapport du premier cylindre du cylindre entier, ayant pour axe ΘE, au premier cylindre de la figure circonscrite, ayant pour axe ΘE, est égal au rapport du premier carré à lui-même, et le rapport du deuxième cylindre du cylindre entier, ayant pour axe EΠ, au deuxième cylindre de la figure circonscrite, ayant pour axe EΠ, est égal au rapport du deuxième carré au gnomon retranché de lui ; et le rapport de chacun des autres cylindres contenus dans le cylindre entier, ayant des axes égaux à ΘE, au cylindre de la figure circonscrite, qui a le même rang que lui et le même axe, est égal au rapport du carré de même rang au gnomon retranché de ce carré ; la somme des cylindres

αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν μείζων ἐστὶν ἢ ἡμιόλιος τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος· ὅπερ ἀδύνατον· τοῦ γὰρ Ψ κώνου ἡμιόλιός ἐστι, τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μεῖζον ἐδείχθη τοῦ Ψ κώνου. Οὐκ ἄρα ἐστὶ μεῖζον τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος τοῦ Ψ κώνου.

Οὐδὲ τοίνυν ἔλασσον. Ἔστω γάρ, εἰ δυνατόν, ἔλασσον. Πάλιν δὴ ἐγγεγράφθω εἰς τὸ ἁμίσεον τοῦ σφαιροειδέος σχῆμα στερεόν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι ἢ ᾧ ὑπερέχει ὁ Ψ κῶνος τοῦ ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδέος, καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον κατεσκευάσθω. Ἐπεὶ οὖν ἔλασσόν ἐστι τὸ ἐγγραφὲν σχῆμα τοῦ τμάματος, δῆλον ὅτι καὶ τὸ περιγραφὲν σχῆμα ἔλασσόν ἐστι τοῦ Ψ κώνου. Πάλιν δὴ ὁ πρῶτος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ὁ ἔχων ἄξονα τὰν ΘΕ ποτὶ τὸν πρῶτον κύλινδρον τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν ΘΕ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ πρῶτον τετράγωνον ποθ' αὐτό, ὁ δὲ δεύτερος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ὁ ἔχων ἄξονα τὰν ΕΠ ποτὶ τὸν δεύτερον κύλινδρον τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν ΕΠ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ δεύτερον τετράγωνον ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀπ' αὐτοῦ ἀφαιρημένον· καὶ τῶν ἄλλων δὲ κυλίνδρων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἄξονα ἐχόντων τὰν ἴσαν τᾷ ΘΕ ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι κατ' αὐτὸν ἐόντα καὶ ἄξονα ἔχοντα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ὁμοίως τεταγμένον αὐτῷ τετράγωνον ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀπ' αὐτοῦ ἀφαιρημένον· καὶ πάντες

1-2 ἢ ἡμιόλιος Basil.: ἡμίσεος BDEGH || 10 ᾧ B: om. DEGH || 18 αὐτό Heiberg: αὐτό DEGH || 20 τῶν Heiberg: τὸν DEGH || 24 τὰν add. Heiberg || 25 περιγεγραμμένῳ Torellius: ἐγγεγραμμένῳ BDEGH || 26 καὶ ἄξονα ἔχοντα add. Torellius || 27 τὸν add. Heiberg || ὃν τὸ add. Nizzius || τεταγμένον Nizzius: τεταγμένῳ BDEGH || τετράγωνον Torellius: τετραγώνῳ BDEGH.

contenus dans le cylindre entier aura donc à la somme des cylindres de la figure circonscrite le même rapport[1] qu'a la somme des carrés à la somme du premier carré et des gnomon retranchés des autres carrés. De plus, la somme des carrés est inférieure aux trois demis de la somme du premier carré et des gnomon retranchés des autres carrés, parce qu'elle est supérieure au triple de la somme des carrés sur les segments, qui se dépassent l'un l'autre d'une même longueur, moins le carré sur le plus grand segment ; il s'ensuit que le cylindre ayant même base et même axe que le segment est inférieur aux trois demis de la figure circonscrite, ce qui est impossible, puisqu'il est égal aux trois demis du cône Ψ, et qu'on a démontré que la figure circonscrite est inférieure au cône Ψ. La moitié de l'ellipsoïde n'est donc pas inférieure au cône Ψ. Mais du moment qu'elle ne lui est ni supérieure ni inférieure, elle lui est équivalente.

28.

Et même si l'ellipsoïde est coupé par un plan passant par le centre, mais non perpendiculaire à l'axe, sa moitié n'en sera pas moins équivalente au double du segment de cône ayant même base et même axe que le segment.

Coupons en effet une figure d'ellipsoïde ; coupons-la aussi par un autre plan, passant par l'axe et perpendiculaire au plan sécant ; que son intersection avec la figure soit l'ellipse[2] ΑΒΓΔ ; soit Θ le centre de l'ellipse et la droite ΑΓ l'intersection (sc. du plan passant par l'axe) avec le plan sécant ; cette droite passera par Θ, puisque par hypothèse le plan sécant

1. Cf. prop. 1.
1. Cf. prop. 11, 3e partie.

οὖν οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ποτὶ πάντας τοὺς κυλίνδρους τοὺς ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, ὃν πάντα τὰ τετράγωνα ποτὶ τὸ ἴσον τῷ πρώτῳ τετραγώνῳ καὶ τοῖς γνωμόνεσσι τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τετραγώνων ἀφαιρημένοις. Καὶ τὰ τετράγωνα πάντα ἐλάσσονά ἐντι ἢ ἡμιόλια τοῦ ἴσου τῷ τε πρώτῳ τετραγώνῳ καὶ τοῖς γνωμόνεσσιν τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν ἀφαιρημένοις, διότι τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας τετραγώνου μείζονά ἐντι ἢ τριπλάσια· ὁ ἄρα κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν ἐλάσσων ἢ ἡμιόλιός ἐστι τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος· ὅπερ ἀδύνατον· τοῦ γὰρ Ψ κώνου ἡμιόλιός ἐστι, τὸ δὲ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλαττον ἐδείχθη τοῦ Ψ κώνου. Οὐκ ἄρα ἐστὶν ἔλασσον τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος τοῦ Ψ κώνου. Ἐπεὶ δὲ οὔτε μεῖζόν ἐστι οὔτε ἔλασσον, ἴσον ἄρα ἐστίν.

κη′.

Καὶ τοίνυν εἴ κα τὸ σφαιροειδὲς μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα τῷ ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ κέντρου τμαθῇ, ὁμοίως τὸ ἁμίσεον τοῦ σφαιροειδέος διπλάσιον ἐσσεῖται τοῦ ἀποτμάματος τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν.

Τετμάσθω γὰρ σχῆμα σφαιροειδές, τμαθέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἁ ΑΒΓΔ ὀξυγωνίου κώνου τομά, κέντρον δὲ αὐτᾶς τὸ Θ, τοῦ δε τετμακότος ἐπιπέδου τὸ σχῆμα ἔστω ἁ ΑΓ εὐθεῖα· ἐσσεῖται δ' αὕτα διὰ τοῦ Θ ἀγμένα, ἐπεὶ τὸ ἐπίπεδον ὑπέκειτο διὰ τοῦ κέντρου ἄχθαι.

15 τὸ ἡμίσεον B : τοῦ ἡμίσους DEGH ‖ 16 δὲ add. Heiberg ‖ οὔτε alt. G : οὐδὲ DEH ‖ 24 σχῆμα Basil. : τμῆμα BDEGH ‖ 29 ἐπεὶ B : ἐπὶ DEGH.

passe par le centre. On aura donc une ellipse décrite autour de ΑΓ comme axe, puisqu'on a supposé que le plan sécant n'est pas mené perpendiculairement à l'axe[1]. Menons donc parallèlement à ΑΓ les droites ΚΛ et ΜΝ tangentes à l'ellipse en Β et Δ et faisons passer par ΚΛ et ΜΝ des plans parallèles au plan de trace ΑΓ ; ces plans sont donc tangents[2] à l'ellipsoïde aux points Β et Δ, la droite ΒΔ passera[3] par le point Θ, les points Β et Δ seront les sommets des segments, et ΒΘ et ΘΔ seront leurs axes. Il est donc possible de trouver un cylindre ayant pour axe ΒΘ et tel que l'ellipse décrite autour de ΑΓ comme axe soit située dans sa surface[4] ; ce cylindre trouvé, nous aurons un tronc de cylindre ayant même base et même axe que la moitié de l'ellipsoïde ; mais il est aussi possible de trouver un cône ayant pour sommet le point Β et tel que l'ellipse d'axe ΑΓ soit située dans sa surface. Ce cône trouvé, nous aurons donc un segment de cône ayant même base et même axe que le segment (sc. d'ellipsoïde) ; je dis donc que la moitié de l'ellipsoïde est équivalente au double de ce cône.

Soit donc le cône Ψ double du segment de cône. Si donc la moitié de l'ellipsoïde n'est pas équivalente au cône Ψ, qu'elle lui soit d'abord, si possible, supérieure. J'inscris donc à la moitié de l'ellipsoïde une figure solide et je lui en circonscris une autre, les deux figures étant composées de troncs de cylindre de même hauteur, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur

1. Cf. prop. 14.
2. Cf. prop. 16, 2e partie.
3. Cf. prop. 16, 3e partie.
4. Cf. prop. 9.

Ἐσσεῖται οὖν τις ὀξυγωνίου κώνου τομὰ περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, ἐπεὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἀποτέμνον ὑπέκειτο οὐ ποτ' ὀρθὰς εἶμεν τῷ ἄξονι ἀγμένον. Ἄχθων δή τινες αἱ ΚΛ, ΜΝ παρὰ τὰν ΑΓ ἐπιψαύουσαι τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς κατὰ τὰ Β, Δ, ἀπὸ δὲ τᾶν ΚΛ, ΜΝ ἐπίπεδα ἀνεστακέτω παράλληλα τῷ κατὰ τὰν ΑΓ · ἐπιψαύοντι δὴ ταῦτα τοῦ σφαιροειδέος κατὰ τὰ Β, Δ, καὶ ἁ ΒΔ ἐπιζευχθεῖσα πεσεῖται διὰ τοῦ Θ, καὶ ἐσσοῦνται τῶν τμαμάτων κορυφαὶ μὲν τὰ Β, Δ σαμεῖα, ἄξονες δὲ αἱ ΒΘ, ΘΔ. Δυνατὸν δή ἐστιν κύλινδρον εὑρεῖν ἄξονα ἔχοντα τὰν ΒΘ, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ ἁ περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, εὑρεθέντος δὲ ἐσσεῖταί τις κυλίνδρου τόμος τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ ἡμισέῳ τοῦ σφαιροειδέος καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν · πάλιν δὲ καὶ κῶνον εὑρεῖν δυνατόν ἐστι κορυφὰν ἔχοντα τὸ Β σαμεῖον, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ ἁ ἀπὸ διαμέτρου τᾶς ΑΓ. Εὑρεθέντος δὴ ἐσσεῖταί τι ἀπότμαμα κώνου τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν · λέγω δὴ ὅτι τοῦ σφαιροειδέος τὸ ἡμίσεον διπλάσιόν ἐστι τοῦ κώνου τούτου.

Ἔστω δὴ ὁ Ψ κῶνος διπλάσιος τοῦ ἀποτμάματος τοῦ κώνου. Εἰ οὖν μή ἐστιν ἴσον τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος τῷ Ψ κώνῳ, ἔστω πρῶτον, εἰ δυνατόν, μεῖζον. Ἐνέγραψα δή τι εἰς τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος σχῆμα στερεὸν καὶ ἄλλο περιέγραψα ἐκ κυλίνδρου τόμων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος

3 ἄχθων H : ἄχθω DEG ‖ 4 ἐπιψαύουσαι Heiberg : contingentes B ἐπιψαύουσαν DEGH ‖ 6 τῷ G : τὸ DEH ‖ δὴ Heiberg : δὲ BDEGH ‖ 7 κατὰ τὰ Β, Δ add. Torellius ‖ ἁ ΒΔ ms. B : τὰ ΒΔ mss. DEGH ‖ 9 ΘΔ ms. B : ΘΑ mss. DEGH ‖ 10 δή Heiberg : δὲ BDEGH ‖ 12 κυλίνδρου BG : κύλινδρος DEH ‖ 13 τῷ ἡμισέῳ Heiberg : τοῦ ἡμίσους DEGH ‖ 14 δὲ Heiberg : δὴ BDEGH ‖ 17 δὴ Heiberg : δὲ BDEGH ‖ τι Heiberg : τὸ DEGH om. B ‖ κώνου add. Torellius.

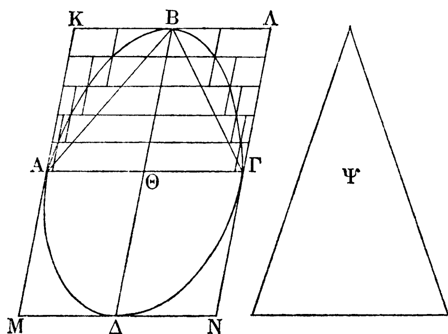


Fig. 99.

la figure inscrite soit inférieur[1] à l'excès de la moitié de l'ellipsoïde sur le cône Ψ. On montrera de la même manière que plus haut que la figure inscrite à la moitié de l'ellipsoïde est supérieure au cône Ψ, et que le tronc de cylindre ayant même base et même axe que le segment est égal aux trois demis du cône Ψ, mais supérieur aux trois demis de la figure inscrite à la moitié de l'ellipsoïde, ce qui est impossible. La moitié de l'ellipsoïde n'est donc pas supérieure au cône Ψ.

Mais si la moitié de l'ellipsoïde est inférieure au cône Ψ, inscrivons à la moitié de l'ellipsoïde une figure solide et circonscrivons-lui en une autre, les deux figures étant composées de troncs de cylindre de même hauteur, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite soit inférieur[1] à l'excès du cône Ψ sur la moitié de l'ellipsoïde. On montrera, encore, de la même manière que plus haut que la figure circonscrite

1. Cf. prop. 20.

Fig. 99.

ὑπερέχειν ἐλάσσονι ᾗ ἁλίκῳ ὑπερέχει τὸ ἁμίσεον τοῦ σφαιροειδέος τοῦ Ψ κώνου. Ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον δειχθήσεται τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῷ ἡμισέῳ τοῦ σφαιροειδέος μεῖζον ἐὸν τοῦ Ψ κώνου καὶ ὁ τόμος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦ μὲν Ψ κώνου ἡμιόλιος ἐών, τοῦ δὲ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐν τῷ ἡμισέῳ τοῦ σφαιροειδέος μείζων ἢ ἡμιόλιος· ὅπερ ἀδύνατον. Οὐκ ἐσσεῖται οὖν μεῖζον τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος τοῦ Ψ κώνου.

Εἰ δὲ ἔλασσόν ἐστι τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος τοῦ Ψ κώνου, ἐγγεγράφθω εἰς τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος σχῆμα στερεόν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων τόμων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφὲν τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι ᾗ ἁλίκῳ ὑπερέχει ὁ Ψ κῶνος τοῦ ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδέος. Πάλιν οὖν ὁμοίως τοῖς πρότερον δειχθήσεται τὸ περιγεγραμμένον

7 τῷ add. Heiberg ‖ ἡμισέῳ BG : ἡμίσεως DEH ‖ 8 μεῖζον B : om. DEGH ‖ 10-11 Εἰ δὲ ἔλασσόν ἐστι τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος τοῦ Ψ κώνου add. Commandinus ‖ 11-12 εἰς τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος σχῆμα στερεόν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω B : om. DEGH ‖ 12 ἐκ BG : om. DEH.

est inférieure au cône Ψ, et que le tronc de cylindre ayant même base et même axe que le segment est équivalent aux trois demis du cône Ψ, mais inférieur aux trois demis de la figure circonscrite, ce qui est impossible. La moitié de l'ellipsoïde ne sera donc pas, non plus, inférieure au cône Ψ. Mais du moment qu'elle ne lui est ni supérieure ni inférieure, elle lui est équivalente. La proposition qu'il fallait démontrer est donc évidente.

29.

Dans tout ellipsoïde coupé par un plan perpendiculaire à l'axe ne passant pas par le centre, le rapport du petit segment au cône ayant même base et même axe que le segment est égal au rapport entre la somme de la moitié de l'axe de l'ellipsoïde et de l'axe du plus grand segment d'une part et l'axe du plus grand segment d'autre part.

Soit en effet un segment d'ellipsoïde découpé par un plan perpendiculaire à l'axe ne passant pas par le centre ; coupons ce segment par un autre plan, passant par l'axe ; que son intersection avec la figure soit l'ellipse[1] ΑΒΓ ; soit ΒΖ l'axe de la section et l'axe de l'ellipsoïde, Θ le centre ; que la droite ΑΓ soit l'intersection du plan découpant le segment (sc. avec le plan passant par l'axe) ; la droite ΑΓ fera des angles droits avec ΒΖ, puisqu'on avait supposé le plan (sc. découpant) perpendiculaire à l'axe[2] ; que le segment découpé, dont le sommet est le point Β, soit inférieur à la moitié de l'ellipsoïde ; soit ΖΗ égal à ΒΘ. Il faut montrer

1. Cf. prop. 11, 3e partie.
2. Cf. Eucl. XI, def. 4 et XI, 18.

σχῆμα ἔλασσον ἐὸν τοῦ Ψ κώνου καὶ ὁ τόμος τοῦ κυλίνδρου ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦ μὲν Ψ κώνου ἡμιόλιος ἐών, τοῦ δὲ περιγεγραμμένου σχήματος ἐλάσσων ἢ ἁμιόλιος· ὅπερ ἀδύνατον. Οὐκ ἐσσεῖται οὖν οὐδὲ ἔλασσον τὸ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδέος τοῦ Ψ κώνου. Ἐπεὶ δὲ οὔτε μεῖζόν ἐστιν οὔτε ἔλασσον, ἴσον ἐστί. Φανερὸν οὖν ἐστιν ὃ ἔδει δεῖξαι.

κθ'.

Παντὸς σχήματος σφαιροειδέος ἐπιπέδῳ τμαθέντος μὴ διὰ τοῦ κέντρου ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα τὸ ἔλαττον τμᾶμα ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν συναμφότερα τό τε ἡμίσεον τοῦ ἄξονος τοῦ σφαιροειδέος καὶ ὁ ἄξων τοῦ μείζονος τμάματος ποτὶ τὸν ἄξονα τὸν τοῦ μείζονος τμάματος.

Ἔστω γάρ τι τμᾶμα σφαιροειδέος σχήματος ἀποτετμαμένον ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα μὴ διὰ τοῦ κέντρου, τμαθέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἁ ΑΒΓ ὀξυγωνίου κώνου τομά, διάμετρος δὲ τᾶς τομᾶς καὶ ἄξων τοῦ σφαιροειδέος ἔστω ἁ ΒΖ, κέντρον δὲ τὸ Θ, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτέμνοντος τὸ τμᾶμα τομὰ ἔστω ἁ ΑΓ εὐθεῖα· ποιήσει δὲ αὕτα ὀρθὰς γωνιάς ποτὶ τὰν ΒΖ, ἐπεὶ τὸ ἐπίπεδον ὀρθὸν εἶμεν ποτὶ τὸν ἄξονα ὑπέκειτο· ἔστω δὲ τὸ τμᾶμα τὸ ἀποτετμαμένον, οὗ κορυφὰ τὸ Β σαμεῖον, ἔλασσον ἢ ἁμίσεον τοῦ σφαιροειδέος σχήματος, καὶ τᾷ ΒΘ ἴσα ἔστω ἁ ΖΗ. Δεικτέον ὅτι τὸ τμᾶμα, οὗ κορυφὰ

5 τὸ GH : τοῦ DE ‖ 6 μεῖζόν EGH : μείζων D ‖ οὔτε alt. Heiberg : οὐδὲ DEGH ‖ 11 ὃν BG : om. DEH ‖ 12 τό τε ἡμίσεον Heiberg : medietas B τὰ ἡμίσεα DEH τά τε ἡμίσεα G ‖ 15 σχήματος B : τμήματος DEGH ‖ 25 ἁμίσεον Heiberg : ἁμίσους DEGH ‖ 26 ἁ ΖΗ ms. B : τοῦ ΑΖΗ mss. DEGH.

que le rapport du segment de sommet B au cône ayant même base et même axe que le segment est égal au rapport de ΔH à ΔZ.

Fig. 100.

Soit donc un cylindre ayant même base et même axe que le segment le plus petit ; soit aussi un cône Ψ, ayant au cône, de même base (sc. et de même axe que le segment), le rapport de ΔH à ΔZ ; je dis donc que le cône Ψ est équivalent au segment ayant pour sommet le point B.

Fig. 101.

En effet, s'il ne lui est pas équivalent, qu'il lui soit d'abord, si possible, inférieur. J'inscris donc au segment une figure solide et je lui en circonscris une autre, les deux figures étant composées de cylindres de même hauteur, de manière que l'excès de la figure circonscrite à la figure inscrite soit inférieur à l'excès du segment de l'ellipsoïde sur le cône Ψ[1]. Du moment donc que l'excès de la figure circonscrite, qui est supérieure au

1. Cf. prop. 19.

τὸ Β σαμεῖον, ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ ΔΗ ποτὶ τὰν ΔΖ.

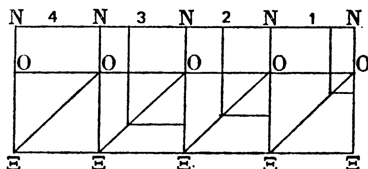


Fig. 100.

Ἔστω δὴ κύλινδρος τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ ἐλάσσονι τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, ἔστω δὲ καὶ κῶνος, ἐν ᾧ τὸ Ψ, ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τοῦτον ἔχων τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ ΔΗ ποτὶ τὰν ΔΖ· φαμὶ δὴ τὸν Ψ κῶνον ἴσον εἶμεν τῷ τμάματι τῷ κορυφὰν ἔχοντι τὸ Β σαμεῖον.

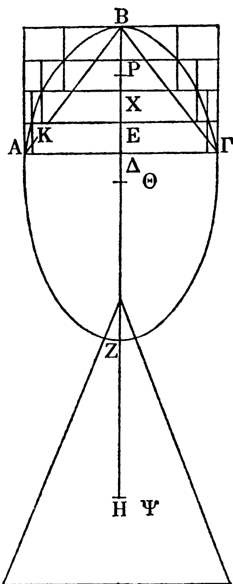


Fig. 101.

Εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσος, ἔστω πρῶτον, εἰ δυνατόν, ἐλάσσων. Ἐνέγραψα δὴ εἰς τὸ τμᾶμα σχῆμα στερεὸν καὶ ἄλλο περιέγραψα ἐκ κυλίνδρων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι ἢ ἁλίκῳ μεῖζόν ἐστι τὸ τοῦ σφαιροειδέος τμᾶμα τοῦ Ψ κώνου. Ἐπεὶ οὖν μεῖζον ἐὸν τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ τμάματος

3 τὰν G : τᾷ DEH ‖ 4 δὴ B : δὲ DEGH.

segment, sur la figure inscrite est inférieur à l'excès du segment sur le cône, il est évident que la figure inscrite est elle aussi supérieure au cône Ψ. Soit donc BP égal au tiers de BΔ. Puisque, ainsi, BH est triple de BΘ, et BΔ triple de BP, il est évident que ΔH est triple de ΘP ; il s'ensuit que le rapport du cylindre ayant la même base que le segment et pour axe BΔ au cône ayant même base et même axe est égal[1] au rapport de ΔH à ΘP. Or le cône indiqué a au cône Ψ le rapport de ΔZ à ΔH ; comme il y a une proportion déréglée[2], le rapport du cylindre ayant même base et même axe que le segment au cône Ψ sera donc égal[3] au rapport de ΔZ à ΘP. Donnons-nous donc des segments de droite, marqués par Ξ et N, en même nombre que les segments sur BΔ et égaux, chacun, à ZΔ ; que les segments de droite ΞO soient eux aussi, chacun, égaux à BΔ ; chacun des segments NO sera donc double de ΘΔ. Appliquons donc à chacun d'eux une aire ayant une largeur égale à BΔ, de manière que chacune des figures marquées par des diagonales soit un carré. Retranchons donc du premier carré le gnomon de largeur BE, du deuxième carré le gnomon de largeur BX, et retranchons de la même manière de chacune des aires suivantes un gnomon dont la largeur est d'un segment inférieur à la largeur du gnomon retranché précédemment ; il s'ensuit que le gnomon retranché de la première aire sera équivalent au rectangle de côtés BE et EZ, et que ce qui reste sera une aire appli-

1. Cf. Eucl. XII, 10.
2. Cf. Eucl. V, def. 18.
3. Cf. Eucl. V, 23.

ἐλάσσονι ὑπερέχει τοῦ ἐγγεγραμμένου ἢ τὸ τμᾶμα τοῦ κώνου, δῆλον ὅτι μεῖζόν ἐστι καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ Ψ κώνου. Ἔστω δὴ τρίτον μέρος τᾶς ΒΔ ἁ ΒΡ. Ἐπεὶ οὖν ἁ μὲν ΒΗ τριπλασία ἐστὶν τᾶς ΒΘ, ἁ δὲ ΒΔ τᾶς ΒΡ, δῆλον ὅτι τριπλασία ἐστὶν ἁ ΔΗ τᾶς ΘΡ· ἔχει δὴ ὁ μὲν κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὰν ΒΔ ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ ΔΗ ποτὶ τὰν ΘΡ. Ὁ δὲ κῶνος ὁ εἰρημένος ποτὶ τὸν Ψ κῶνον τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει, ὃν ἁ ΔΖ ποτὶ τὰν ΔΗ· ἕξει οὖν ἀνομοίως τῶν λόγων τεταγμένων ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν ποτὶ τὸν Ψ κῶνον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ΔΖ ποτὶ τὰν ΘΡ. Ἔστων δὴ γραμμαὶ κείμεναι, ἐφ' ἆν τὰ Ξ, Ν, τῷ μὲν πλήθει ἴσαι τοῖς τμαμάτεσσιν τοῖς τᾶς ΒΔ, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα ἴσα τᾷ ΖΔ, ἔστω δὲ καὶ τᾶν ΞΟ ἑκάστα ἴσα τᾷ ΒΔ· τᾶν οὖν ΝΟ ἑκάστα διπλασία ἐσσεῖται τᾶς ΘΔ. Παραπεπτωκέτω δὴ παρ' ἑκάσταν αὐτᾶν χωρίον τι πλάτος ἔχον ἴσον τᾷ ΒΔ, ὥστε εἶμεν ἕκαστον τῶν ἐχόντων τὰς διαμέτρους τετράγωνον. Ἀφαιρήσθω δὴ ἀπὸ μὲν τοῦ πρώτου γνώμων πλάτος ἔχων ἴσον τᾷ ΒΕ, ἀπὸ δὲ τοῦ δευτέρου πλάτος ἔχων ἴσον τᾷ ΒΧ, καὶ ἀφ' ἑκάστου τὸν αὐτὸν τρόπον εἷς ἀπὸ τοῦ ἑπομένου χωρίου γνώμων ἀφαιρήσθω πλάτος ἔχων ἑνὶ τμάματι ἔλασσον τοῦ πλάτεος τοῦ πρὸ αὐτοῦ γνώμονος ἀφαιρημένου· ἐσσεῖται δὴ ὁ μὲν ἀπὸ τοῦ πρώτου χωρίου γνώμων ἀφαιρημένος ἴσος τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ΒΕ, ΕΖ, καὶ τὸ λοιπὸν χωρίον παραπεπτωκὸς παρὰ τὰν

1 ἐλάσσονι B : ἔλασσον DEGH || 4-5 τᾶς ΒΘ, ἁ δὲ ΒΔ τᾶς ΒΡ, δῆλον ὅτι τριπλασία ἐστὶν add. Basil. || 7 τὰν pr. scripsi, cf. p. 198, 10 : τὸν codd. || 8 τοῦτον Torellius : τοῦτον ἔχει BDEGH || 10 ΔΖ Basil. : ΔΗ mss. BDEGH || ΔΗ Basil. : ΔΖ mss. BDEGH || 12 τὸν alt. EG : τὸ DH || 15 τᾶς BG : τᾷ DEH || 16 ΞΟ ms. B : ΞΘ mss. DEGH || τᾶν alt. G : τᾷ BDEH || 18 τᾷ EG : τᾶν DH || 23 ἑνὶ Torellius : ἐν BDEGH.

quée à NO avec l'excès d'un carré, le côté de l'aire excédente étant égal à ΔE ; le gnomon retranché de la deuxième aire sera équivalent au rectangle de côtés ZX et XB et le reste sera une aire appliquée à NO avec l'excès d'un carré, et il en sera de même pour les autres figures. Prolongeons les plans (sc. de base) de tous les cylindres dont est composée la figure inscrite au segment jusqu'à la surface du cylindre ayant même base et même axe que le segment ; le cylindre entier sera ainsi décomposé en cylindres d'un nombre égal à celui des cylindres de la figure circonscrite, mais d'une grandeur égale à celle du plus grand d'entre eux. Le rapport du premier des cylindres contenus dans le cylindre entier, ayant pour axe ΔE, au premier cylindre de la figure inscrite, ayant pour axe ΔE, est donc égal[1] au rapport du carré sur ΔΓ au carré sur KE. Mais ce rapport est égal[2] au rapport du rectangle de côtés BΔ et ΔZ au rectangle de côtés BE et EZ ; le rapport du cylindre au cylindre est donc égal au rapport de la première aire au gnomon qui en est retranché ; de la même manière aussi le rapport de chacun des autres cylindres contenus dans le cylindre entier, ayant pour axe ΔE, au cylindre de même rang dans la figure inscrite, ayant le même axe, sera égal au rapport de l'aire, placée dans le même ordre que lui, au gnomon qui en est retranché. Nous avons donc une suite de grandeurs, à savoir les cylindres contenus dans le cylindre entier, et une autre suite de grandeurs, à savoir les aires appliquées à ΞN, ayant une largeur égale

1. Cf. Eucl. XII, 2 et XII, 11.
2. Cf. Apollonius, *Con.*, I, 21.

ΝΟ ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ τὰν τοῦ ὑπερβλήματος πλευρὰν ἔχον ἴσαν τᾷ ΔΕ, ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ δευτέρου χωρίου γνώμων ἀφαιρημένος ἴσος τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ΖΧ, ΧΒ, καὶ τὸ λοιπὸν χωρίον παρὰ τὰν ΝΟ παραπεπτωκὸς ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ τὰ λοιπὰ ὁμοίως τούτοις ἑξοῦντι. Διάχθω δὲ τὰ ἐπίπεδα πάντων τῶν κυλίνδρων, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῷ τμάματι, ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν · ἐσσεῖται δὴ ὁ ὅλος κύλινδρος διαιρημένος εἰς κυλίνδρους τῷ μὲν πλήθει ἴσους τοῖς ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι, τῷ δὲ μεγέθει ἴσους τῷ μεγίστῳ αὐτῶν. Ὁ δὴ πρῶτος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ὁ ἔχων ἄξονα τὰν ΔΕ ποτὶ τὸν πρῶτον κύλινδρον τῶν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν ΔΕ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΔΓ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΚΕ. Οὗτος δέ ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ τᾶν ΒΔ, ΔΖ περιεχόμενον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΒΕ, ΕΖ · ἔχει οὖν ὁ κύλινδρος ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ πρῶτον χωρίον ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀπ' αὐτοῦ ἀφαιρημένον · ὁμοίως δὲ καὶ τῶν ἄλλων κυλίνδρων τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἕκαστος ἄξονα ἔχων τὰν ἴσαν τᾷ ΔΕ ποτὶ τὸν κατ' αὐτὸν κύλινδρον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι ἄξονα ἔχοντα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἕξει τὸν λόγον, ὃν τὸ ὁμοίως τεταγμένον αὐτῷ χωρίον ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀπ' αὐτοῦ ἀφαιρημένον. Ἐντὶ οὖν μεγέθεά τινα οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ καὶ ἄλλα μεγέθεα τὰ χωρία τὰ παρὰ τὰν ΞΝ παραπεπτωκότα πλάτος ἔχοντα

1 ΝΟ ms. B : Θ mss. DEGH ‖ 2 ἔχον E : ἔχων DGH ‖ 5 τετραγώνῳ, καὶ BDEGH : τετραγώνῳ τὰν τοῦ ὑπερβλήματος πλευρὰν ἔχον ἴσαν τᾷ ΔΧ, καὶ Stamatis ‖ 6 διάχθω δὲ Heiberg : protrahatur B δὲ ὧδε DEGH ‖ 11 τοῖς BGH : τοὺς DE ‖ 14 τῶν G : τὸν BDEH ‖ 16 ΔΓ Basil. : ΔΕ mss. BDEGH ‖ 22 κατ' αὐτὸν BDG : κατὰ τὸν EH ‖ 24 ὃν B : om. DEGH ‖ 27 τὰ χωρία τὰ Heiberg : χωρία DEGH.

à BΔ, dont le nombre est égal à celui des cylindres et qui ont deux à deux le même rapport ; les cylindres sont en rapport avec d'autres cylindres, à savoir ceux de la figure inscrite, sauf le dernier qui n'a de rapport avec aucune figure, et les aires sont en rapport avec d'autres aires, à savoir les gnomon qui en sont retranchés, les aires qui se correspondent ayant le même rapport, sauf la dernière aire qui n'a de rapport avec aucune figure ; il est donc évident que le rapport de la somme des cylindres à la somme des autres cylindres sera égal au rapport de la somme des aires à la somme des gnomon[1] ; il s'ensuit que le rapport du cylindre ayant même base et même axe que le segment à la figure inscrite dans le segment est égal au rapport de la somme des aires à la somme des gnomon. De plus, on s'est donné des segments de droite, N et O, égaux, et on a appliqué à chacun d'eux une aire excédant d'un carré, les côtés des figures excédentes se dépassant l'un l'autre d'une même longueur et la différence étant égale au plus petit côté ; il y a, en outre d'autres aires, appliquées à ΞN, ayant une largeur égale à BΔ, en même nombre que les autres aires, mais égales chacune à la plus grande ; il est donc évident que le rapport de la somme des aires, dont chacune est égale à la plus grande, à la somme des autres aires est inférieur au rapport de ΞN à la somme[2] de la moitié de NO et du tiers de ΞO. Il est donc manifeste que le rapport entre la somme de ces mêmes aires et la somme des gnomon sera supérieur[3] au rapport de ΞN à la somme de la moitié de NO et des deux tiers de ΞO ; il s'ensuit que le rapport du cylindre ayant même base et même axe que le segment à la figure inscrite au segment est supérieur au rapport de ΞN à la somme de la moitié de NO et des deux tiers de ΞO. Or ΞN est égal à ΔZ,

1. Cf. prop. 1.
2. Cf. prop. 2.
3. Cf. Pappus, *Coll.* VII, 48.

τὰν ἴσαν τᾷ ΒΔ, τῷ δὲ πλήθει ἴσα τοῖς κυλίνδροις καὶ κατὰ δύο τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, λέγονται δὲ οἵ τε κύλινδροι ποτ' ἄλλους κυλίνδρους τοὺς ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, ὁ δὲ ἔσχατος οὐδὲ ποθ' ἓν λέγεται, καὶ τὰ χωρία ποτ' ἄλλα χωρία, τοὺς ἀπ' αὐτῶν ἀφαιρημένους, τὰ ὁμόλογα ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις, τὸ δὲ ἔσχατον χωρίον οὐδὲ ποθ' ἓν λέγεται· δῆλον οὖν ὅτι καὶ πάντες οἱ κύλινδροι ποτὶ πάντας τοὺς ἑτέρους τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, ὃν πάντα τὰ χωρία ποτὶ πάντας τοὺς γνώμονας· ὁ ἄρα κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν ποτὶ τὸ σχῆμα τὸ ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ τμάματι τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, ὃν πάντα τὰ χωρία ποτὶ πάντας τοὺς γνώμονας. Καὶ ἐπεί ἐντί τινες γραμμαὶ ἴσαι κείμεναι, ἐφ' ἆν τὰ Ν, Ο, καὶ παρ' ἑκάσταν παραπέπτωκέν τι χωρίον ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ, αἱ δὲ πλευραὶ τῶν ὑπερβλημάτων τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερέχοντι, καὶ ἁ ὑπεροχὰ ἴσα ἐστὶ τᾷ ἐλαχίστᾳ, καὶ ἄλλα ἐντὶ χωρία παρὰ τὰν ΞΝ παραπεπτωκότα, πλάτος δὲ ἔχοντα τὰς ἴσας τᾷ ΒΔ, τῷ μὲν πλήθει ἴσα τούτοις, τῷ δὲ μεγέθει ἕκαστον ἴσον τῷ μεγίστῳ, δῆλον ὡς σύμπαντα τὰ χωρία, ὧν ἐστιν ἕκαστον ἴσον τῷ μεγίστῳ, ποτὶ πάντα τὰ ἕτερα χωρία ἐλάσσω λόγον ἔχοντι τοῦ ὃν ἔχει ἁ ΞΝ ποτὶ τὰν ἴσαν συναμφοτέρᾳ τᾷ τε ἡμισέᾳ τᾶς ΝΟ καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τᾶς ΞΟ. Φανερὸν οὖν ὅτι τὰ αὐτὰ χωρία ποτὶ πάντας τοὺς γνώμονας μείζονα λόγον ἑξοῦντι τοῦ ὃν ἔχει ἁ ΞΝ ποτὶ τὰν ἴσαν συναμφοτέραις τᾷ τε ἡμισέᾳ τᾶς ΝΟ καὶ δυοῖς τριταμορίοις τᾶς ΞΟ· ὁ ἄρα κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν ποτὶ τὸ σχῆμα τὸ ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ τμάματι μείζονα λόγον ἔχει ἢ ἁ ΞΝ ποτὶ τὰν ἴσαν συναμφοτέραις τᾷ τε ἡμισέᾳ τᾶς ΝΟ καὶ δυοῖς τριταμορίοις τᾶς

4 ποθ' ἓν B : πόθεν DEGH ‖ 7 ποθ' ἓν B : πόθεν DEGH ‖ 16 τῷ add. Heiberg ‖ 18 τὰς add. Heiberg ‖ ἴσας BDEG : ἴσαν H ἴσον Torellius ‖ 26 τᾶς BG : τᾷ DEH.

la moitié de NO est égale à ΔΘ et les deux tiers de ΞO sont égaux à ΔP ; il s'ensuit que le rapport du cylindre entier à la figure inscrite au segment est supérieur au rapport de ΔZ à ΘP ; mais on a démontré que le rapport de ΔZ à ΘP est égal au rapport du même cylindre au cône Ψ ; ce cylindre a donc à la figure inscrite un rapport supérieur[1] à celui qu'il a au cône Ψ, ce qui est impossible, puisqu'on a montré que la figure inscrite est supérieure au cône Ψ. Le segment de l'ellipsoïde n'est donc pas supérieur au cône Ψ.

Qu'il lui soit donc, si possible, inférieur. Inscrivons donc de nouveau au segment une figure solide, et circonscrivons-lui en une autre, les deux figures étant composées de cylindres de même hauteur, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite soit inférieur à l'excès du cône Ψ sur le segment[2], les autres constructions étant les mêmes que plus haut. Du moment donc que la figure inscrite est inférieure au segment, et que l'excès de la figure circonscrite (sc. sur la figure inscrite) est inférieur à l'excès du cône Ψ sur le segment, il est évident que la figure circonscrite est elle aussi inférieure au cône Ψ. De nouveau donc le rapport du premier des cylindres contenus dans le cylindre entier, ayant pour axe ΔE, au premier cylindre de la figure circonscrite, ayant le même axe, est égal au rapport de la dernière des aires appliquées à ΞN, qui ont une largeur égale à BΔ, à elle-même, puisque ces grandeurs sont égales de part et d'autre ; mais le rapport du deuxième cylindre du cylindre entier, ayant un axe égal à ΔE, au cylindre ayant même rang parmi ceux de la figure circonscrite est égal au rapport de la première des aires appliquées

1. Cf. Eucl. V, 10.
2. Cf. prop. 19.

ΞΟ. Ἔστιν δὲ τᾷ μὲν ΞΝ ἴσα ἁ ΔΖ, τᾷ δὲ ἡμισέᾳ τᾶς ΝΟ ἁ ΔΘ, τὰ δὲ δύο τριταμόρια τᾶς ΞΟ ἁ ΔΡ· ὅλος ἄρα ὁ κύλινδρος ποτὶ τὸ σχῆμα τὸ ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ τμάματι μείζονα λόγον ἔχει ἢ ὃν ἔχει ἁ ΔΖ ποτὶ τὰν ΘΡ. Ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ ΔΖ ποτὶ τὰν ΘΡ, τοῦτον ἐδείχθη ἔχων ὁ αὐτὸς κύλινδρος ποτὶ τὸν Ψ κῶνον· μείζονα οὖν ἕξει λόγον ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἢ ποτὶ τὸν Ψ κῶνον· ὅπερ ἀδύνατον· ἐδείχθη γὰρ μεῖζον ἐὸν τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ Ψ κώνου. Οὐκ ἄρα ἐστὶ μεῖζον τὸ τοῦ σφαιροειδέος τμᾶμα τοῦ Ψ κώνου.

Ἀλλ' ἔστω, εἰ δυνατόν, ἔλασσον. Πάλιν δὴ ἐγγεγράφθω τι εἰς τὸ τμᾶμα σχῆμα στερεόν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι ἢ ἁλίκῳ μείζων ἐστὶν ὁ Ψ κῶνος τοῦ τμάματος, καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον κατεσκευάσθω. Ἐπεὶ οὖν ἔλασσόν ἐστι τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ τμάματος, καὶ ἐλάσσονι ὑπερέχει τὸ περιγραφὲν ἢ ὁ Ψ κῶνος τοῦ τμάματος, δῆλον ὅτι καὶ τὸ περιγραφὲν σχῆμα ἔλασσόν ἐστι τοῦ Ψ κώνου. Πάλιν δὴ ὁ πρῶτος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ὁ ἔχων ἄξονα τὰν ΔΕ ποτὶ τὸν πρῶτον κύλινδρον τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ἔσχατον χωρίον τῶν παρὰ τὰν ΞΝ παραπεπτωκότων πλάτος ἐχόντων ἴσον τᾷ ΒΔ ποθ' αὐτό· ἑκάτερα γὰρ ἴσα ἐστίν· ὁ δὲ δεύτερος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἄξονα ἔχων ἴσον τᾷ ΔΕ ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν κατ' αὐτὸν ἐόντα τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ πρῶτον χωρίον τῶν

2 ΔΘ Torellius : ΔΕ mss. BDEGH ‖ δύο τριταμόρια Heiberg : τρίτα δύο μόρια DEGH ‖ 15 μείζων G : μεῖζον DEH ‖ 19 τοῦ EG : τὸ DH ‖ 21 τῶν G : τὸν BDEH ‖ 23 ΞΝ ms. B : ΞΜ mss. DEGH ‖ 24 αὐτό Heiberg : αὐτό DEGH ‖ 26 ἴσον Heiberg : ἴσαν DEGH ‖ 27 τῶν Heiberg : τὸν BDEGH.

à ΞN, qui ont une largeur égale à BΔ, au gnomon qui en est retranché, et le rapport de chacun des autres cylindres du cylindre entier, qui ont un axe égal à ΔE, au cylindre ayant le même rang parmi les cylindres de la figure circonscrite est égal au rapport de l'aire qui lui correspond parmi les aires appliquées à ΞN au gnomon qui en est retranché, la dernière aire étant comptée comme première ; le rapport de la somme des cylindres contenus dans le cylindre entier à la somme des cylindres de la figure circonscrite sera donc égal au rapport de la somme des aires appliquées au segment ΞN à la somme de l'aire placée dernière et les gnomon retranchés des autres aires, pour les mêmes raisons que plus haut[1]. Du moment donc qu'on a démontré[2] que le rapport de la somme des aires appliquées à ΞN à la somme des aires appliquées à NO avec l'excès d'un carré, sauf la plus grande, est supérieur au rapport de ΞN à la somme de la moitié de NO et du tiers de ΞO, il est évident que le rapport de la somme des mêmes aires (sc. appliquées à ΞN) aux aires qui restent, à savoir l'aire placée dernière, et les gnomon retranchés des autres aires, est inférieur[3] au rapport de ΞN à la somme de la moitié de NO et des deux tiers de ΞO ; il est donc évident que le rapport du cylindre, ayant même base et même axe que le segment, à la figure circonscrite est inférieur au rapport de ZΔ à ΘP. Mais le rapport de ΔZ à ΘP est égal au rapport du cylindre indiqué au cône Ψ ; le rapport du même

1. Cf. prop. 1.
2. Cf. prop. 2.
3. Cf. Pappus, *Coll.*, VII, 48.

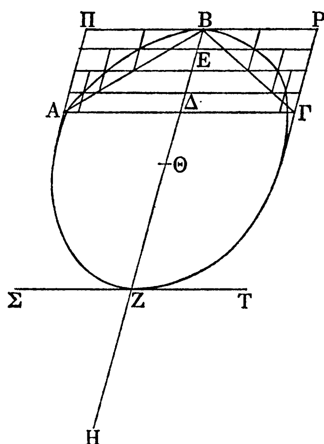
παρὰ τὰν ΞΝ παραπεπτωκότων πλάτος ἐχόντων ἴσον τᾷ ΒΔ ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀφαιρημένον ἀπ' αὐτοῦ, καὶ τῶν ἄλλων δὲ κυλίνδρων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἄξονα ἐχόντων ἴσον τᾷ ΔΕ ποτὶ τὸν κατ' αὐτὸν κύλινδρον τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ὁμόλογον χωρίον αὐτῷ τῶν παρὰ τὰν ΞΝ παραπεπτωκότων ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀπ' αὐτοῦ ἀφαιρημένον πρώτου λεγομένου τοῦ ἐσχάτου· καὶ πάντες οὖν οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ποτὶ πάντας τοὺς κυλίνδρους τοὺς ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, ὃν πάντα τὰ χωρία τὰ παρὰ τὰν ΞΝ παραπεπτωκότα ποτὶ τὸ ἴσον τῷ τε ἐσχάτῳ κειμένῳ χωρίῳ καὶ τοῖς γνωμόνεσσι τοῖς ἀφαιρημένοις ἀπὸ τῶν ἄλλων διὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. Ἐπεὶ οὖν δέδεικται ὅτι τὰ χωρία πάντα τὰ παρὰ τὰν ΞΝ παραπεπτωκότα ποτὶ τὰ χωρία πάντα τὰ παρὰ τὰν ΝΟ παραπεπτωκότα ὑπερβάλλοντα εἴδει τετραγώνῳ χωρὶς τοῦ μεγίστου μείζονα λόγον ἔχοντι τοῦ ὃν ἔχει ἁ ΞΝ ποτὶ τὰν ἴσαν συναμφοτέραις τᾷ τε ἡμισέᾳ τᾶς ΝΟ καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τᾶς ΞΟ, δῆλον ὅτι τὰ αὐτὰ χωρία ποτὶ τὰ λοιπά, ἅ ἐντι ἴσα τῷ ἐσχάτῳ χωρίῳ κειμένῳ καὶ τοῖς γνωμόνεσσι τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν ἀφαιρουμένοις, ἐλάσσονα λόγον ἔχοντι τοῦ ὃν ἔχει ἁ ΞΝ ποτὶ τὰν ἴσαν συναμφοτέραις τᾷ τε ἡμισέᾳ τᾶς ΝΟ καὶ δυσὶ τριταμορίοις τᾶς ΞΟ· δῆλον οὖν ὅτι καὶ ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν ποτὶ τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει ἁ ΖΔ ποτὶ τὰν ΘΡ. Ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ ΔΖ ποτὶ τὰν ΘΡ, τοῦτον ἔχει ὁ εἰρημένος κύλινδρος ποτὶ τὸν Ψ κῶνον· ἐλάσσονα

1 ἴσον Torellius : ἴσαν DEGH ‖ 4 ἴσον Heiberg : ἴσαν DEGH ‖ 8 πρώτου Heiberg : πρὸ τοῦ BDEGH ‖ λεγομένου BH : λέγομεν DEG ‖ πάντες BG : παντὸς DEH ‖ 14-15 πάντα τὰ παρὰ τὰν ΞΝ παραπεπτωκότα ποτὶ τὰ χωρία add. Torellius ‖ 23 τᾷ τε ἡμισέᾳ Torellius : ταῖς τε ἡμισέαις BDEGH ‖ 26 ΖΔ mss. BG : ΖΛ mss. DEH.

cylindre à la figure circonscrite est donc inférieur[1] à son rapport au cône Ψ, ce qui est impossible, puisqu'on a démontré que la figure circonscrite est inférieure au cône Ψ. (sc. Le segment d'ellipsoïde) n'est donc pas inférieur au cône (sc. Ψ). Mais du moment qu'il ne lui est ni supérieur ni inférieur, il lui est équivalent.

30.

Même si l'ellipsoïde de révolution est coupé par un plan ni perpendiculaire à l'axe ni passant par le centre, le rapport de son plus petit segment au segment du cône ayant même base et même axe que le segment sera égal au rapport entre la somme de la moitié du segment de droite joignant les sommets des segments déterminés par la section et de l'axe du plus grand segment d'une part, et l'axe du plus grand segment d'autre part.



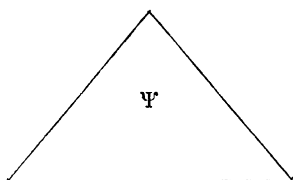


Fig. 102.

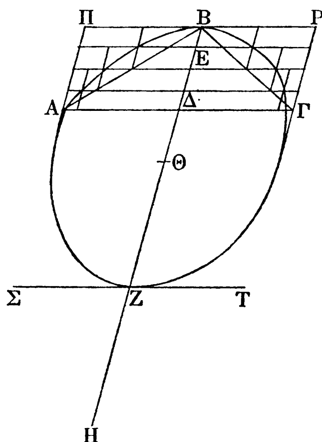
Coupons en effet un ellipsoïde de révolution de la manière indiquée ; coupons-le par un autre plan passant par l'axe et perpendiculaire au plan découpant ; que son intersection avec la figure soit l'ellipse[2] ΑΒΓ, que son inter-

1. Cf. Eucl. V, 10.
2. Cf. prop. 11, 3e partie.

ἄρα λόγον ἔχει ὁ αὐτὸς κύλινδρος ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἢ ποτὶ τὸν Ψ κῶνον· ὅπερ ἀδύνατον· ἐδείχθη γὰρ ἔλασσον ἐὸν τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ Ψ κώνου. Οὐκ ἄρα ἐστὶν ἔλασσον τοῦ κώνου. Ἐπεὶ δὲ οὔτε μεῖζον οὔτε ἔλασσον, ἴσον ἄρα ἐστίν.

λ′.

Καὶ τοίνυν εἴ κα μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα τμαθῇ τὸ σφαιροειδὲς μηδὲ διὰ τοῦ κέντρου, τὸ ἔλασσον αὐτοῦ τμᾶμα ποτὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τὸ βάσιν ἔχον τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἕξει τὸν λόγον, ὃν ἁ ἴσα συναμφοτέρᾳ τᾷ τε ἡμισέᾳ τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰς κορυφὰς τῶν γενομένων τμαμάτων καὶ τῷ ἄξονι τοῦ μείζονος τμάματος ποτὶ τὸν ἄξονα τοῦ μείζονος τμάματος.



Τετμάσθω γάρ τι σχῆμα σφαιροειδές, ὡς εἴρηται, καὶ τμαθέντος αὐτοῦ ἄλλῳ ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἁ ΑΒΓ ὀξυγωνίου κώνου

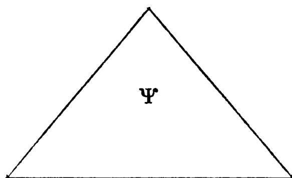


Fig. 102.

2 ἢ B : om. DEGH ‖ 10 τὸ βάσιν ἔχον Heiberg : τοῦ βάσιν ἔχοντος BDEGH ‖ 14 ἁ ἴσα συναμφοτέρᾳ B : αἱ συναμφότεραι DEGH ‖ 28 τομὰ GH : τομᾶν DE.

section avec le plan sécant de la figure soit la droite ΑΓ ; menons parallèlement à ΑΓ les droites ΠΡ et ΣΤ tangentes à l'ellipse en Β et Ζ, et faisons passer par ces droites des plans parallèles au plan de trace ΑΓ ; ces plans seront tangents[1] à l'ellipsoïde en Β et Ζ, et Β et Ζ seront les sommets des segments. Menons donc la droite joignant les sommets des sections, soit ΒΖ ; cette droite passera par le centre[2] ; soit Θ le centre de l'ellipsoïde et de l'ellipse. Du moment donc qu'on a supposé que la figure est coupée par un plan non perpendiculaire à l'axe, la section est une ellipse[3] d'axe ΓΑ. Prenons donc le cylindre ayant son axe sur la droite ΒΔ et tel que l'ellipse décrite autour de ΑΓ comme axe soit située dans sa surface[4], et le cône ayant pour sommet le point Β et tel que l'ellipse d'axe ΑΓ soit située dans sa surface[5] ; nous aurons donc un tronc de cylindre ayant même base et même axe que le segment, et un segment de cône ayant même base et même axe que le segment (sc. de l'ellipsoïde). Il faut montrer que le rapport du segment d'ellipsoïde de sommet Β au segment de cône ayant même base et même axe que le segment est égal au rapport de ΔΗ à ΔΖ ; soit ΖΗ égal à ΘΖ.

Prenons donc un cône Ψ tel que son rapport au segment de cône, ayant même base et même axe que le segment d'ellipsoïde, soit égal au rapport de ΔΗ à ΔΖ. Si, dès lors, le segment d'ellipsoïde n'est pas équivalent

1. Cf. prop. 16, 2e partie.
2. Cf. prop. 16, 3e partie.
3. Cf. prop. 14.
4. Cf. prop. 9.
5. Cf. prop. 8.

τομά, τοῦ δὲ τέμνοντος ἐπιπέδου τὸ σχῆμα ἁ ΓΑ εὐθεῖα, καὶ παρὰ τὰν ΑΓ ἄχθων αἱ ΠΡ, ΣΤ ἐπιψαύουσαι τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὰ Β, Ζ, καὶ ἀνεστακέτω ἀπ' αὐτᾶν ἐπίπεδα παράλληλα τῷ κατὰ τὰν ΑΓ· ἐπιψαυσοῦντι δὲ ταῦτα τοῦ σφαιροειδέος κατὰ τὰ Β, Ζ, καὶ ἐσσοῦνται κορυφαὶ τῶν τμαμάτων τὰ Β, Ζ. Ἄχθω οὖν ἁ τὰς κορυφὰς τῶν τμαμάτων ἐπιζευγνύουσα καὶ ἔστω ἁ ΒΖ· πεσεῖται δὲ αὕτα διὰ τοῦ κέντρου· καὶ ἔστω κέντρον τοῦ σφαιροειδέος καὶ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς τὸ Θ. Ἐπεὶ οὖν ὑπέκειτο μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα τετμᾶσθαι τῷ ἐπιπέδῳ τὸ σχῆμα, ἁ τομά ἐστιν ὀξυγωνίου κώνου τομὰ καὶ διάμετρος αὐτᾶς ἁ ΓΑ. Λελάφθω οὖν ὅ τε κύλινδρος ὁ ἄξονα ἔχων ἐπ' εὐθείας τᾷ ΒΔ, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ ἁ περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, καὶ ὁ κῶνος ὁ κορυφὰν ἔχων τὸ Β σαμεῖον, οὗ ἐν τᾶ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ ἁ περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ· ἐσσεῖται δὴ τόμος τις κυλίνδρου τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν καὶ ἀπότμαμα κώνου τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. Δεικτέον ὅτι τὸ τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος, οὗ κορυφὰ τὸ Β, ποτὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τὸ βάσιν ἔχον τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἕξει τὸν λόγον, ὃν ἁ ΔΗ ποτὶ τὰν ΔΖ· ἴσα δὲ ἔστω ἁ ΖΗ τᾷ ΘΖ.

Λελάφθω δή τις κῶνος, ἐν ᾧ τὸ Ψ, ποτὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τὸ βάσιν ἔχον τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχων τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ ΔΗ ποτὶ τὰν ΔΖ. Εἰ οὖν μή ἐστιν ἴσον τὸ τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος τῷ

4 ἐπίπεδα παράλληλα Nizzius : ἐπίπεδον παράλληλον BDEGH ‖ 5 τὰ Basil. : τὸ DEGH ‖ 6-7 τὰ Β, Ζ. Ἄχθω οὖν ἁ τὰς κορυφὰς τῶν τμαμάτων add. Nizzius ‖ 7 ἐπιζευγνύουσα Heiberg : ἐπιζευχθεῖσα DG ἐπιζευχθεῖσαι BEH ‖ 12 ὁ alt. add. Heiberg ‖ 21 τὸ βάσιν ἔχον Heiberg : τοῦ βάσιν ἔχοντος BDEGH ‖ 23 ΘΖ ms. B : ΔΖ mss. DEGH ‖ 25 τὸ βάσιν ἔχον Heiberg : τοῦ βάσιν ἔχοντος BDEGH ‖ 26 ἔχων EH : ἔχον DG.

au cône Ψ, qu'il lui soit d'abord, si possible, supérieur. J'inscris donc au segment d'ellipsoïde une figure solide et je lui en circoncris une autre, les deux figures étant composées de troncs de cylindre ayant même hauteur, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite soit inférieur à l'excès du segment d'ellipsoïde sur le cône Ψ[1]. On montrera donc de la même manière que plus haut que la figure inscrite est supérieure au cône Ψ, et que le rapport du tronc de cylindre ayant même base et même axe que le segment à la figure inscrite est supérieur à son rapport au cône Ψ, ce qui est impossible. Le segment d'ellipsoïde ne sera donc pas supérieur au cône Ψ.

Qu'il lui soit donc, si possible, inférieur. Inscrivons donc de nouveau au segment une figure solide et circonscrivons-lui en une autre, les deux figures étant composées de troncs de cylindre de même hauteur, de manière que l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite soit inférieur à l'excès du cône Ψ sur le segment[1]. On montrera encore, par les mêmes raisonnements, que la figure circonscrite est inférieure au cône Ψ, et que le rapport du tronc de cylindre, ayant même base et même axe que le segment, à la figure circonscrite est inférieur à son rapport au cône Ψ, ce qui est impossible. Le segment n'est donc pas, non plus, inférieur au cône Ψ. La proposition qu'il fallait démontrer est donc évidente.

31.

Dans tout ellipsoïde coupé par un plan perpendiculaire à l'axe et ne passant pas par le centre, le rapport du plus grand segment au cône ayant même

1. Cf. prop. 20.

Ψ κώνῳ, ἔστω πρῶτον, εἰ δυνατόν, μεῖζον. Ἐνέγραψα δὴ εἰς τὸ τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος σχῆμα στερεὸν καὶ ἄλλο περιέγραψα ἐκ κυλίνδρων τόμων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει τὸ τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος τοῦ Ψ κώνου. Ὁμοίως δὴ τῷ προτέρῳ δειχθήσεται τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μεῖζον ἐὸν τοῦ Ψ κώνου καὶ ὁ τόμος τοῦ κυλίνδρου ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μείζονα λόγον ἔχων ἢ ποτὶ τὸν Ψ κῶνον· ὅ ἐστιν ἀδύνατον. Οὐκ ἐσσεῖται οὖν τὸ τοῦ σφαιροειδέος τμᾶμα τοῦ Ψ κώνου μεῖζον.

Ἀλλ' ἔστω, εἰ δυνατόν, ἔλασσον. Ἐγγεγράφθω δὴ πάλιν εἰς τὸ τμᾶμα σχῆμα στερεὸν καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρου τόμων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενα, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει ὁ Ψ κῶνος τοῦ τμάματος. Πάλιν δὴ διὰ τῶν αὐτῶν δειχθήσεται τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσον τοῦ Ψ κώνου καὶ ὁ τόμος τοῦ κυλίνδρου ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἐλάσσονα λόγον ἔχων ἢ ποτὶ τὸν Ψ κῶνον· ὅ ἐστιν ἀδύνατον. Οὐκ ἐσσεῖται οὖν οὐδὲ ἔλασσον τὸ τμᾶμα τοῦ κώνου. Φανερὸν οὖν ὃ ἔδει δεῖξαι.

λα'.

Παντὸς σχήματος σφαιροειδέος ἐπιπέδῳ τμαθέντος ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὸ μεῖζον τμᾶμα ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι

3 κυλίνδρων DEGH : cylindri B ‖ 13 ἐγγεγράφθω Heiberg : ἐγγεγραμμένον BDEGH ‖ 14 περιγεγράφθω Heiberg : περιγεγραμμένον BDEGH ‖ 15 ἴσον G : equalem B om. DEH ‖ 24 ὃ ἔδει B : ὡς δεῖ DEGH.

base et même axe que le segment est égal au rapport entre la somme de la moitié de l'axe de l'ellipsoïde et de l'axe du plus petit segment à l'axe du plus petit segment.

Coupons un ellipsoïde de la manière indiquée ; coupons-le par un autre plan, passant par l'axe et perpendiculaire au plan sécant ; que son intersection avec la figure soit l'ellipse ΑΒΓ ; soit ΒΔ l'axe de l'ellipse et de la figure[1] ; soit ΓΑ la droite d'intersection avec le plan sécant ; cette droite sera perpendiculaire à ΒΔ ; que le segment de sommet Β soit le plus grand, et soit Θ le centre de l'ellipsoïde ; ajoutons (sc. au segment ΔΒ) les segments ΔΗ et ΒΖ égaux à ΔΘ ; il faut montrer que le rapport du segment d'ellipsoïde de sommet Β au cône ayant même base et même axe que le segment est égal au rapport de ΕΗ à ΕΔ.

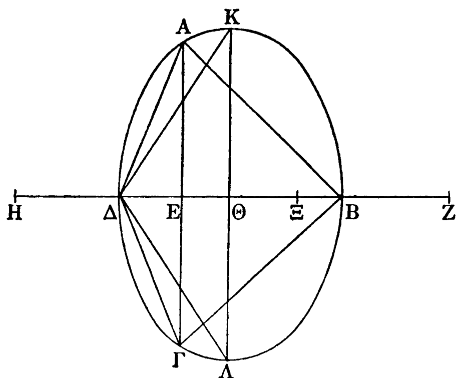


Fig. 103.

1. Cf. prop. 11, 3[e] partie.

καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ ἴσα συναμφοτέραις τᾷ τε ἡμισέᾳ τοῦ ἄξονος τοῦ σφαιροειδέος καὶ τῷ τοῦ ἐλάσσονος τμάματος ἄξονι ποτὶ τὸν τοῦ ἐλάσσονος τμάματος ἄξονα.

Τετμάσθω τι σφαιροειδές, ὡς εἴρηται, τμαθέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἁ ΑΒΓ ὀξυγωνίου κώνου τομά, διάμετρος δὲ αὐτᾶς καὶ ἄξων τοῦ σχήματος ἁ ΒΔ, τοῦ δὲ τέμνοντος ἐπιπέδου ἁ ΓΑ εὐθεῖα· ἐσσεῖται δὲ αὕτα ποτ' ὀρθὰς τᾷ ΒΔ· ἔστω δὲ μεῖζον τῶν τμαμάτων, οὗ κορυφὰ τὸ Β, καὶ κέντρον τοῦ σφαιροειδέος τὸ Θ. Ποτικείσθω δὴ ἁ ΔΗ τᾷ ΔΘ ἴσα καὶ ἁ ΒΖ τᾷ αὐτᾷ ἴσα· δεικτέον ὅτι τὸ τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος, οὗ κορυφὰ τὸ Β, ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ ΕΗ ποτὶ τὰν ΕΔ.

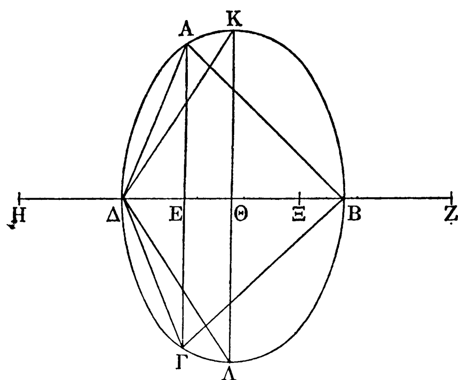


Fig. 103.

7 σχήματος Torellius : τμήματος BDEGH || 9 δὲ pr. add. Torellius || δὲ alt. Heiberg : δὴ BDEGH.

Coupons donc l'ellipsoïde par un plan passant par le centre et perpendiculaire à l'axe, et faisons passer par le cercle ainsi produit[1] un cône ayant pour sommet le point Δ ; dès lors, l'ellipsoïde entier est le double du segment[2] ayant pour base le cercle de diamètre KΛ et pour sommet le point Δ, et le segment indiqué est le double du cône ayant même base et même axe que le segment[3] ; ces propositions ont en effet été démontrées. L'ellipsoïde entier est donc équivalent au quadruple du cône indiqué. Mais le rapport de ce cône au cône ayant pour base le cercle de diamètre AΓ et pour sommet le point Δ est le produit du rapport de ΘΔ à EΔ et du rapport du carré sur KΘ au carré sur EA[4] ; or le rapport du carré sur KΘ au carré sur EA est égal[5] au rapport du rectangle de côtés BΘ et ΘΔ au rectangle de côtés BE et EΔ. Que le rapport de ΘΔ à EΔ soit donc égal[6] au rapport de ΞΔ à ΘΔ ; le rapport du rectangle de côtés ΞΔ et BΘ au rectangle de côtés BΘ et ΘΔ sera donc égal au rapport de ΔΘ à ΔE. Mais le produit du rapport entre le rectangle de côtés ΞΔ et ΘB et le rectangle de côtés BΘ et ΘΔ par le rapport entre le rectangle de côtés BΘ et ΘΔ et le rectangle de côtés BE et EΔ est égal au rapport du rectangle de côtés ΞΔ et BΘ au rectangle de côtés BE et EΔ ; le rapport du cône ayant pour base le cercle de diamètre KΛ et pour sommet le point Δ au cône ayant pour base le cercle de diamètre AΓ et pour sommet le point Δ est donc égal au rapport du rectangle de côtés ΞΔ et BΘ au rectangle de côtés BE et EΔ. Mais le rapport du cône ayant pour base le cercle de diamètre AΓ et pour sommet le point Δ au segment d'ellipsoïde ayant même

1. Cf. prop. 11, 3e partie.
2. Cf. prop. 18.
3. Cf. prop. 27.
4. Cf. prop. 10 et Eucl. XII, 2.
5. Cf. Apollonios, *Con.* I, 21.
6. Cf. Eucl. VI, 11.

Τετμάσθω δὴ τὸ σφαιροειδὲς ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ κέντρου ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, καὶ ἀπὸ τοῦ γενομένου κύκλου κῶνος ἔστω κορυφὰν ἔχων τὸ Δ σαμεῖον· ἔστιν δὴ τὸ μὲν ὅλον σφαιροειδὲς διπλάσιον τοῦ τμάματος τοῦ βάσιν ἔχοντος τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΚΛ, κορυφὰν δὲ τὸ Δ σαμεῖον, τὸ δὲ εἰρημένον τμᾶμα διπλάσιον τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν· δέδεικται γὰρ ταῦτα· τὸ ὅλον οὖν σφαιροειδὲς τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ κώνου τοῦ εἰρημένου. Ὁ δὲ κῶνος οὗτος ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, κορυφὰν δὲ τὸ Δ σαμεῖον, τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἁ ΘΔ ποτὶ τὰν ΕΔ, καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς ΚΘ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΕΑ· ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς ΚΘ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΕΑ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ ΒΘ, ΘΔ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΒΕ, ΕΔ. Ὃν δὴ λόγον ἔχει ἁ ΘΔ ποτὶ τὰν ΕΔ, τοῦτον ἐχέτω ἁ ΞΔ ποτὶ τὰν ΘΔ· ἕξει οὖν καὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΞΔ, ΒΘ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΒΘ, ΘΔ, ὃν ἁ ΔΘ ποτὶ τὰν ΔΕ. Ὁ δὲ συγκείμενος λόγος ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ ΞΔ, ΘΒ ποτὶ τὸ ὑπὸ ΒΘΔ, καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ τᾶν ΒΘ, ΘΔ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΒΕ, ΕΔ ὁ αὐτός ἐστι τῷ ὃν ἔχει τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΞΔ, ΒΘ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΒΕ, ΕΔ· ἔχει οὖν ὁ μὲν κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΚΛ, κορυφὰν δὲ τὸ Δ σαμεῖον, ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, κορυφὰν δὲ τὸ Δ σαμεῖον, τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΞΔ, ΒΘ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΒΕ, ΕΔ. Ὁ δὲ κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, κορυφὰν δὲ τὸ Δ σαμεῖον, ποτὶ

10 δὲ Heiberg : δὴ BDEGH ‖ 17 ΘΔ ms. B : ΘΑ mss. DEGH ‖ 25 τὰν GH : τὰ DE.

base et même axe que ce cône est égal[1] au rapport du rectangle de côtés BE et EΔ au rectangle de côtés ZE et EΔ, c'est-à-dire au rapport de BE à EZ ; car le rapport du segment inférieur à la moitié de l'ellipsoïde au cône ayant même base que le segment et même axe est égal, comme on l'a montré, au rapport entre la somme de la moitié de l'axe de l'ellipsoïde et de l'axe du plus grand segment à l'axe du plus grand segment, et ce rapport est égal au rapport de ZE à BE ; il s'ensuit que le rapport du cône dans la moitié de l'ellipsoïde au segment de l'ellipsoïde inférieur à la moitié de la figure est égal[2] au rapport du rectangle de côtés ΞΔ et BΘ au rectangle de côtés ZE et EΔ. Du moment donc que le rapport de l'ellipsoïde entier au cône situé dans la moitié de l'ellipsoïde est égal au rapport du rectangle de côtés ZH et ΞΔ au rectangle de côtés BΘ et ΞΔ, puisque (sc. le premier terme) est le quadruple (sc. du second terme) de part et d'autre, et que le rapport du cône situé dans la moitié de l'ellipsoïde au segment inférieur à la moitié de l'ellipsoïde est égal au rapport du rectangle de côtés ΞΔ et BΘ au rectangle de côtés ZE et EΔ, le rapport de l'ellipsoïde entier au plus petit segment est égal au rapport du rectangle de côtés ZH et ΞΔ au rectangle de côtés ZE et EΔ ; par conséquent, le rapport du plus grand segment de l'ellipsoïde au plus petit est lui aussi égal[3] au rapport de l'excès du rectangle de côtés ZH et ΞΔ sur le rectangle de côtés ZE et EΔ au rectangle de côtés ZE et EΔ. Or l'excès du rectangle de côtés ZH et ΞΔ sur le rectangle de côtés ZE et EΔ est égal au rectangle de côtés ΞΔ et EH augmenté

1. Cf. prop. 29.
2. Cf. Eucl. V, 22.
3. Cf. Eucl. V, 17.

τὸ τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος τὸ βάσιν ἔχον τὰν αὐτὰν αὐτῷ καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΒΕ, ΕΔ ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ΖΕ, ΕΔ [τουτέστιν ἁ ΒΕ ποτὶ ΕΖ· τὸ γὰρ ἔλασσον ἢ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν δέδεικται τοῦτον ἔχον τὸν λόγον, ὃν ἁ συναμφοτέραις ἴσα τᾷ τε ἡμισέᾳ τοῦ ἄξονος τοῦ σφαιροειδέος καὶ τῷ ἄξονι τῷ τοῦ μείζονος τμάματος ποτὶ τὸν ἄξονα τὸν τοῦ μείζονος τμάματος, οὗτος δέ ἐστιν ὃν ἔχει ἁ ΖΕ ποτὶ τὰν ΒΕ]· ὁ ἄρα κῶνος ὁ ἐν τῷ ἡμισέῳ τοῦ σφαιροειδέος ποτὶ τὸ τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος τὸ ἔλασσον τοῦ ἡμίσεος τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΞΔ, ΒΘ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΖΕ, ΕΔ. Ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ὅλον σφαιροειδὲς ποτὶ τὸν κῶνον τὸν ἐν τῷ ἡμισέῳ τοῦ σφαιροειδέος τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΖΗ, ΞΔ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΒΘ, ΞΔ [τετραπλάσιον γὰρ ἑκάτερον], ὁ δὲ κῶνος ὁ ἐν τῷ ἡμισέῳ τοῦ σφαιροειδέος ποτὶ τὸ τμᾶμα τὸ ἔλασσον ἢ τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΞΔ, ΒΘ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΖΕ, ΕΔ, ἔχοι κα καὶ τὸ ὅλον σφαιροειδὲς ποτὶ τὸ τμᾶμα τὸ ἔλασσον αὐτοῦ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΖΗ, ΞΔ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΖΕΔ· ὥστε καὶ τὸ μεῖζον τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος ποτὶ τὸ ἔλασσον τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει, ὃν ἁ ὑπεροχά, ᾇ ὑπερέχει τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΖΗ, ΞΔ τοῦ ὑπὸ τᾶν ΖΕ, ΕΔ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΖΕΔ. Ὑπερέχει δὲ τὸ ὑπὸ τᾶν ΖΗ, ΞΔ τοῦ ὑπὸ τᾶν ΖΕ, ΕΔ τῷ τε ὑπὸ τᾶν ΞΔ, ΕΗ περιεχομένῳ καὶ τῷ

1 τοῦ G : τὸ τοῦ DEH ‖ 4 ΖΕ, ΕΔ Basil. : ΞΕ, ΒΕ mss. DEGH ‖ 7 ἔχον EH : ἔχων DG ‖ 21 ἔχοι DEH : ἔχει G ‖ κα add. Heiberg ‖ 23 ΖΗ ms. B : ΖΝ mss. DEGH ‖ 26 ΖΗ ms. B : ΖΝ mss. DEGH ‖ τοῦ Torellius : τὸ DEGH ‖ 27 τὸ Basil. : τοῦ BDEGH.

du rectangle de côtés ZE et ΞE ; il s'ensuit que le rapport du plus grand segment de l'ellipsoïde au plus petit segment est égal au rapport entre la somme du rectangle de côtés ΞΔ et EH et du rectangle de côtés ZE et ΞE au rectangle de côtés ZE et EΔ. Mais le rapport du plus petit segment de l'ellipsoïde au cône ayant même base et même axe que lui est égal au rapport du rectangle de côtés ZE et EΔ au rectangle de côtés BE et EΔ[1], puisque ce rapport est égal au rapport de ZE à BE, et le rapport du cône situé dans le plus petit segment au cône situé dans le plus grand segment est égal au rapport *du rectangle de côtés BE et EΔ au carré sur BE ; car* les cônes ont le rapport de leurs hauteurs, puisqu'ils ont la même base[2] ; le rapport du plus grand segment de l'ellipsoïde au cône qui y est inscrit est donc égal[3] au rapport de la somme du rectangle de côtés ΞΔ et EH et du rectangle de côtés ZE et ΞE au carré sur BE. Or ce rapport est égal au rapport de EH à EΔ, puisque le rapport du rectangle de côtés ΞΔ et EH au rectangle de côtés ΞΔ et EΔ est égal au rapport de EH à EΔ, et que le rapport du rectangle de côtés ΞE et ZE au rectangle de côtés ZE et ΘE est égal au rapport de EH à EΔ ; car le rapport de ΞE à ΘE est égal au rapport de EH à EΔ parce que les segments ΞΔ, ΘΔ et ΔE sont proportionnels et que ΘΔ est égal à HΔ[4] ; le rapport de la somme du rectangle de côtés ΞΔ et EH et du rectangle de côtés ZE et ΞE à la somme du rectangle de côtés ΞΔ et EΔ et du rectangle de côtés ZE et ΘE est égal au rapport de EH à EΔ[5]. Or le carré sur EB

1. Cf. Eucl. V, 22.
2. Cf. Eucl. XII, 14 et la prop. 10.
3. Cf. Eucl. V, 22.
4. Cf. Eucl. V, 16-18.
5. Cf. Eucl. V, 16 et 18.

ὑπὸ τᾶν ΖΕ, ΞΕ · ἔχει ἄρα τὸ μεῖζον τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος ποτὶ τὸ ἔλασσον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ἴσον ἀμφοτέροις τῷ τε περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ΞΔ, ΕΗ καὶ τῷ ὑπὸ τᾶν ΖΕ, ΞΕ ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΖΕ, ΕΔ. Τὸ δὲ ἔλασσον τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν αὐτῷ καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΖΕ, ΕΔ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΒΕΔ [τὸν γὰρ αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ΖΕ ποτὶ τὰν ΒΕ], ὁ δὲ κῶνος ὁ ἐν τῷ ἐλάσσονι τμάματι ποτὶ τὸν κῶνον τὸν ἐν τῷ μείζονι τμάματι τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΒΕ, ΕΔ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΕ τετράγωνον · τὸν γὰρ τῶν ὑψέων λόγον ἔχοντι οἱ κῶνοι, ἐπεὶ βάσιν ἔχοντι τὰν αὐτάν · ἔχοι οὖν κα τὸ μεῖζον τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος ποτὶ τὸν κῶνον τὸν ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένον ὃν τὸ ἴσον ἀμφοτέροις τῷ τε περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ΞΔ, ΕΗ καὶ τῷ ὑπὸ τᾶν ΖΕ, ΞΕ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΕ. Οὗτος δὲ ὁ αὐτός ἐστι τῷ ὃν ἔχει ἁ ΕΗ ποτὶ τὰν ΕΔ · τὸ γὰρ ὑπὸ τᾶν ΞΔ, ΕΗ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΞΔ, ΕΔ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ ΕΗ ποτὶ τὰν ΕΔ, καὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΞΕ, ΖΕ περιεχόμενον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΖΕ, ΘΕ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ ΕΗ ποτὶ τὰν ΕΔ · ἁ γὰρ ΞΕ ποτὶ τὰν ΘΕ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ΕΗ ποτὶ τὰν ΕΔ διὰ τὸ ἀνάλογόν τε εἶμεν τὰς ΞΔ, ΘΔ, ΔΕ, καὶ τὰν ΘΔ ἴσαν εἶμεν τᾷ ΗΔ · καὶ τὸ ἴσον οὖν ἀμφοτέροις τῷ τε περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ΞΔ, ΕΗ καὶ τῷ ὑπὸ τᾶν ΖΕ, ΞΕ ποτὶ τὸ ἴσον συναμφοτέροις τῷ τε ὑπὸ τᾶν ΞΔ, ΕΔ καὶ τῷ ὑπὸ τᾶν ΖΕ, ΘΕ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ΕΗ ποτὶ τὰν ΕΔ. Τὸ δὲ ἀπὸ τᾶς ΕΒ τετράγωνον ἴσον ἐντὶ ἀμφο-

3 ΕΗ ms. B : ΕΝ mss. DEGH ‖ 9 ΖΕ Basil. : ΖΘ mss. BDEGH ‖ 13 κα Heiberg : καὶ BDEGH ‖ 16 ΖΕ Basil. : ΖΘ mss. BDEGH ‖ 19 ΕΗ mss. BG : ΕΝ mss. DEH ‖ 21 ΕΗ mss. BGH : ΕΝ mss. DE ‖ 22 ἁ pr. G : αἱ DEH ‖ 23 τε Heiberg : τὸ DEGH ‖ 24 ΗΔ ms. B : ΝΔ mss. DEGH ‖ 25 τε add. Heiberg ‖ 26 ΞΔ Basil. : ΞΕ mss. BDEGH ‖ 27 ὃν BG : om. DEH.

est équivalent à la somme du rectangle de côtés ΞΔ et EΔ et du rectangle de côtés ZE, ΘE ; car le carré sur BΘ est équivalent[1] au rectangle de côtés ΞΔ et EΔ, et l'excès du carré sur BE sur le carré sur BΘ est équivalent au rectangle de côtés ZE et ΘE, puisque BΘ est égal à BZ[2] ; il est donc évident que le rapport du plus grand segment de l'ellipsoïde au cône ayant même base et même axe que le segment est égal au rapport de EH à EΔ.

32.

Même si l'ellipsoïde est coupé par un plan ni perpendiculaire à l'axe ni passant par le centre, le rapport du plus grand de ses segments au segment du cône ayant même base et même axe que le segment sera égal au rapport entre la somme de la moitié du segment de droite joignant les sommets des segments produits et de l'axe du plus petit segment d'une part et l'axe du plus petit segment d'autre part.

Coupons l'ellipsoïde de la manière indiquée ; coupons-le par un autre plan, passant par l'axe et perpendiculaire au plan sécant ; que l'intersection avec la figure soit l'ellipse[3] ΑΒΓΔ ; que l'intersection avec le plan qui coupe la figure soit la droite ΓΑ ; parallèlement à ΑΓ menons les droites ΠΡ et ΣΤ tangentes à l'ellipse aux points B et Δ, et faisons passer par ces tangentes des plans parallèles au plan de trace ΑΓ ; ces plans seront tangents[4] à l'ellipsoïde en B et Δ, et B et Δ seront

1. Cf. Eucl. VI, 17.
2. Cf. Eucl. II, 4.
3. Cf. prop. 11, 3e partie.
4. Cf. prop. 16, 2e partie.

τέροις τῷ τε περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ΞΔ, ΕΔ καὶ τῷ ὑπὸ τᾶν ΖΕ, ΘΕ· τὸ μὲν γὰρ ἀπὸ τᾶς ΒΘ τετράγωνον ἴσον τῷ ὑπὸ τᾶν ΞΔ, ΕΔ περιεχομένῳ, ἁ δὲ ὑπεροχά, ᾇ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΕ τετράγωνον τοῦ ἀπὸ τᾶς ΒΘ, ἴσον ἐστὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ΖΕ, ΘΕ, ἐπεὶ ἴσαι αἱ ΒΘ, ΒΖ· δῆλον οὖν ὅτι τὸ μεῖζον τοῦ σφαιροειδέος τμᾶμα ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ ΕΗ ποτὶ τὰν ΕΔ.

λβ′.

Καὶ τοίνυν εἴ κα μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα τῷ ἐπιπέδῳ τμαθῇ τὸ σφαιροειδὲς μηδὲ διὰ τοῦ κέντρου, τὸ μεῖζον τμᾶμα αὐτοῦ ποτὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τὸ βάσιν ἔχον τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἕξει τὸν λόγον, ὃν ἁ συναμφοτέραις ἴσα τᾷ τε ἡμισέᾳ τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰς κορυφὰς τῶν γενομένων τμαμάτων καὶ τῷ ἄξονι τῷ τοῦ ἐλάσσονος τμάματος ποτὶ τὸν ἄξονα τὸν τοῦ ἐλάσσονος τμάματος.

Τετμάσθω τὸ σφαιροειδὲς ἐπιπέδῳ, ὡς εἴρηται, τμαθέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἁ ΑΒΓΔ ὀξυγωνίου κώνου τομά, τοῦ δὲ τέμνοντος ἐπιπέδου τὸ σχῆμα ἁ ΓΑ εὐθεῖα, παρὰ δὲ τὰν ΑΓ ἄχθωσαν αἱ ΠΡ, ΣΤ ἐπιψαύουσαι τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς κατὰ τὰ Β, Δ, καὶ ἀνεστακέτω ἀπ' αὐτᾶν ἐπίπεδα παράλληλα τῷ κατὰ τὰν ΑΓ· ἐπιψαυσοῦντι δὲ ταῦτα τοῦ σφαιροειδέος κατὰ τὰ Β, Δ, καὶ ἐσσοῦνται κορυφαὶ τῶν τμαμάτων τὰ

1 τῷ alt. BG : τὸ DEH ‖ 3 μεῖζόν Heiberg : μείζων DEGH ‖ 13-14 τὸ βάσιν ἔχον Heiberg : τοῦ βάσιν ἔχοντος BDEGH ‖ 15 ἁ συναμφοτέραις Heiberg : equalis simulutrique B αἱ συναμφότεραι DEGH ‖ 20 ἄλλῳ BG : ἀλλὰ DEH.

les sommets des segments. Menons donc la droite BΔ joignant les sommets des segments ; cette droite passera par le centre[1] ; soit Θ le centre ; que le segment supérieur à la moitié de l'ellipsoïde soit celui dont le sommet est B ; ajoutons (sc. à ΔB) les segments de droite ΔH et BZ égaux à ΔΘ. Il faut montrer que le rapport du plus grand segment de l'ellipsoïde au segment de cône ayant même base et même axe que le segment est égal au rapport de EH à EΔ.

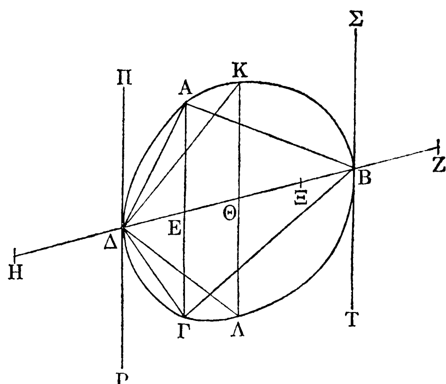


Fig. 104.

Coupons en effet l'ellipsoïde par un plan passant par le centre et parallèle au plan de trace ΑΓ, et inscrivons dans la moitié de l'ellipsoïde un segment de cône ayant pour sommet le point Δ ; que le rapport de ΔΘ à EΔ soit égal au rapport de ΞΔ à ΘΔ. On démontrera dès

1. Cf. prop. 16, 3e partie.

Β, Δ. Ἄχθω οὖν ἁ τὰς κορυφὰς ἐπιζευγνύουσα τῶν γενομένων τμαμάτων ἁ ΒΔ· πεσεῖται δ' αὕτα διὰ τοῦ κέντρου· καὶ ἔστω κέντρον τὸ Θ, μεῖζον δὲ ἢ τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος τὸ τμᾶμα, οὗ κορυφὰ τὸ Β, ποτικείσθω δὲ ἁ ΔΗ ἴσα τᾳ̃ ΔΘ καὶ ἁ ΒΖ τᾳ̃ αὐτᾳ̃. Δεικτέον ὅτι τὸ τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος τὸ μεῖζον ποτὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τὸ βάσιν ἔχον τὰν αὐτὰν τῳ̃ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ ΕΗ ποτὶ τὰν ΕΔ.

Fig. 104.

Τετμάσθω γὰρ τὸ σφαιροειδὲς ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ κέντρου παραλλήλῳ τῳ̃ κατὰ τὰν ΑΓ ἐπιπέδῳ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος ἀπότμαμα κώνου κορυφὰν ἔχον τὸ Δ σαμεῖον, καὶ ὃν ἔχει λόγον ἁ ΔΘ ποτὶ τὰν ΕΔ, τοῦτον ἐχέτω ἁ ΞΔ ποτὶ τὰν ΘΔ. Ὁμοίως δὴ τῳ̃ πρότερον δειχθήσεται τό τε ἀπότμαμα τοῦ κώνου τὸ ἐν τῳ̃ ἡμισέῳ

3 δὲ ἢ Torellius : ὄντος DEGH ‖ τὸ alt. ΕΗ : τῳ̃ DG ‖ 4 τὸ pr. add. Heiberg ‖ ἁ Basil. : τᾶς DEH τᾳ̃ G ipsi B ‖ 5 τᾳ̃ pr. Basil. : ἁ BDEGH ‖ 7 τὸ βάσιν ἔχον Heiberg : τοῦ βάσιν ἔχοντος BDEGH ‖ 13 ΘΔ ms. B : ΘΑ mss. DEGH ‖ τῳ̃ BG : τὸ DEH ‖ 14 τὸ alt. Heiberg : τοῦ BDEGH.

lors de la même manière que plus haut que le rapport du segment de cône inscrit dans la moitié de l'ellipsoïde au segment de cône inscrit dans le plus petit segment est égal au rapport du rectangle de côtés ΞΔ et BΘ au rectangle de côtés BE et EΔ et que le rapport du segment de cône inscrit dans le plus petit segment au segment dans lequel il est inscrit est égal au rapport du rectangle de côtés BE et EΔ au rectangle de côtés ZE et EΔ ; le rapport du segment de cône inscrit dans la moitié de l'ellipsoïde au plus petit segment de l'ellipsoïde sera donc égal au rapport du rectangle de côtés ΞΔ et BΘ au rectangle de côtés ZE et EΔ[1]. Le rapport de l'ellipsoïde entier au segment de cône inscrit dans la moitié de l'ellipsoïde sera alors égal[2] au rapport du rectangle de côtés ZH et ΞΔ au rectangle de côtés BΘ et ΞΔ, puisque (sc. le premier terme) est le quadruple (sc. du second terme) de part et d'autre ; or le rapport du segment de cône indiqué au plus petit segment de l'ellipsoïde est égal au rapport du rectangle de côtés ΞΔ et BΘ au rectangle de côtés ZE et EΔ ; le rapport de l'ellipsoïde entier au plus petit de ses segments sera donc égal au rapport du rectangle de côtés ZH et ΞΔ au rectangle de côtés ZE et EΔ ; mais le rapport du plus grand segment lui-même au plus petit segment est égal[3] au rapport de l'excès du rectangle de côtés ZH et ΞΔ sur le rectangle de côtés EZ et EΔ au rectangle de côtés ZE et EΔ. Or le rapport du plus petit segment au segment de cône qui y est inscrit

1. Cf. Eucl. V, 22.
2. Cf. Eucl. V, 22.
3. Cf. Eucl. V, 17.

τοῦ σφαιροειδέος ἐγγεγραμμένον ποτὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τὸ ἐν τῷ ἐλάσσονι ἐγγεγραμμένον τὸν αὐτὸν ἔχον λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΞΔ, ΒΘ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΒΕ, ΕΔ, καὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τὸ ἐν τῷ ἐλάσσονι τμάματι ἐγγεγραμμένον ποτὶ τὸ τμᾶμα τὸ ἐν ᾧ ἐγγέγραπται τὸν αὐτὸν ἔχον λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΒΕ, ΕΔ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΖΕ, ΕΔ· ἕξει οὖν τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τὸ ἐν τῷ ἡμισέῳ τοῦ σφαιροειδέος ἐγγεγραμμένον ποτὶ τὸ ἔλασσον τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΞΔ, ΒΘ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΖΕ, ΕΔ. Ἕξει οὖν τὸ μὲν ὅλον σφαιροειδὲς ποτὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τὸ ἐν τῷ ἡμισέῳ τοῦ σφαιροειδέος ἐγγεγραμμένον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΖΗ, ΞΔ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΒΘ, ΞΔ· τετραπλάσιον γὰρ ἑκατέρου ἑκάτερον· τὸ δὲ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τὸ εἰρημένον ποτὶ τὸ ἔλασσον τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΞΔ, ΒΘ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΖΕ, ΕΔ· ἕξει οὖν τὸ ὅλον σφαιροειδὲς ποτὶ τὸ ἔλασσον τμᾶμα αὐτοῦ [τοῦ σφαιροειδέος] τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΖΗ, ΞΔ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΖΕ, ΕΔ· αὐτὸ δὲ τὸ μεῖζον τμᾶμα ποτὶ τὸ ἔλασσον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ὑπεροχά, ᾇ ὑπερέχει τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΖΗ, ΞΔ τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τᾶν ΖΕ, ΕΔ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΖΕ, ΕΔ. Τὸ δὲ ἔλασσον τμᾶμα ποτὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τὸ ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένον τὸν αὐτὸν ἔχει

1 ἐγγεγραμμένον Heiberg : ἐγγεγραμμένῳ DEH ἐγγεγραμμένου BG || 2 τὸ ἐν τῷ ἐλάσσονι ἐγγεγραμμένον Heiberg : τοῦ ἐν τῷ ἐλάσσονι ἐγγεγραμμένου BDGEH || 4 τὸ alt. Heiberg : τοῦ BDEGH || 5 ἐγγεγραμμένον Heiberg : ἐγγεγραμμένου BDEGH || 6 ἔχον BG : ἔχοντα DEH || 8 τὸ Heiberg : τοῦ BDEGH || 8-9 ἐγγεγραμμένον Heiberg : ἐγγεγραμμένου BDEGH || 10 ΒΘ Basil. : ΒΕ mss. BDEGH || 12 τὸ Heiberg : τοῦ BDEGH || ἐγγεγραμμένον Heiberg : ἐγγεγραμμένου BDEGH || 14 ΒΘ Basil. : ΒΞ mss. BDEGH || 25 τὸ ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένον Heiberg : τοῦ ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένου BDEGH.

est égal au rapport du rectangle de côtés ZE et EΔ au rectangle de côtés BE et EΔ ; car on a montré que ce rapport est égal au rapport de ZE à BE ; d'autre part, le rapport du segment de cône inscrit dans le plus petit segment au segment de cône inscrit dans le plus grand segment est égal au rapport du rectangle de côtés BE et EΔ au carré sur BE ; car les segments de cône indiqués ont le rapport de leurs hauteurs, puisqu'ils ont la même base[1], et leurs hauteurs ont le rapport[2] de ΔE à EB ; le rapport du plus grand segment de l'ellipsoïde au segment de cône qui y est inscrit est donc lui aussi égal[3] au rapport de l'excès du rectangle de côtés HZ et ΞΔ sur le rectangle de côtés ZE et EΔ au carré sur BE ; or on montrerait par les mêmes raisonnements que plus haut que ce rapport est égal au rapport de EH à EΔ.

1. Cf. prop. 10.
2. Cf. Eucl. VI, 4.
3. Cf. Eucl. V, 22.

λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν ΖΕ, ΕΔ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΒΕ, ΕΔ [δέδεικται γὰρ τοῦτον ἔχον τὸν λόγον, ὃν ἁ ΖΕ ποτὶ τὰν ΒΕ]· τὸ δὲ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τὸ ἐν τῷ ἐλάσσονι τμάματι ἐγγεγραμμένον ποτὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τὸ ἐν τῷ μείζονι τμάματι ἐγγεγραμμένον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν ΒΕ, ΕΔ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΕ τετράγωνον· τὰ γὰρ ἀποτμάματα τῶν κώνων τὰ εἰρημένα τὸν τῶν ὑψέων λόγον ἔχοντι, ἐπεὶ βάσιν ἔχοντι τὰν αὐτάν, τὰ δὲ ὕψεα αὐτῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντι τῷ τᾶς ΔΕ ποτὶ τὰν ΕΒ· ἔχει οὖν καὶ τὸ μεῖζον τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος ποτὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τὸ ἐν αὐτῷ ἐγγογραμμένον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ὑπεροχά, ᾇ ὑπερέχει τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΗΖ, ΞΔ τοῦ ὑπὸ τᾶν ΖΕΔ, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΕ τετράγωνον· ὁ δὲ λόγος οὗτος ὁμοίως τῷ πρότερον δειχθείη κα ὁ αὐτὸς ἐὼν τῷ ὃν ἔχει ἁ ΕΗ ποτὶ τὰν ΕΔ.

3 τὸ alt. Heiberg : τοῦ BDEGH || 3-5 ἐλάσσονι τμάματι ἐγγεγραμμένον ποτὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τὸ ἐν τῷ add. Basil. Heiberg || 5 ἐγγεγραμμένον Heiberg : ἐγγεγραμμένου BDEGH || 8 ἐπεὶ βάσιν ἔχοντι B : om. DEGH || 9 τῷ B : τὸν DEGH || τὰν G : τὸν DEH || 10 οὖν add. Heiberg || 13 τοῦ Basil. : τὸ DEGH || 15 κα add. Heiberg.

NOTES COMPLÉMENTAIRES

Page 20.

3. Heiberg juge improbable qu'Archimède ait donné deux solutions et lui prête[1] la solution unique que voici :

Τὸ οὖν περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ τὸ συναμφότερον ὅ τε κύκλος καὶ τὸ B χωρίον πρὸς αὐτὸν τὸν κύκλον. Διὰ δὴ τοῦτο ἔλασσόν ἐστι τὸ περιγεγραμμένον τοῦ συναμφοτέρου · ὥστε καὶ τὰ περιλείμματα ἐλάσσονα ἔσται τοῦ B χωρίου.

« Le rapport du polygone circonscrit au polygone inscrit est donc inférieur au rapport entre la somme du cercle et de l'aire B, d'une part, et le cercle même d'autre part. Pour cette raison donc le polygone circonscrit est inférieur à cette somme ; il s'ensuit que la somme des figures de reste est elle aussi inférieure à l'aire B. »

Page 23.

2. D'après le commentaire d'Eutocius à ce passage, Archimède avait formulé cette propriété αἱ ἄρα ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὰ A, B, Γ ἐπιζευγνύμεναι κάθετοί εἰσιν ἐπ' αὐτάς (sc. τὰς ἐφαπτομένας), « les droites joignant le sommet aux points A, B, Γ sont donc perpendiculaires aux tangentes. Cf. Heiberg I, p. 29.

Page 25.

1. Archimède n'indique pas la raison de cette inégalité ; la démonstration d'Eutocius (cf. vol. III) est incomplète ; celle de Heiberg (I, p. 31, n. 2) n'est valable que pour le cas où la corde ΑΓ interceptée par le cercle de base est le côté d'un triangle équilatéral. Mais la propriété est vraie pour ΑΓ quelconque ; cf. la démonstration proposée par Dijksterhuis, *op. laud.*, p. 156, 157.

2. Puisque par hypothèse $\Theta \geqslant$ segments de cordes AB et ΒΓ ; cf. p. 25, l. 6.

1. *Archimède* I, p. 23.

Page 33.

1. Heiberg a vu que, par une omission d'un copiste, la subordonnée causale introduite par ἀλλὰ (sc. ἐπεὶ) καὶ ἡ συγκειμένη ἐπιφάνεια κτλ. est incomplète et qu'il manque un chaînon dans le raisonnement. Il propose d'ajouter au texte, l. 18, après εὐθυγράμμων :

πέρας ἔχει τὸ τοῦ ΑΓΒΔ παραλληλογράμμου ἐπίπεδον, μείζων οὖν ἐστιν ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΔ εὐθειῶν καὶ τὰ ΑΕΒ, ΓΖΔ ἐπίπεδα τμήματα τῆς συγκειμένης ἐπιφανείας ἐκ τῶν παραλληλογράμμων, ὧν βάσεις μὲν αἱ ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, καὶ τῶν ΑΘΕΚΒ, ΓΛΖΜΔ εὐθυγράμμων.

« ... admet elle aussi comme limite le parallélogramme ΑΓΒΔ, la somme de la surface cylindrique, découpée par les droites ΑΓ et ΒΔ, et des segments plans (c'est-à-dire des triangles mixtilignes) ΑΕΒ et ΓΖΔ est supérieure à la surface composée des parallélogrammes, ayant pour bases ΑΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΒ et pour hauteur la hauteur du cylindre, et des figures rectilignes ΑΘΕΚΒ et ΓΛΖΜΔ. »

Page 39.

1. La démonstration, l. 12-26, a été qualifiée de « trop verbeuse » déjà par Nizze. Heiberg propose le raisonnement, plus direct, que voici : par hypothèse,

$$\mathrm{H}^2 = \Delta\Gamma \cdot \mathrm{EZ}\,;\ \Delta\Gamma = 2\ \mathrm{T}\Delta\,;\ \mathrm{EZ} = \frac{\mathrm{PZ}}{2}.$$

Donc

$$\mathrm{H}^2 = 2\ \mathrm{T}\Delta \cdot \frac{\mathrm{PZ}}{2} = \mathrm{T}\Delta \cdot \mathrm{PZ}$$

$$\frac{\overline{\mathrm{T}\Delta}^2}{\mathrm{H}^2} = \frac{\overline{\mathrm{T}\Delta}^2}{\mathrm{T}\Delta \cdot \mathrm{PZ}}\,;$$

d'où

$$\frac{\overline{\mathrm{T}\Delta}^2}{\mathrm{H}^2} = \frac{\mathrm{T}\Delta}{\mathrm{PZ}}.$$

Page 51.

2. On a en effet, d'après le lemme 1, p. 48,

$$\frac{\mathrm{AB\Gamma}}{\mathrm{B\Gamma\Delta}} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{E\Delta}},$$ d'où on déduit par composition :

$$\frac{\mathrm{AB\Gamma} + \mathrm{B\Gamma\Delta}}{\mathrm{B\Gamma\Delta}} = \frac{\mathrm{AE} + \mathrm{E\Delta}}{\mathrm{E\Delta}},$$

$$\frac{\mathrm{AB\Gamma\Delta}}{\mathrm{B\Gamma\Delta}} = \frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{\Delta E}}.$$

Page 58.

l. 15. L'énoncé de la proposition 23 a été reconstitué par Stamatis[1] en ces termes :

κγ'.

<Ἐὰν ἐν μεγίστῳ κύκλῳ σφαίρας πολύγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον ἐγγραφῇ, οὗ τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν ὑπὸ τετράδος μετρεῖται, μενούσης δὲ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου περιενεχθεὶς οὗτος ἔχων τὸ πολύγωνον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐν τῇ σφαίρᾳ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐλάσσων ἔσται τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας>.

23.

« Si dans un grand cercle d'une sphère est inscrit un polygone équilatéral et équiangle, dont le nombre des côtés est divisible par quatre, et que, le diamètre du cercle restant en place, le cercle avec le polygone qu'il contient tourne et revient à sa position initiale, la surface de la figure inscrite dans la sphère sera inférieure à la surface de la sphère. »

Page 67.

l. 11. Énoncé de la proposition 28 reconstitué par Stamatis[2] :

κη'.

<Ἐὰν μεγίστῳ κύκλῳ σφαίρας πολύγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον περιγραφῇ, οὗ τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν ὑπὸ τετράδος μετρεῖται, μενούσης δὲ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου περιενεχθεὶς οὗτος ἔχων τὸ πολύγωνον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τῇ σφαίρᾳ περιγεγραμμένου σχήματος μείζων ἔσται τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας>.

28.

« Si à un grand cercle d'une sphère est circonscrit un polygone équilatéral et équiangle, dont le nombre des côtés est divisible par quatre, et que, le diamètre du cercle restant en place, le cercle avec le polygone tourne et revient à sa position initiale, la surface de la figure circonscrite à la sphère sera supérieure à la surface de la sphère. »

Page 81.

1. Raisonnement à compléter par « de façon que le rapport de la figure circonscrite à la figure inscrite est inférieur au rapport du cône Ξ à la sphère » ; cf. Heiberg I, p. 129.
2. Cf. prop. 28.
3. Cf. prop. 31, corollaire.
4. La proposition qui suit est citée par Héron, *Metr.* p. 4, 1 ;

1. ΑΡΧΙΜΗΔΕΙΑ I, « ΠΛΑΤΩΝ », t. 19, 1967, p. 151.
2. *Ibid.*

120, 28 ; *Stereom.* I, 1 ; par Proclus, *In Eucl.* p. 71, 18 ; cf. Simplicius, *In Aristt. De caelo,* p. 549, 21 sq. Pappus en donne une autre démonstration, *Coll.* I, p. 408.

5. Cf. Eucl. XII, 10.
6. Cf. prop. 34.
7. Cf. prop. 13.
8. Cf. Eucl. XII, 2.

Page 83.

Énoncé de la proposition 36 reconstitué par Stamatis[1] :

λϛ'.

<'Εὰν ἐν τμήματι μεγίστου κύκλου σφαίρας πολύγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἀρτιόγωνον ἐγγραφῇ χωρὶς τῆς βάσεως, μενούσης δὲ τῆς διαμέτρου περιενεχθεὶς οὗτος ἔχων τὸ πολύγωνον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐλάσσων ἔσται τῆς ἐπιφανείας τοῦ τμήματος>.

36.

« Si on inscrit dans un segment d'un grand cercle d'une sphère un polygone équilatéral d'un nombre pair de côtés, la base ne ne comptant pas, et que, le diamètre restant en place, le cercle avec le polygone qu'il contient tourne et revient à sa position initiale, la surface de la figure inscrite sera inférieure à la surface du segment sphérique. »

Page 85.

1. Cf. prop. 35
2. Cf. prop. 22.
3. Dans le triangle rectangle ΘΑΛ, on a $\overline{\Theta A}^2 = \Theta K \cdot \Theta \Lambda$; une corde ne passant pas par le centre est inférieure au diamètre, d'où $\Lambda E < \Lambda\Theta$; on a donc $E\Lambda \cdot K\Theta < \Theta K \cdot \Theta\Lambda$, et par conséquent $E\Lambda \cdot K\Theta < \overline{A\Theta}^2$.
4. Cf. Eucl. XII, 2.

Page 88.

Énoncé de la proposition 39 reconstitué par Stamatis[2] :

λθ'.

<Τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος τῷ τομεῖ ἡ ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ τῆς τοῦ ἐλάσσονος τμήματος τῆς σφαίρας ἐπιφανείας>.

39.

« La surface de la figure circonscrite au secteur sphérique est supérieure à la surface du plus petit segment de la sphère. »

1. *Ibid.*, p. 152.
2. *Ibid.*

Page 92.

Énoncé de la proposition 41 reconstitué par Stamatis[1] :

μα′.

<῾Η ἐπιφάνεια τοῦ τῷ τμήματι τῆς σφαίρας περιγεγραμμένου σχήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου ὁμοίου σχήματος διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, τὸ δὲ περιγεγραμμένον σχῆμα σὺν τῷ κώνῳ τῷ βάσιν ἔχοντι τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι καὶ ὕψος τὴν πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς σφαίρας πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα σὺν τῷ κώνῳ τῷ βάσιν ἔχοντι τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι καὶ ὕψος τὴν πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ αὐτοῦ>.

41.

« Le rapport de la surface de la figure, circonscrite au segment de la sphère, à la surface de la figure semblable qui y est inscrite est égal au carré du rapport entre le côté du polygone circonscrit et le côté du polygone inscrit. Le rapport entre la somme des volumes de la figure circonscrite et du cône ayant même base que le segment et pour hauteur l'apothème de cette base, d'une part, et la somme des volumes de la figure inscrite et du cône ayant même base que le segment et pour hauteur l'apothème de cette base, d'autre part, est égal au cube du rapport mentionné (sc. du rapport entre le côté du polygone circonscrit et le côté du polygone inscrit). »

Page 96.

5. Le raisonnement accuse ici des lacunes dues à des négligences de copiste. Voici comment on peut essayer de le compléter :

(1) $\text{surf. du segment} < Z$

(2) $\dfrac{\text{polyg. circonscrit}}{\text{polyg. inscrit}} < \dfrac{Z}{\text{surf. du segm.}}$

(3) $\dfrac{\text{polyg. circ.}}{Z} < \dfrac{\text{polyg. inscr.}}{\text{surf. du segm.}}$;

mais le premier membre de l'inégalité (3) est >1 du fait que polyg. circ. $> Z$, d'après la prop. 40, alors que le second membre est <1, du fait que polyg. inscr. $<$ surf. du segm., d'après la prop. 36 ; l'inégalité (3) est donc impossible, et la surface du segment ne saurait être inférieure à Z.

Page 102.

1. Dans la lettre à Dosithée qui introduit le traité *Des spirales*,

1. *Ibid.*

cf. le t. II de cette édition, Archimède rappelle ce problème, ainsi que les problèmes et théorèmes des propositions 1 et 3 à 9 de ce livre, de façon que nous possédons la forme originale, en dorien, de ces énoncés.

2. Cf. prop. I, 33.

3. Cf. prop. I, 34, coroll.

Page 138.

1. Cette proposition est citée par Héron, *Metr.*, p. 66 ; Pappus, I, p. 258, 312 ; III, p. 1158 ; Proclus, *In Eucl.*, p. 423. Pappus reprend la démonstration d'Archimède en I, p. 312-316.

2. Ceci est possible d'après Eucl. XII, 2 ; cf. Archimède, *De la sphère et du cylindre*, prop. I, 6.

Page 139.

1. Cf. *De la sphère et du cylindre,* I, postulat 5.
2. Cf. Eucl. III, 18.
3. Cf. Eucl. VI, 1.
4. Cf. Eucl. X, 1 et Archim., *De la sph. et du cyl.* I, 6.
5. Cf. *De la sph. et du cyl.* I, 1.
6. Proposition citée par Héron, *Metr.*, p. 66.

Page 152.

2. Archimède, comme ses prédécesseurs, définit les coniques par l'intersection d'un cône et d'un plan perpendiculaire à une de ses génératrices. Si le cône est rectangle, l'intersection, — une parabole —, est une « section de cône rectangle », dont la révolution autour de l'axe engendre un « conoïde rectangle ».

3. Si le cône coupé ainsi est obtusangle, l'intersection — une hyperbole — est une « section de cône obtusangle », dont la révolution autour de l'axe engendre un « conoïde obtusangle ».

4. Si le cône coupé est acutangle, l'intersection — une ellipse — est une « section de cône acutangle », dont la révolution engendre un « sphéroïde ».

Page 165.

1. Archimède dit « prenons une droite le long de laquelle les segments menés de la section forment des rectangles équivalents aux carrés (sc. sur les ordonnées des points de la parabole) ». Cette droite, le paramètre 2 p, apparaît dans l'équation de la parabole en coordonnées cartésiennes, $y^2 = 2\,px$.

2. Sc. d'Euclide.

3. Cf. Apollonios, *Con.* I, 11.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION VII

SIGLA XXXI

De la Sphère et du Cylindre 1

La Mesure du Cercle 135

Sur les Conoïdes et les Sphéroïdes 145

NOTES COMPLÉMENTAIRES 253